

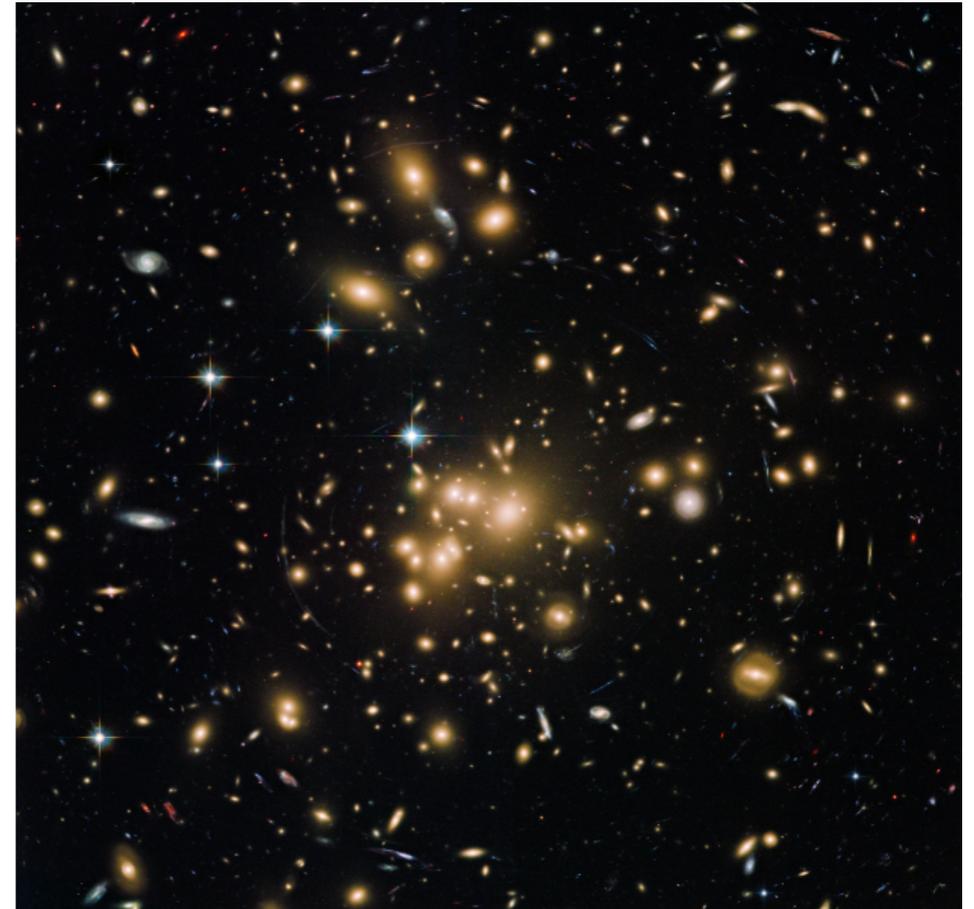
銀河団の弱重力レンズ解析

大栗 真宗

(東京大 RESCEU/物理/Kavli IPMU)

銀河団

- 宇宙最大の自己重力束縛系
- **ダークマター**が卓越
- いろいろな方法で観測
 - 可視光 (メンバー銀河)
 - X線
 - 電波 (Sunyaev-Zel'dovich)
 - **重力レンズ**



Abell 1689

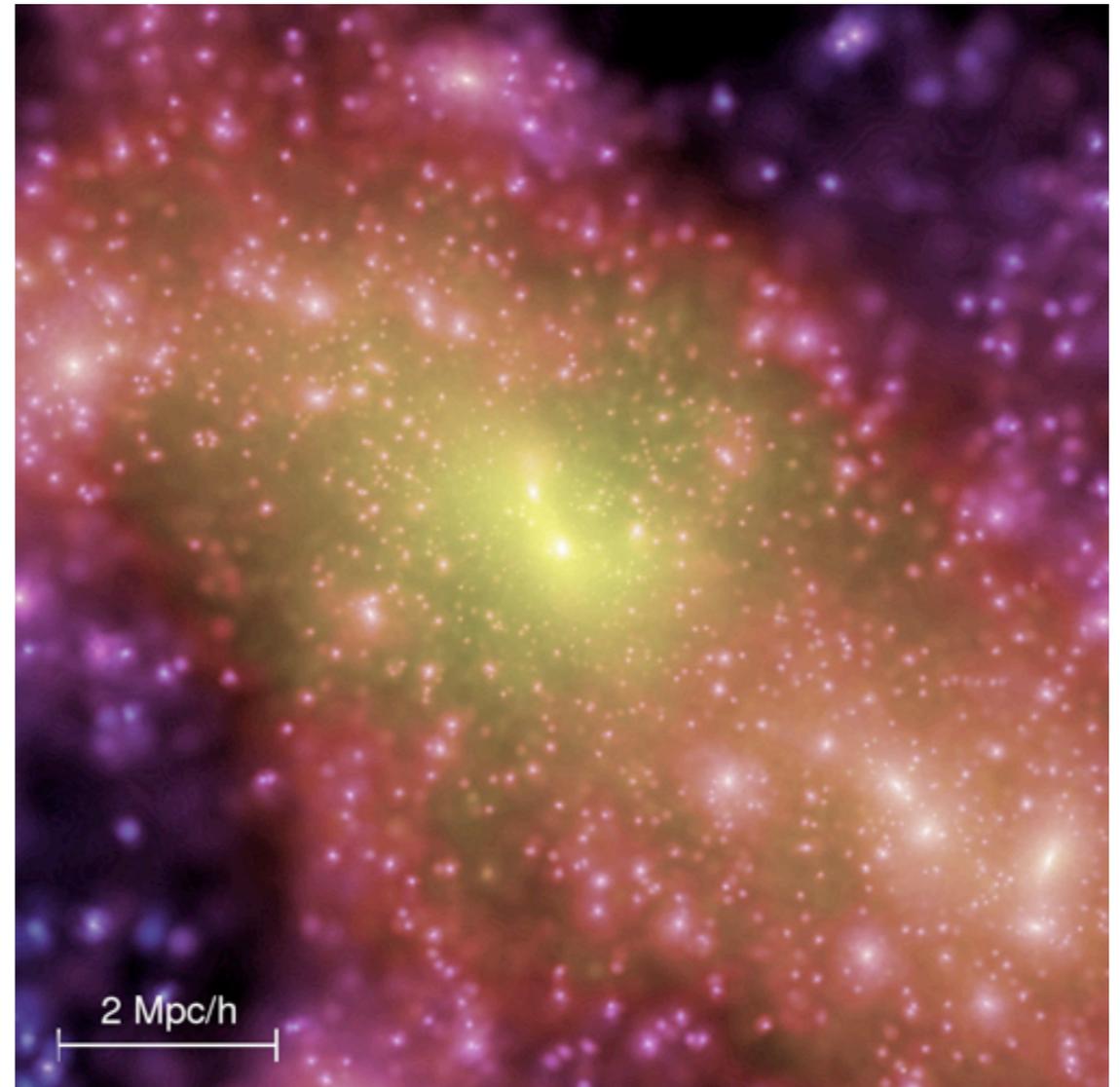


Bullet cluster

(NASA/ESA)

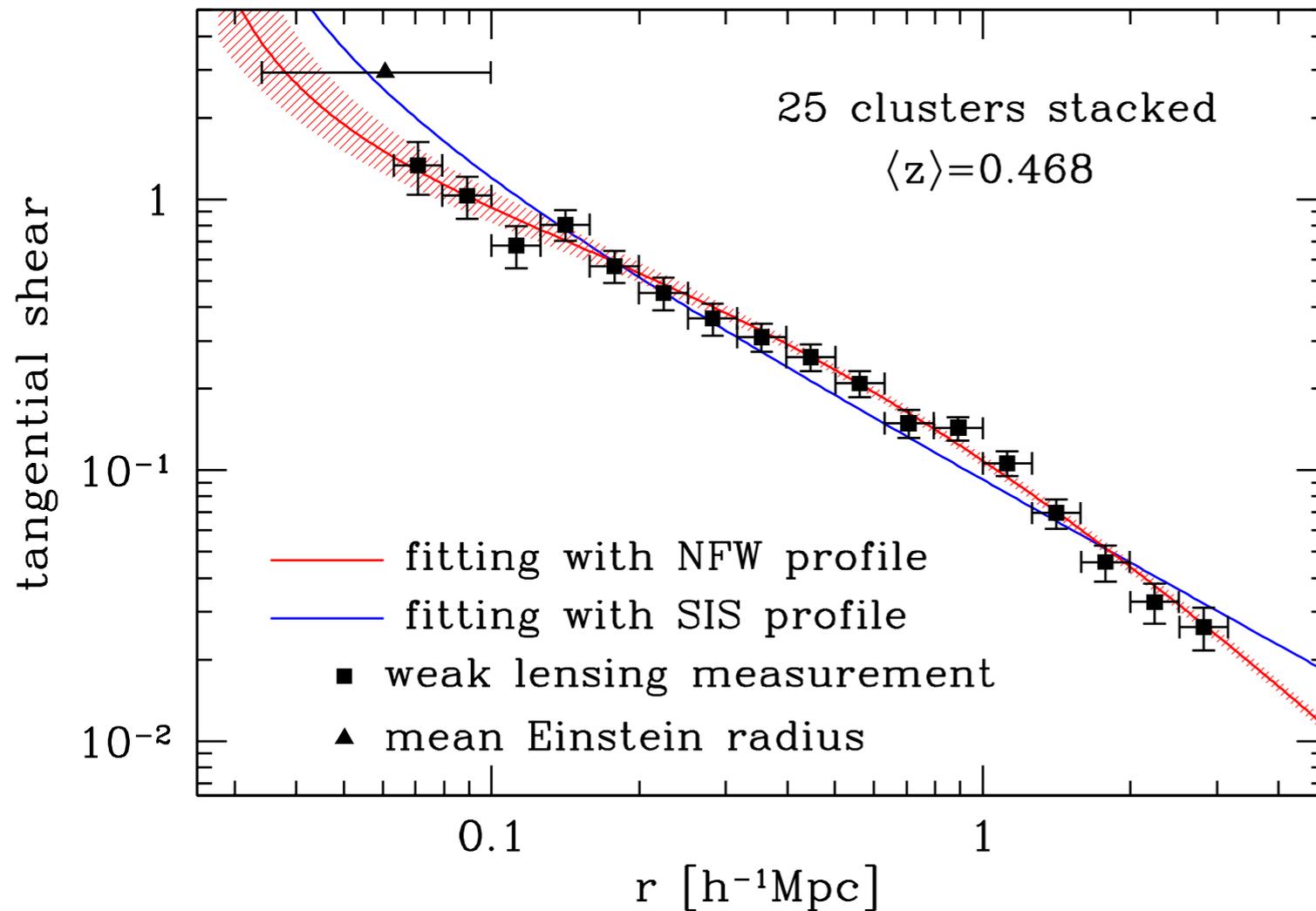
銀河団で調べるダークマター

- 現在の標準理論（仮定）：
冷たい無衝突ダークマター
- その性質の仮定はダークマター分布に本質的に重要
 - NFW分布
 - 大きな非球対称性
 - 星分布とちいさなズレ
- 重力レンズはダークマターの性質の解明にすでに大きな貢献



<http://www.mpa-garching.mpg.de/galform/millennium/>

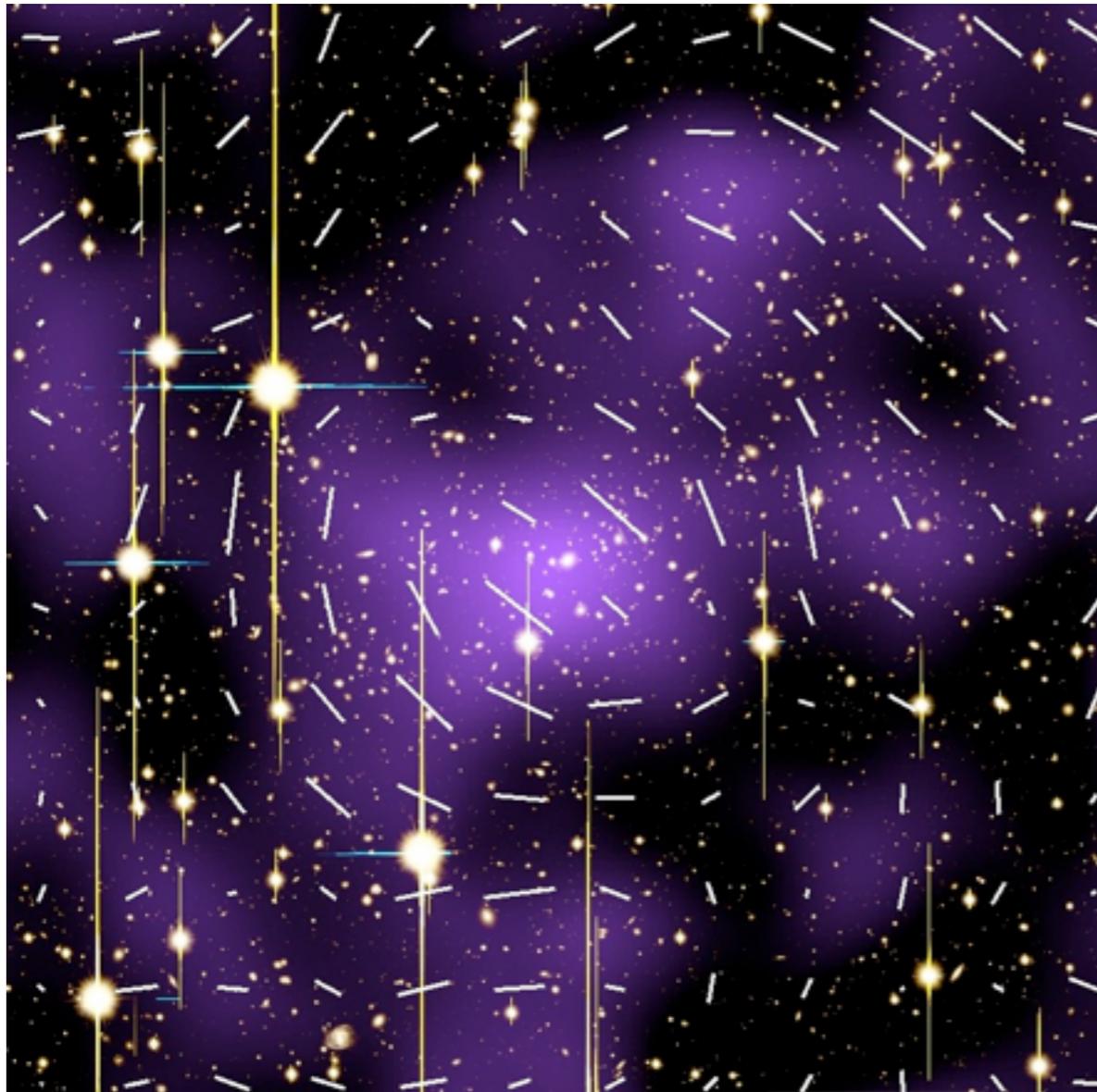
動径密度分布



- 多数の銀河団でスタックし高S/N
- 標準ダークマター理論の予言分布 (NFW profile) と高精度で一致

(see also Okabe et al. 2010, 2013; Umetsu et al. 2014; Niikura et al. 2015)

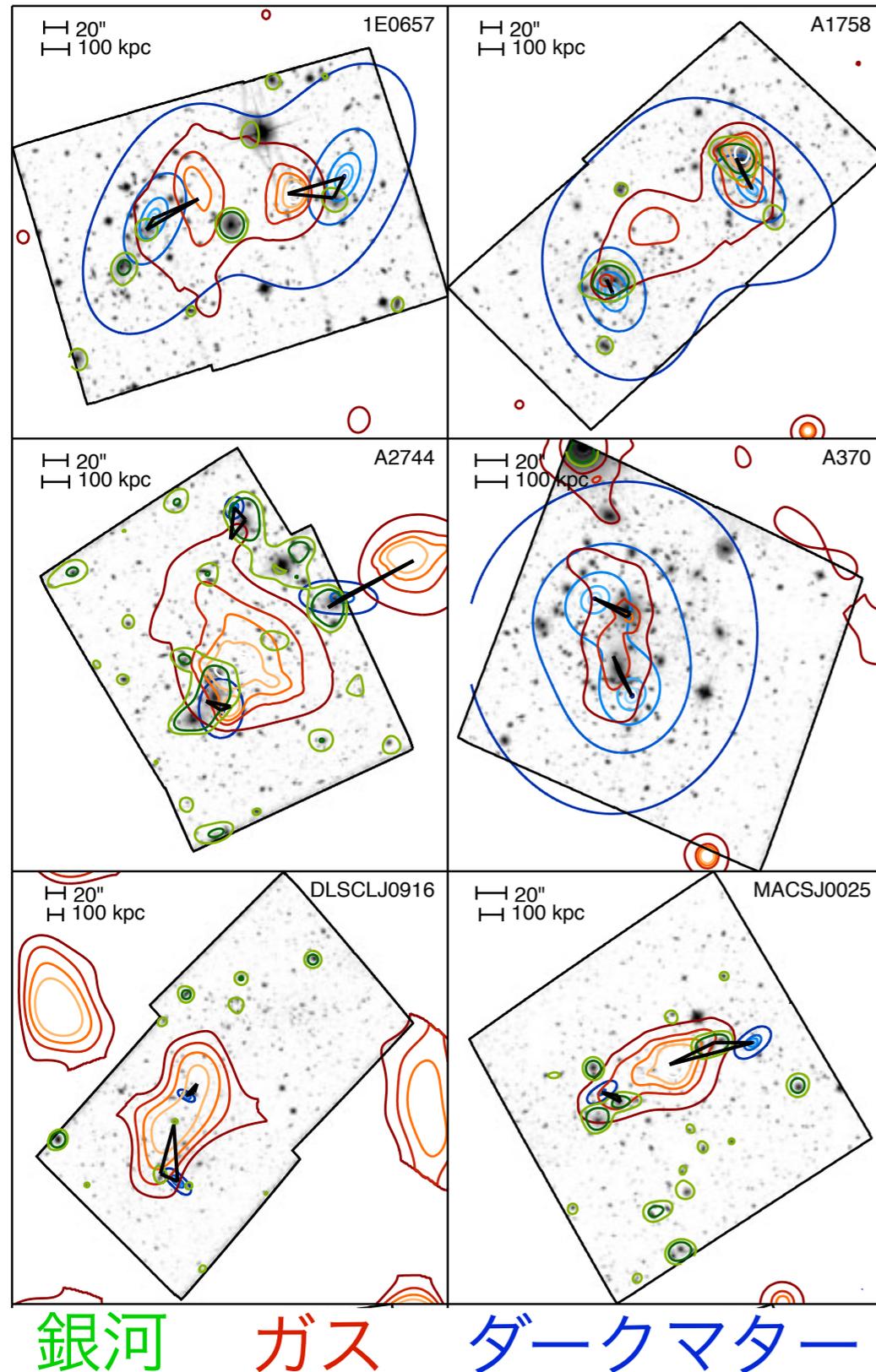
二次元密度分布の非対称性



Abell 2390

- 密度分布の非球対称性を直接検証
- 観測された楕円率 $\langle e \rangle = 0.46 \pm 0.04$ は冷たい無衝突ダークマターの予言と非常によく一致
(see also Evans & Bridle 2009; Oguri et al. 2012; Clampitt & Jain 2016; van Uitert et al. 2016)

ダークマターは無衝突か？



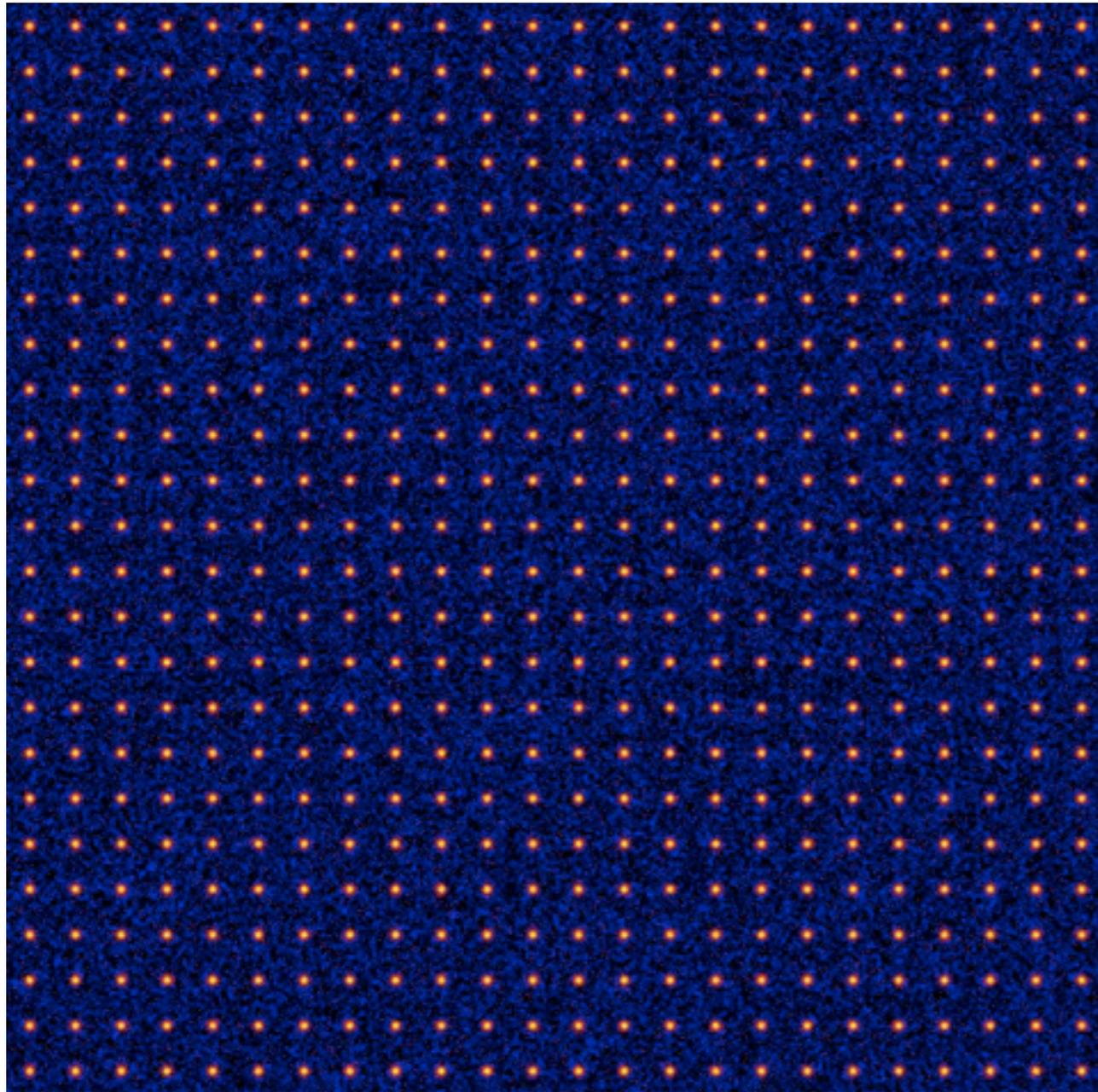
- 銀河団内の銀河 (可視), ガス (X線), ダークマター (重力レンズ) 分布の系統的な調査
- ダークマターが無衝突であれば星の位置と一致
- 星とダークマターのずれの制限から断面積を制限
 $\sigma_{DM}/m < 0.47 \text{ cm}^2/\text{g}$ (95%)
(see also Randall et al. 2008; Bradac et al. 2008; ...)

講義の内容

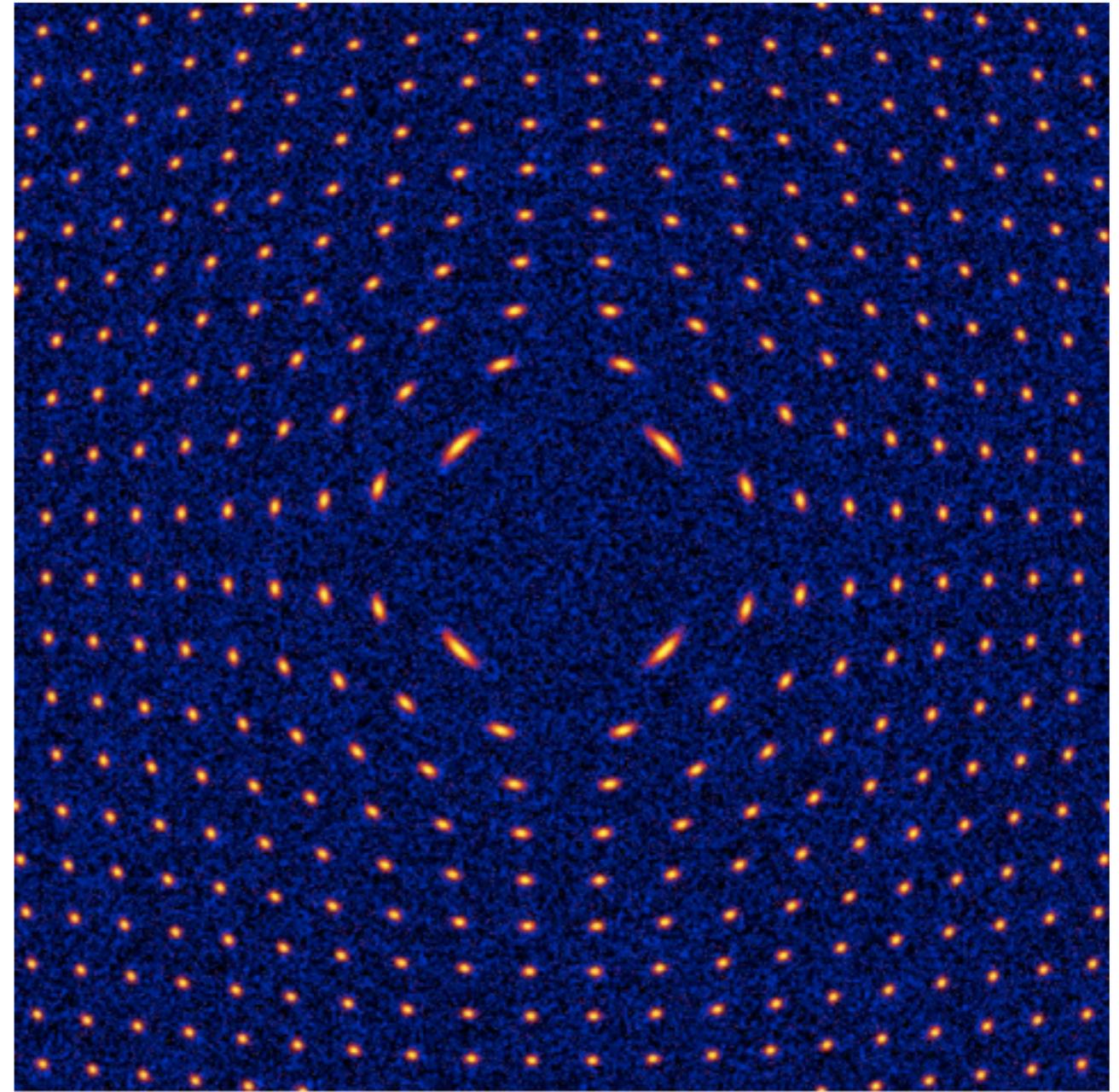
- 重力レンズの基礎 (の復習)
- 弱重力レンズの測定
- ダークマター分布の測定: tangential shear
- ダークマター分布の測定: mass map

simulated by *glafic*

背景銀河への重力レンズ効果



重力レンズなし



中心にレンズ天体

simulated by *glafic*



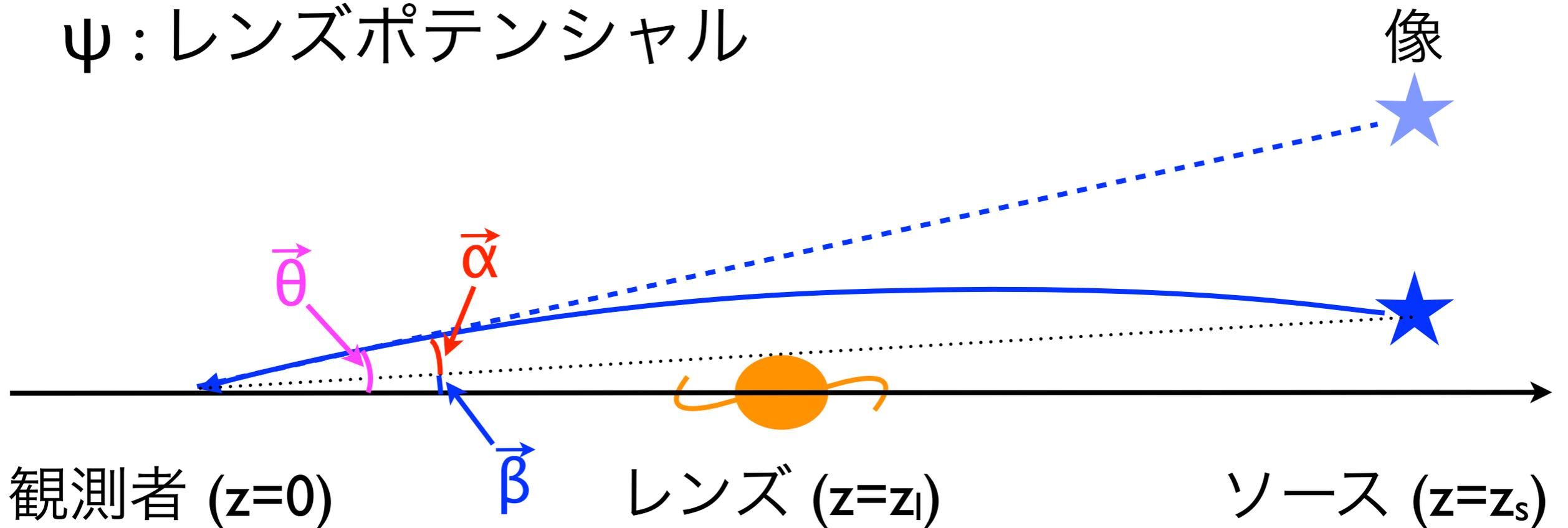
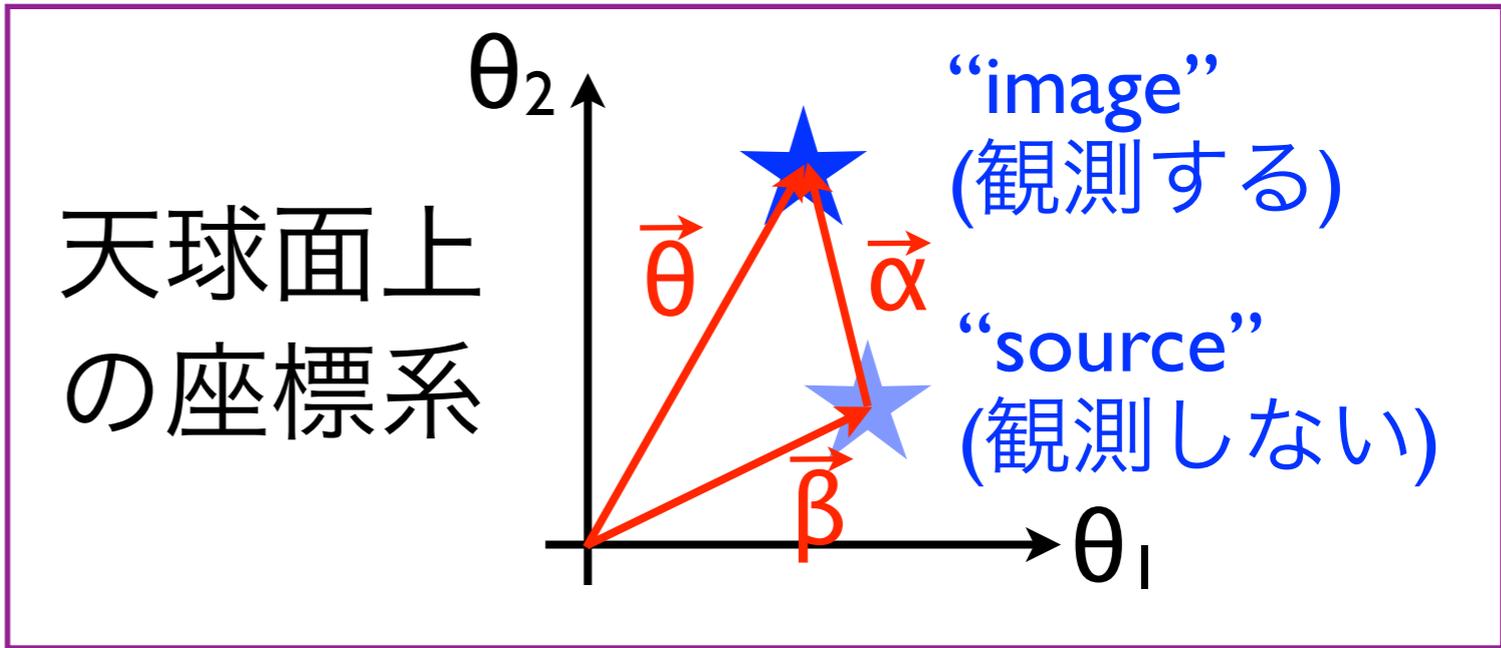
重力レンズ方程式 (測地線方程式)

$$\vec{\beta} = \vec{\theta} - \vec{\alpha}(\vec{\theta})$$

$$\vec{\alpha}(\vec{\theta}) = \vec{\nabla}_{\theta} \psi$$

$\vec{\alpha}$: 曲がり角

ψ : レンズポテンシャル



レンズポテンシャル

- レンズポテンシャルは重力ポテンシャルの視線方向の積分

$$\psi \equiv \frac{2}{c^2} \int_0^{\chi_s} d\chi \frac{f_K(\chi_s - \chi)}{f_K(\chi) f_K(\chi_s)} \phi$$

- レンズポテンシャルのラプラシアン

$$\vec{\nabla}^2 \phi = 4\pi G a^2 \bar{\rho} \delta \quad (\text{ポアソン方程式})$$

密度揺らぎ
 $\delta = \delta\rho/\rho$

$$\rightarrow \vec{\nabla}_\theta^2 \psi = 2 \times \frac{4\pi G}{c^2} \int_0^{\chi_s} d\chi \frac{f_K(\chi_s - \chi)}{f_K(\chi) f_K(\chi_s)} a^2 \bar{\rho} \delta(\chi, \vec{\theta})$$

$\equiv \kappa(\vec{\theta})$ (convergence: 無次元面密度)

ダークマター分布!

質量分布とレンズ方程式の関係

- グリーン関数を使って

$$\psi(\vec{\theta}) = \frac{1}{\pi} \int d\vec{\theta}' \kappa(\vec{\theta}') \ln |\vec{\theta} - \vec{\theta}'|$$

$$\vec{\alpha}(\vec{\theta}) = \frac{1}{\pi} \int d\vec{\theta}' \kappa(\vec{\theta}') \frac{\vec{\theta} - \vec{\theta}'}{|\vec{\theta} - \vec{\theta}'|^2}$$

質量分布

↓ 視線方向
射影

convergence κ

↓ グリーン
関数

lens potential ψ

↓ 微分

曲がり角 $\vec{\alpha}$

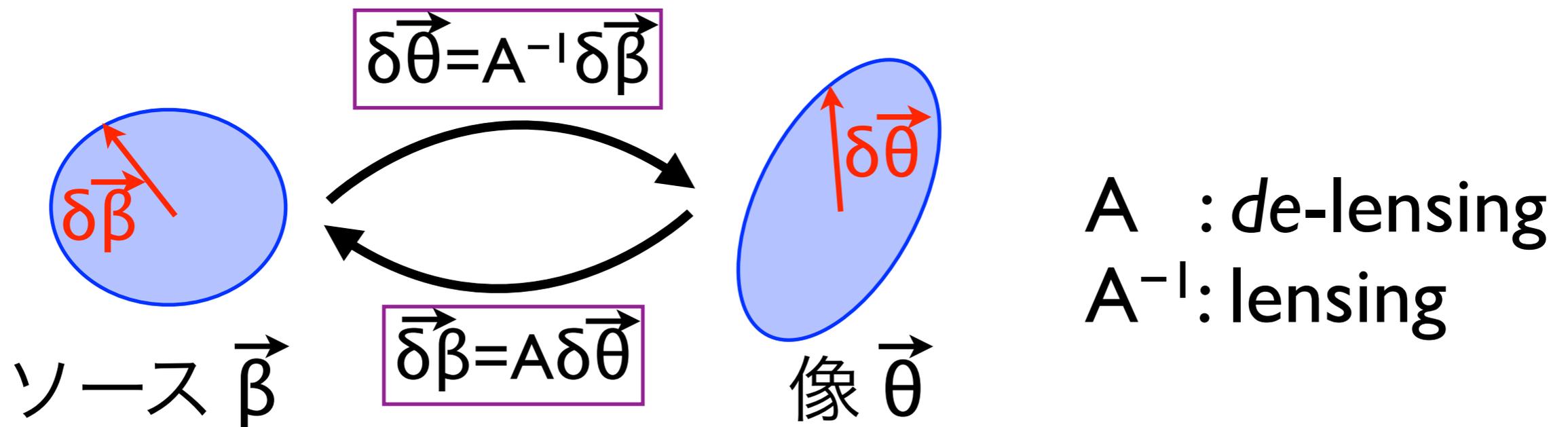
.....

重力レンズ像への影響

- 重力レンズを受けた天体は形状も変化

$$A \equiv \frac{\partial \vec{\beta}}{\partial \vec{\theta}} = \begin{pmatrix} 1 - \psi_{11} & -\psi_{12} \\ -\psi_{12} & 1 - \psi_{22} \end{pmatrix} \quad \begin{array}{l} \psi_{11} = \partial^2 \psi / \partial \theta_1^2 \\ \text{etc.} \end{array}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 - \kappa - \gamma_1 & -\gamma_2 \\ -\gamma_2 & 1 - \kappa + \gamma_1 \end{pmatrix}$$



Convergence and shear

$$A = \begin{pmatrix} 1 - \kappa - \gamma_1 & -\gamma_2 \\ -\gamma_2 & 1 - \kappa + \gamma_1 \end{pmatrix}$$

convergence

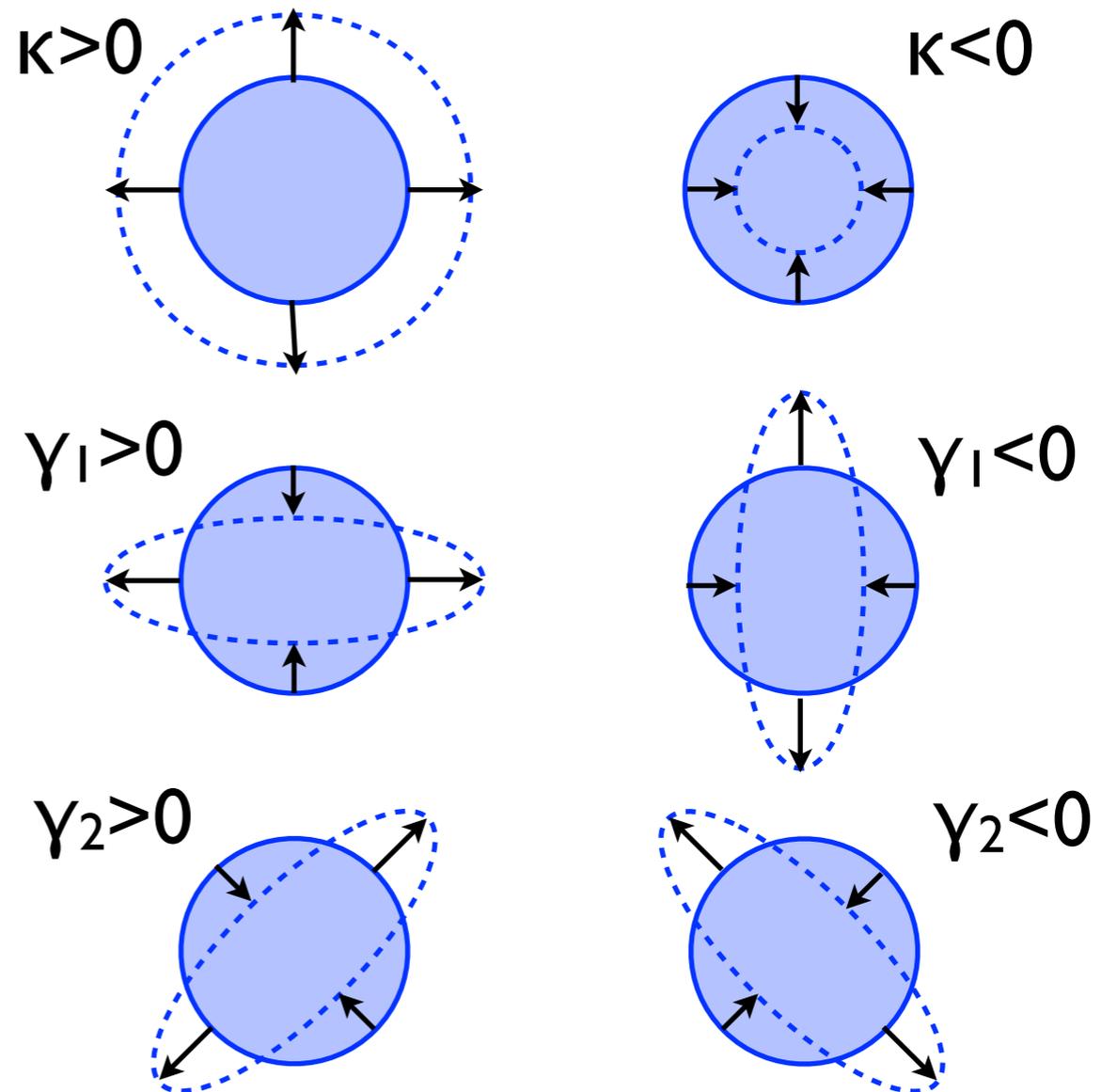
$$\kappa \equiv \frac{1}{2} (\psi_{11} + \psi_{22})$$

shear

$$\gamma_1 \equiv \frac{1}{2} (\psi_{11} - \psi_{22})$$

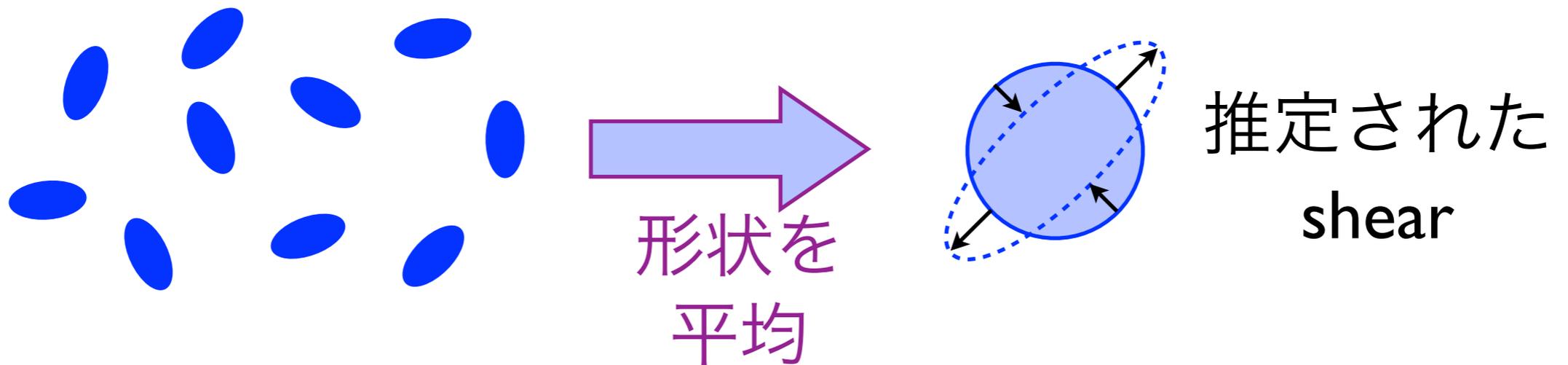
$$\gamma_2 \equiv \psi_{12}$$

source → image (A^{-1})



弱い重力レンズの観測

- 重力レンズで背景銀河は行列 A^{-1} で変形する
- しかし元の銀河の形状を知らないなので個々の銀河に対して重力レンズ効果は測定できない
- 多数の銀河の形状を平均すれば、元の銀河の向きはランダムなので統計的に shear を測定可



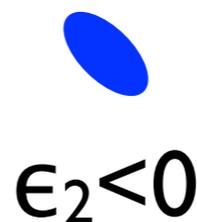
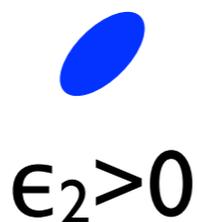
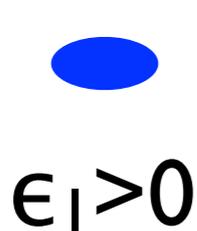
弱重力レンズの測定 (I)

- 二次モーメント Q_{ab} で銀河形状を測定

$$Q_{ab} \equiv \frac{\int d\vec{\theta} I(\vec{\theta}) \theta_a \theta_b}{\int d\vec{\theta} I(\vec{\theta})} \quad I(\vec{\theta}): \text{銀河の輝度分布}$$

- 楕円率を以下の通り定義

$$\epsilon_1 \equiv \frac{Q_{11} - Q_{22}}{Q_{11} + Q_{22}} \quad \epsilon_2 \equiv \frac{2Q_{12}}{Q_{11} + Q_{22}}$$

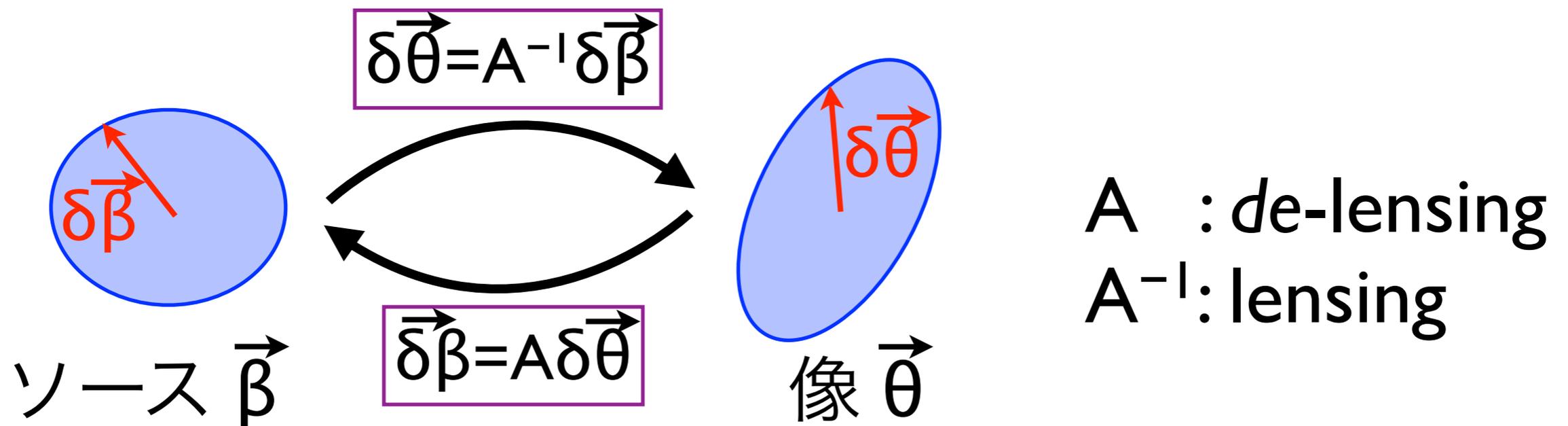


弱重力レンズの測定 (II)

- 重力レンズで形状変化: $Q^{(s)}_{ab} \rightarrow Q_{ab}$

$$Q_{ab}^{(s)} = \frac{\int d\vec{\beta} I^{(s)}(\vec{\beta}) \beta_a \beta_b}{\int d\vec{\beta} I^{(s)}(\vec{\beta})} \approx A_{ac} A_{bd} Q_{cd}$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 - \kappa - \gamma_1 & -\gamma_2 \\ -\gamma_2 & 1 - \kappa + \gamma_1 \end{pmatrix}$$



弱重力レンズの測定 (III)

- したがって

$$\epsilon_1^{(s)} \equiv \frac{Q_{11}^{(s)} - Q_{22}^{(s)}}{Q_{11}^{(s)} + Q_{22}^{(s)}} = \frac{(1 - \kappa)^2 \epsilon_1 - 2(1 - \kappa)\gamma_1 + (\gamma_1^2 - \gamma_2^2)\epsilon_1 + 2\gamma_1\gamma_2\epsilon_2}{(1 - \kappa)^2 + |\gamma|^2 - 2(1 - \kappa)(\gamma_1\epsilon_1 + \gamma_2\epsilon_2)}$$

$$\epsilon_2^{(s)} \equiv \frac{2Q_{12}^{(s)}}{Q_{11}^{(s)} + Q_{22}^{(s)}} = \frac{(1 - \kappa)^2 \epsilon_2 - 2(1 - \kappa)\gamma_2 + (\gamma_2^2 - \gamma_1^2)\epsilon_2 + 2\gamma_1\gamma_2\epsilon_1}{(1 - \kappa)^2 + |\gamma|^2 - 2(1 - \kappa)(\gamma_1\epsilon_1 + \gamma_2\epsilon_2)}$$

弱重力レンズの測定 (IV)

- shear, 楕円率の複素表示を使うと便利

$$\gamma \equiv \gamma_1 + i\gamma_2 \quad \epsilon \equiv \epsilon_1 + i\epsilon_2$$

(γ と ϵ は spin-2 field, つまり ϕ の回転で $\gamma \rightarrow \gamma e^{2i\phi}$)

$$\epsilon^{(s)} = \frac{(1 - \kappa)^2 \epsilon - 2(1 - \kappa)\gamma + \gamma^2 \epsilon^*}{(1 - \kappa)^2 + |\gamma|^2 - 2(1 - \kappa)\text{Re}[\gamma \epsilon^*]}$$



弱重力レンズの測定 (V)

- reduced shear g を定義する

$$g \equiv \frac{\gamma}{1 - \kappa}$$

- すると方程式はさらに簡略化される

$$\epsilon^{(s)} = \frac{\epsilon - 2g + g^2 \epsilon^*}{1 + |g|^2 - 2\text{Re}[g\epsilon^*]}$$

(弱重力レンズは厳密には γ でなく g を測定!)

弱重力レンズの測定 (VI)

- 元々の銀河の向きはランダム $\rightarrow \langle \epsilon^{(s)} \rangle = 0$
+ shear が弱い ($g \ll 1$), $\epsilon \ll 1$

$$\rightarrow \langle \epsilon \rangle = 2g$$

- shear推定の誤差は

$$\sigma_g = \frac{\sigma_\epsilon}{2\sqrt{N_{\text{gal}}}} \quad \begin{array}{l} \sigma_\epsilon \sim 0.4 : \text{銀河の固有楕円率} \\ N_{\text{gal}} : \text{平均した銀河の数} \end{array}$$

銀河団 $g \sim 0.03 \rightarrow$ 十分なS/Nを得るには $N_{\text{gal}} \gtrsim 10^4$

実際の測定 (言うは易く、、、)

- 観測された銀河の形状は望遠鏡の光学系や大気のゆらぎに起因する **Point Spread Function (PSF)** でなまされている
- 星の形状を観測してPSFを見積もり補正する
- バイアスなしで銀河の形状を測定するのは大変だが究極的には画像シミュレーションでチェックすればなんとかなる

ここまでの簡単なまとめ

- 視線方向に積分した質量 (ダークマター) 分布
→ **convergence κ**
- 背景銀河の形状を平均して観測から推定
→ **shear γ (reduced shear g)**
- κ と γ はレンズポテンシャル ψ を介して関係
(ψ の2階微分)

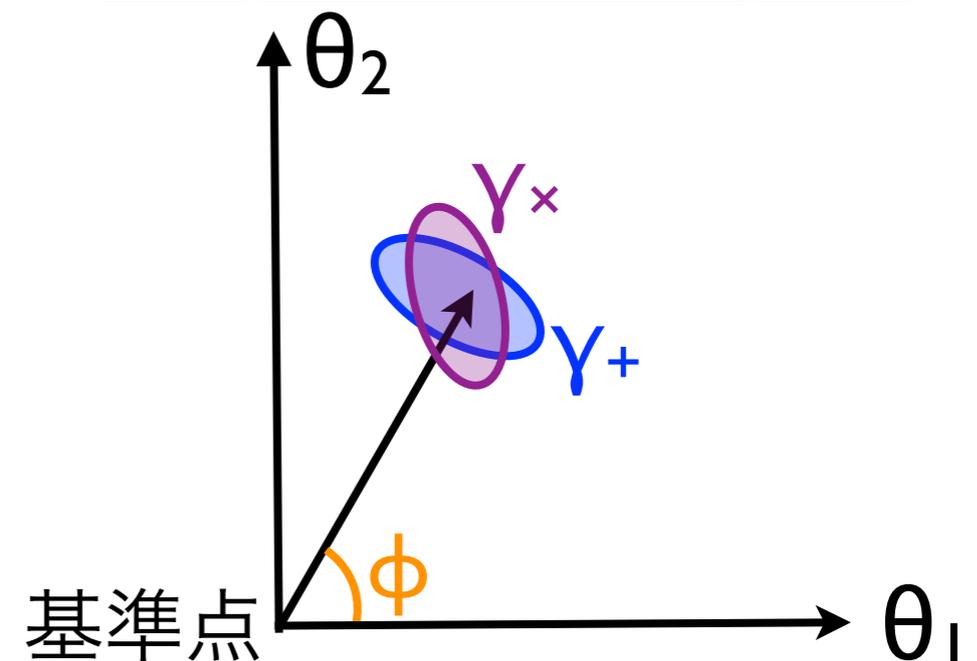
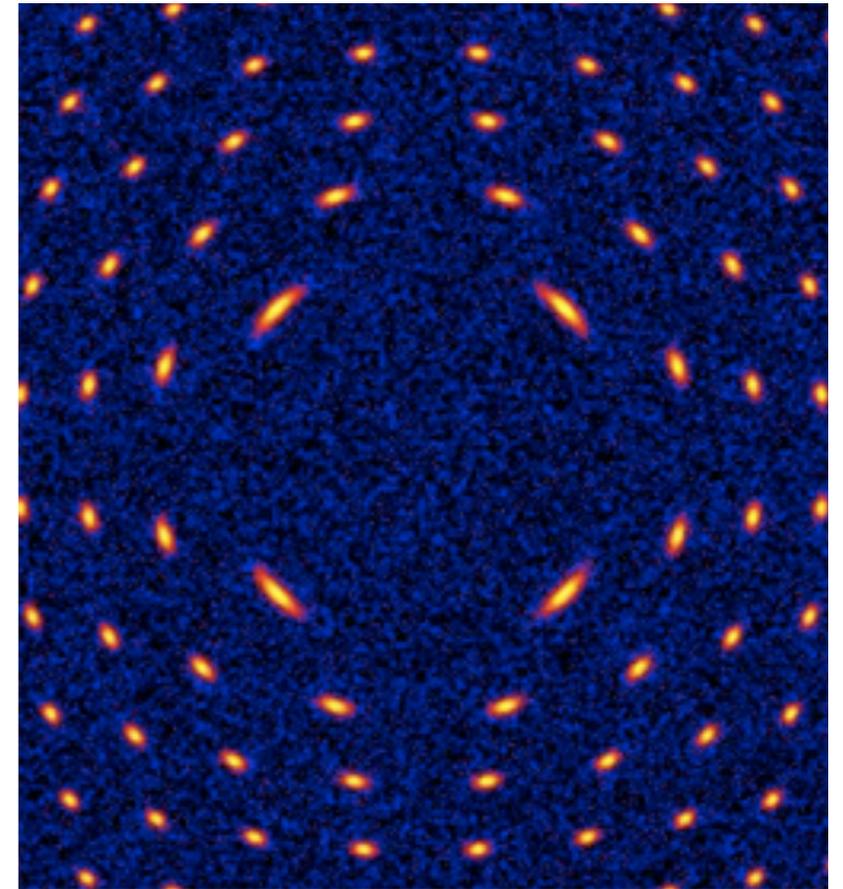
Tangential shear

- 球対称の密度分布は shear は常に tangential 方向のみ
- ある基準点 (銀河団中心) を定義し shear γ_1, γ_2 を変換

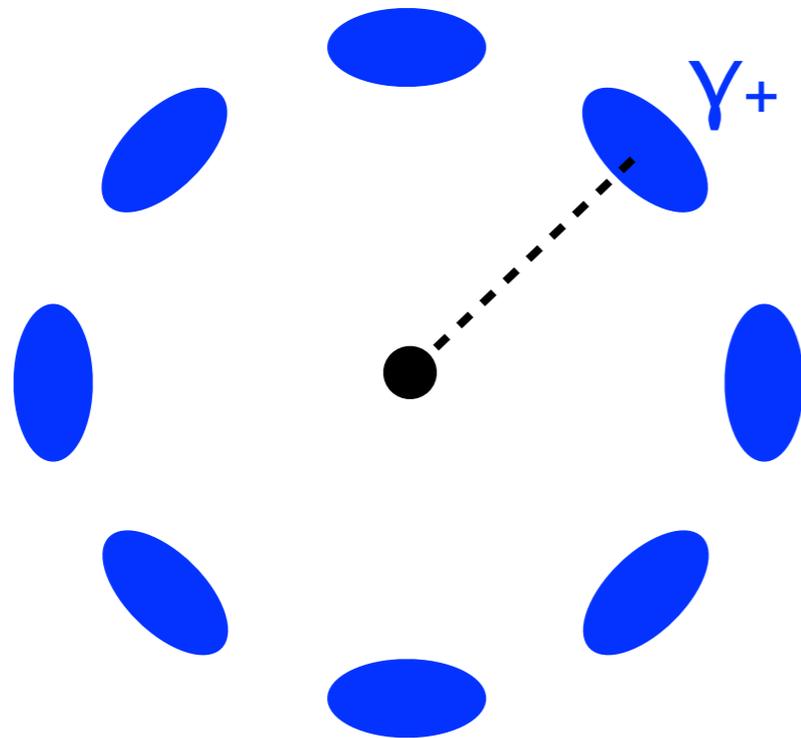
$$\gamma_+ \equiv -\gamma_1 \cos 2\phi - \gamma_2 \sin 2\phi$$

$$\gamma_\times \equiv \gamma_1 \sin 2\phi - \gamma_2 \cos 2\phi$$

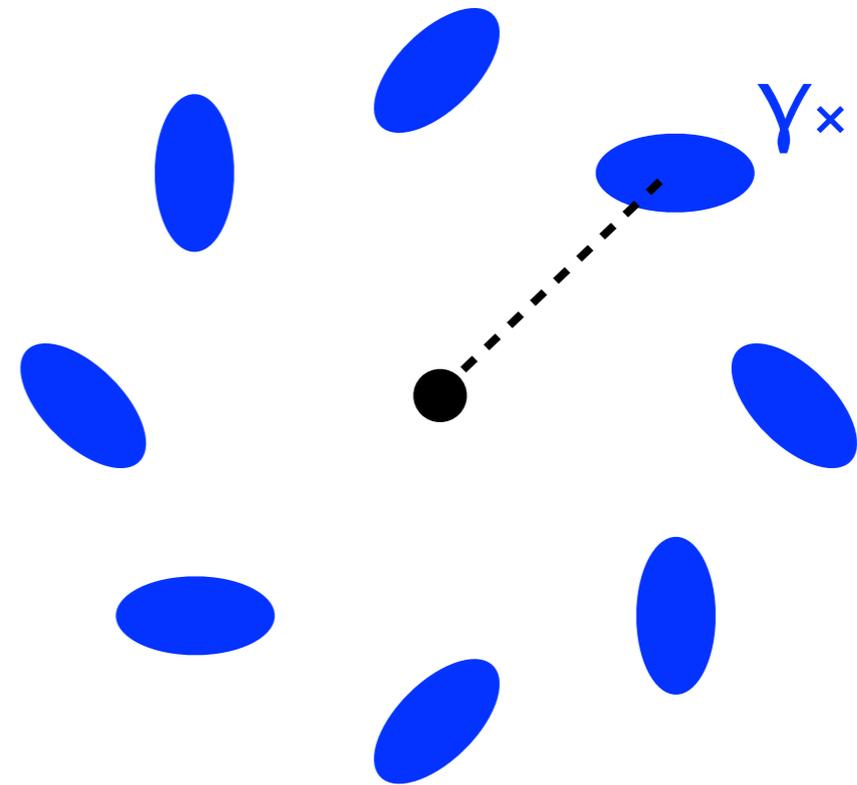
- γ_+ を測定し、モデル計算と比較してダークマター分布を測定 (γ_\times はゼロ)



重力レンズ Eモード/Bモード



Eモード: 重力レンズ
で生成される



Bモード: 重力レンズで
生成されない (小さい)
→ 系統誤差のチェック

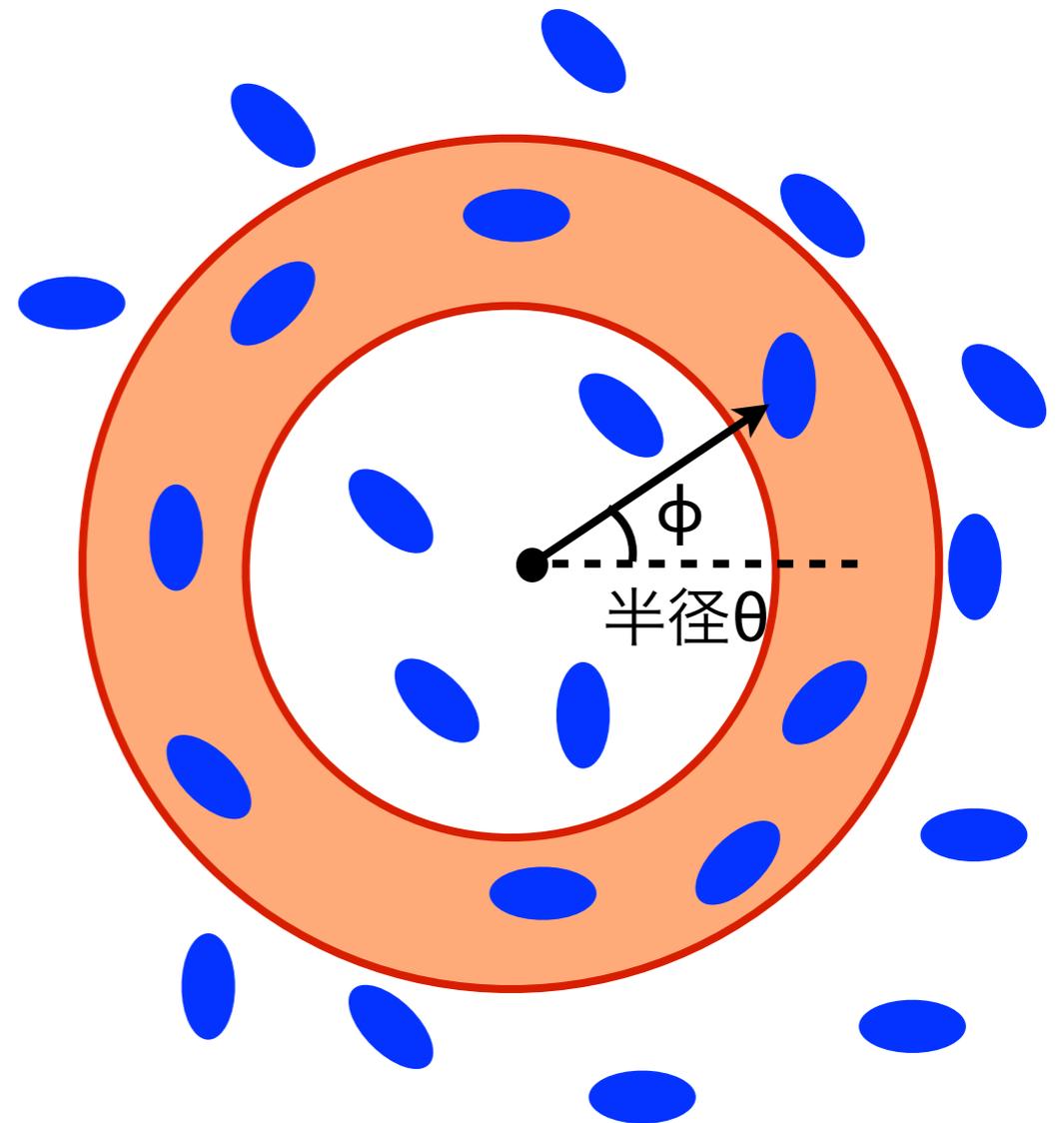
Tangential shear profile

- 半径 θ の円環を定義
- 円環内の tangential shear を円環内の銀河を平均して計算

$$\gamma_+(\theta) = \frac{\sum_i w_i \gamma_{+,i}}{\sum_i w_i}$$

[w_i : ウェイト, 例 $w = 1/(\sigma_{\text{int}}^2 + \sigma_{\text{sta}}^2)$]

- 観測された $\gamma_+(\theta)$ を理論モデルと比較



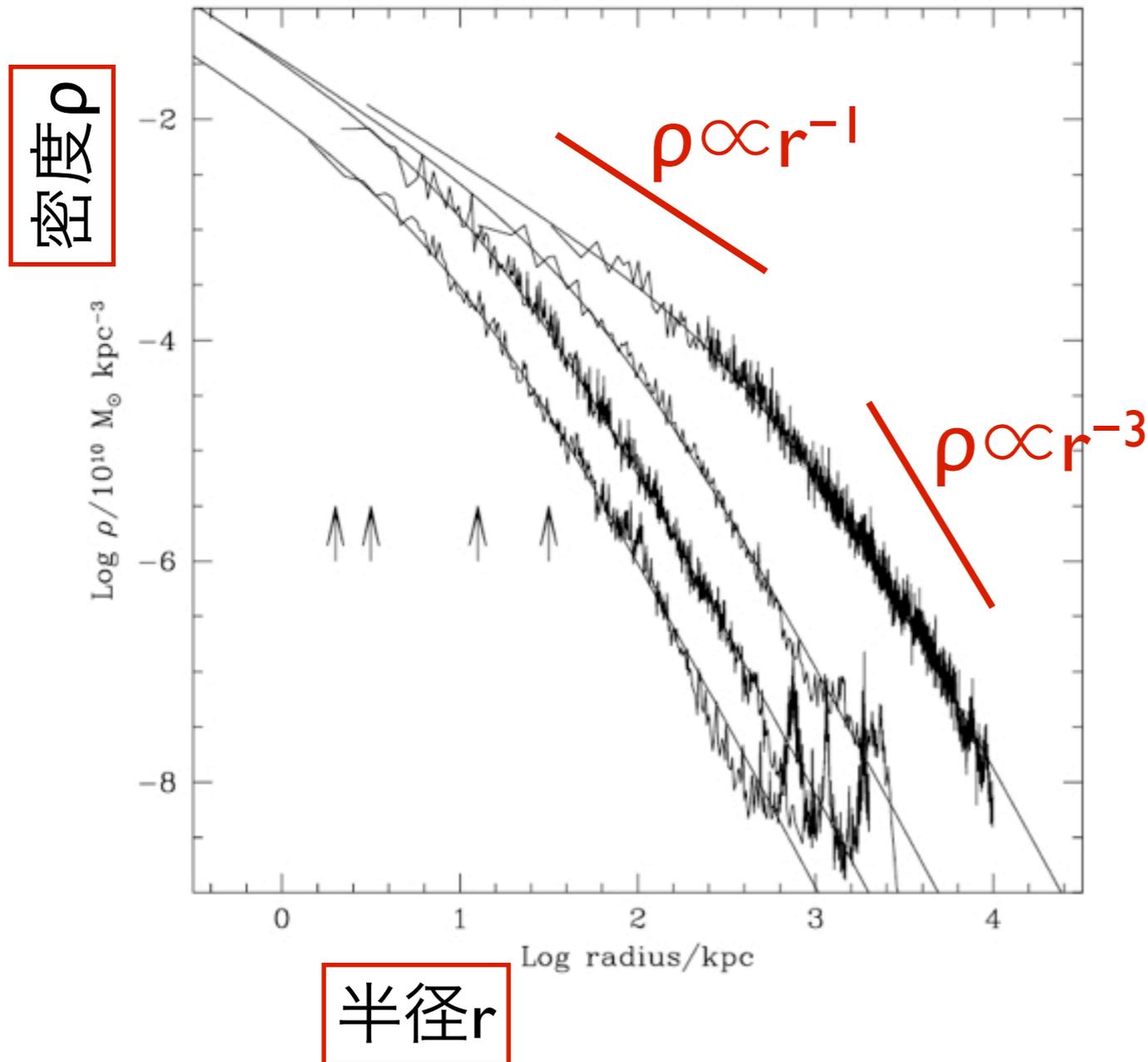
NFW密度プロファイル



- N体計算で得られる冷たい無衝突ダークマターの自己重力系の動径密度分布は普遍的

$$\rho(r) = \frac{\rho_s}{(r/r_s)(1 + r/r_s)^2}$$

- 銀河団重力レンズ解析でもよく使われる



NFW分布の重力レンズ (球対称)

- 密度分布を視線方向に投影 → convergence κ

$$\kappa(r) = \int_{-\infty}^{\infty} dz \frac{\rho(\sqrt{r^2 + z^2})}{\Sigma_{\text{crit}}} = \frac{2\rho_s r_s}{\Sigma_{\text{crit}}} \frac{1}{x^2 - 1} \left(1 - \frac{\arctan \sqrt{x^2 - 1}}{\sqrt{x^2 - 1}} \right)$$

$(x \equiv r/r_s)$

- 球対称での convergence と tangential shear の関係

$$\gamma_+(r) = \frac{2}{r^2} \int_0^r dr' r' \kappa(r') - \kappa(r) = \bar{\kappa}(< r) - \kappa(r)$$

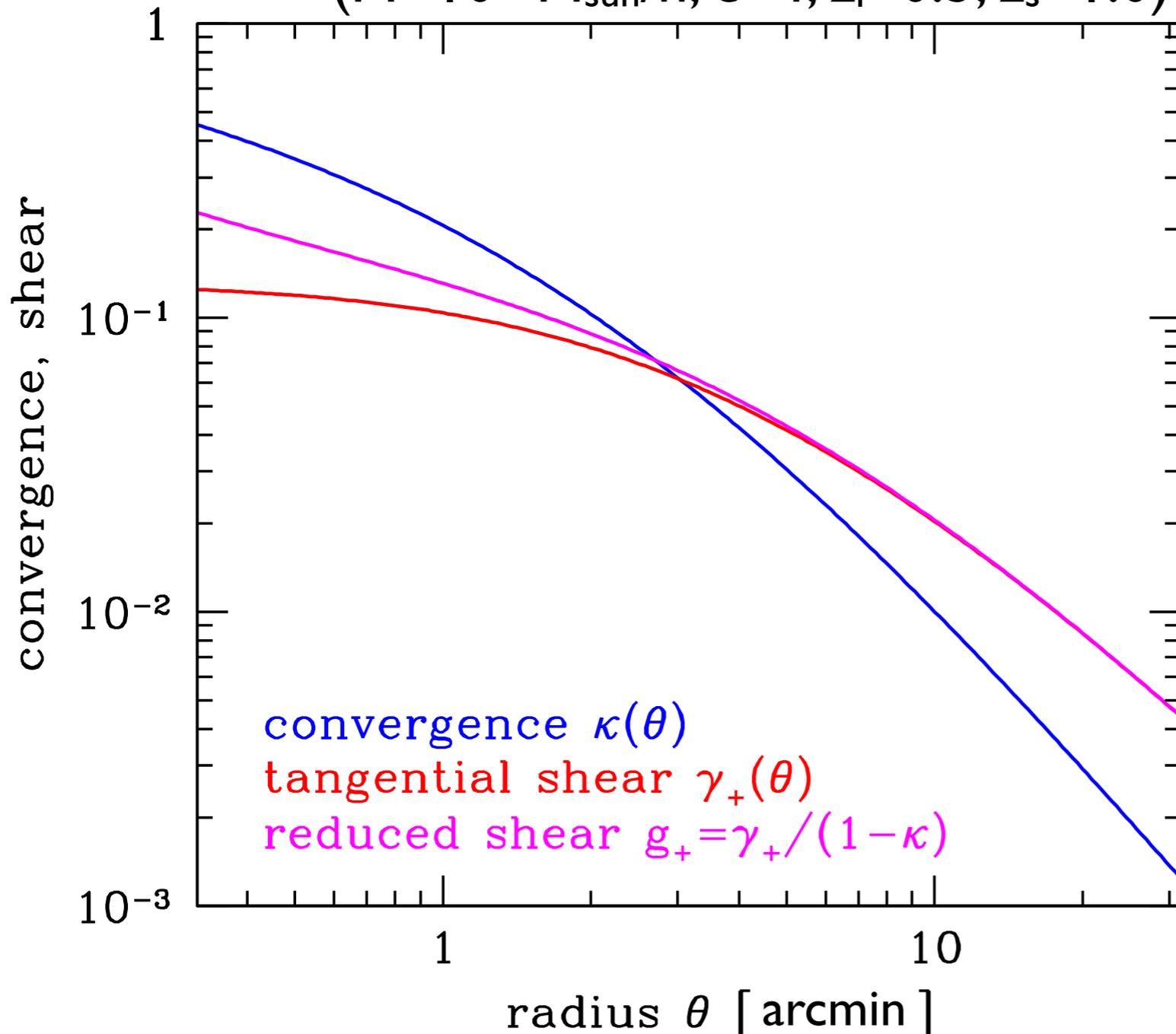
shearは密度分布のnon-localな情報を持つ！

- NFW分布の場合

$$\gamma_+(r) = \frac{4\rho_s r_s}{\Sigma_{\text{crit}}} \frac{1}{x^2} \left(\frac{\arctan \sqrt{x^2 - 1}}{\sqrt{x^2 - 1}} + \ln \frac{x}{2} \right) - \kappa(r)$$

NFW分布の重力レンズ (球対称)

($M=10^{15}M_{\text{sun}}/h$, $c=4$, $z_l=0.3$, $z_s=1.0$)



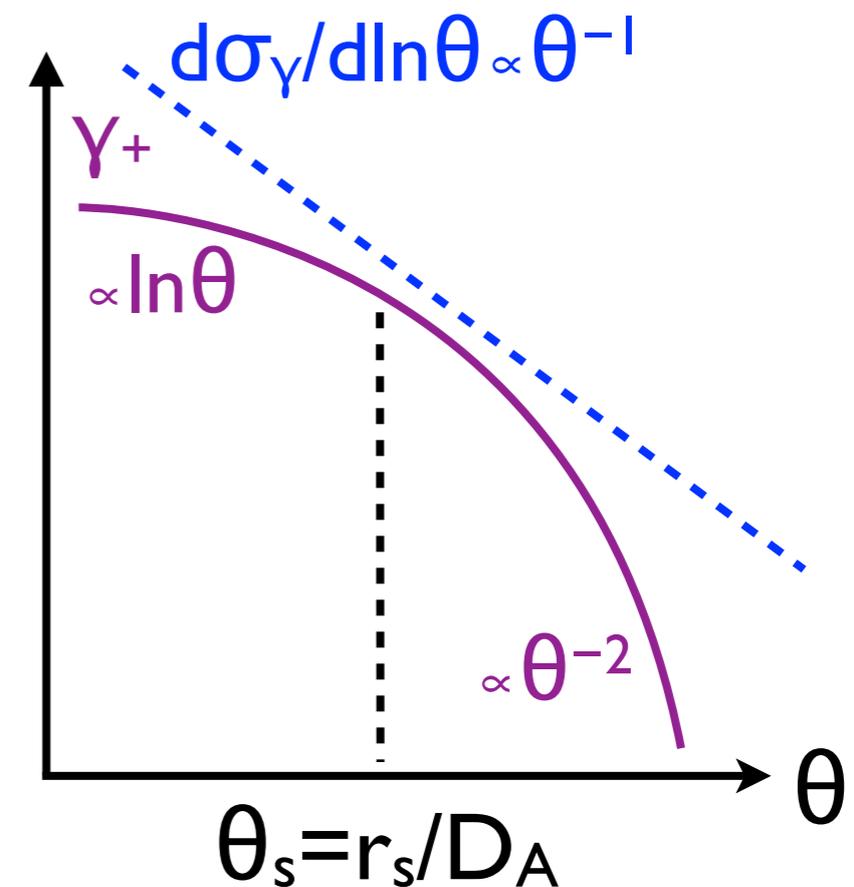
- γ_+ は興味のある範囲で典型的に $\sim 0.01-0.1$
- γ_+ と g_+ は外側で一致

Tangential shear profile の S/N

- 半径のbinを対数でとったとして固有楕円率由来の誤差は

$$\frac{d\sigma_\gamma}{d\ln\theta} \propto \frac{1}{\sqrt{A_{\text{bin}}}} \propto \frac{1}{\theta}$$

- 一方NFW分布の γ_+ (g_+) は中心で緩やかになる
→ $r=r_s$ 付近の質量分布が主にS/Nを決める



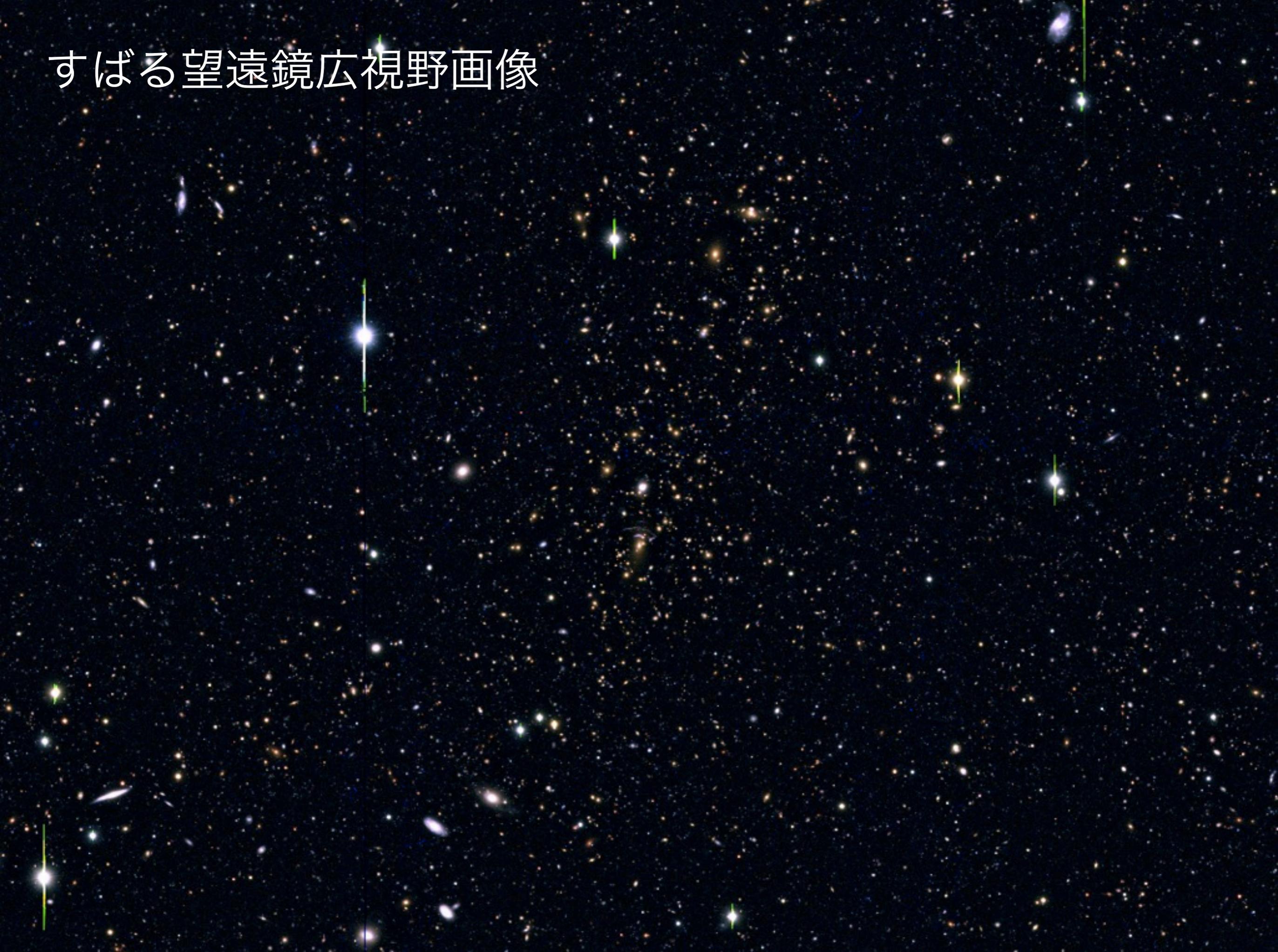
解析の例

- **SDSSJ1138+2754**
Sloan Giant Arcs
Survey (SGAS) で
見つかった強い
重力レンズを示す
銀河団 ($z=0.45$)
- すばるSuprime-cam
画像を用いて弱
重力レンズ解析

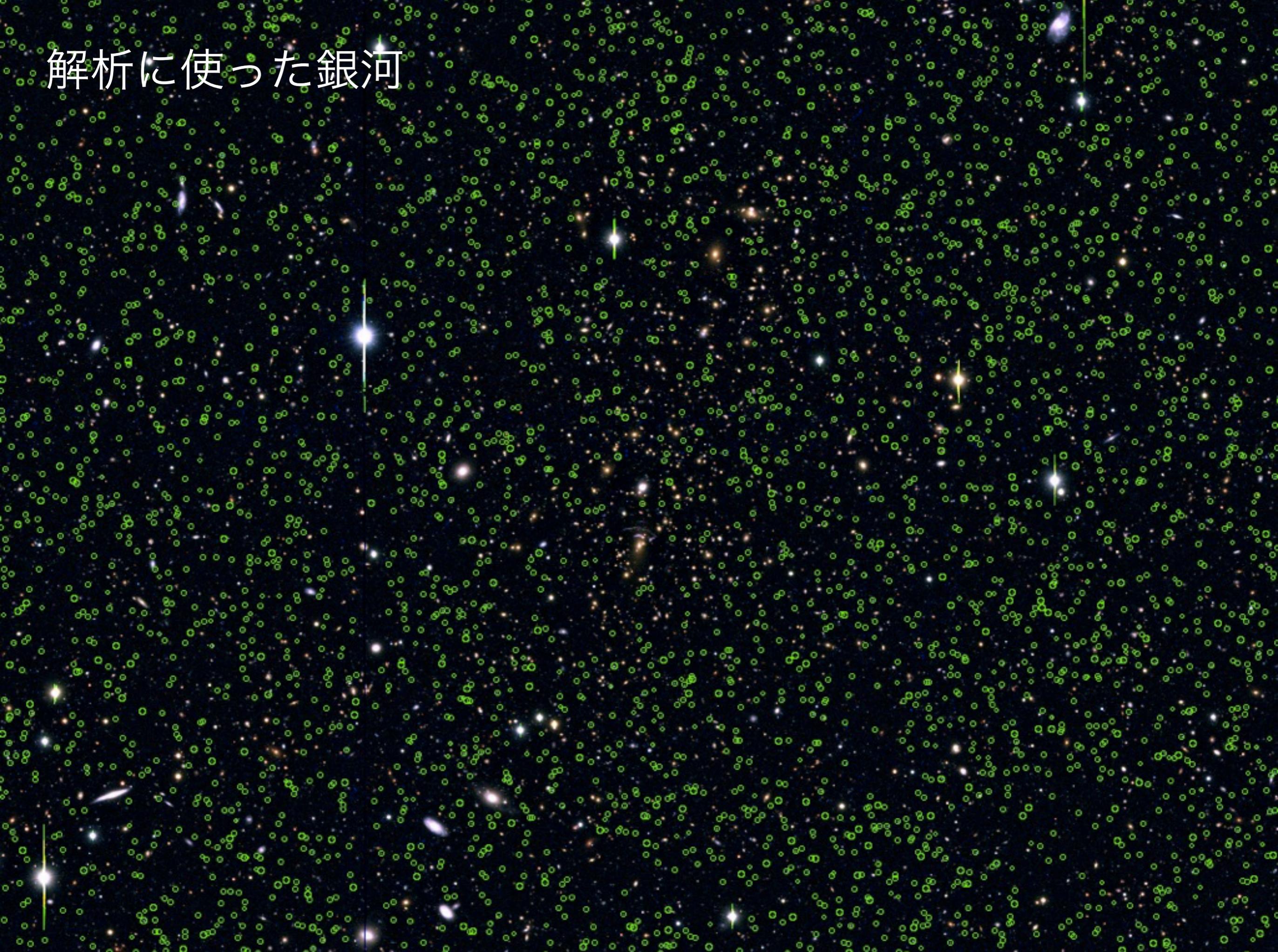


Subaru/Suprime-cam gri-band

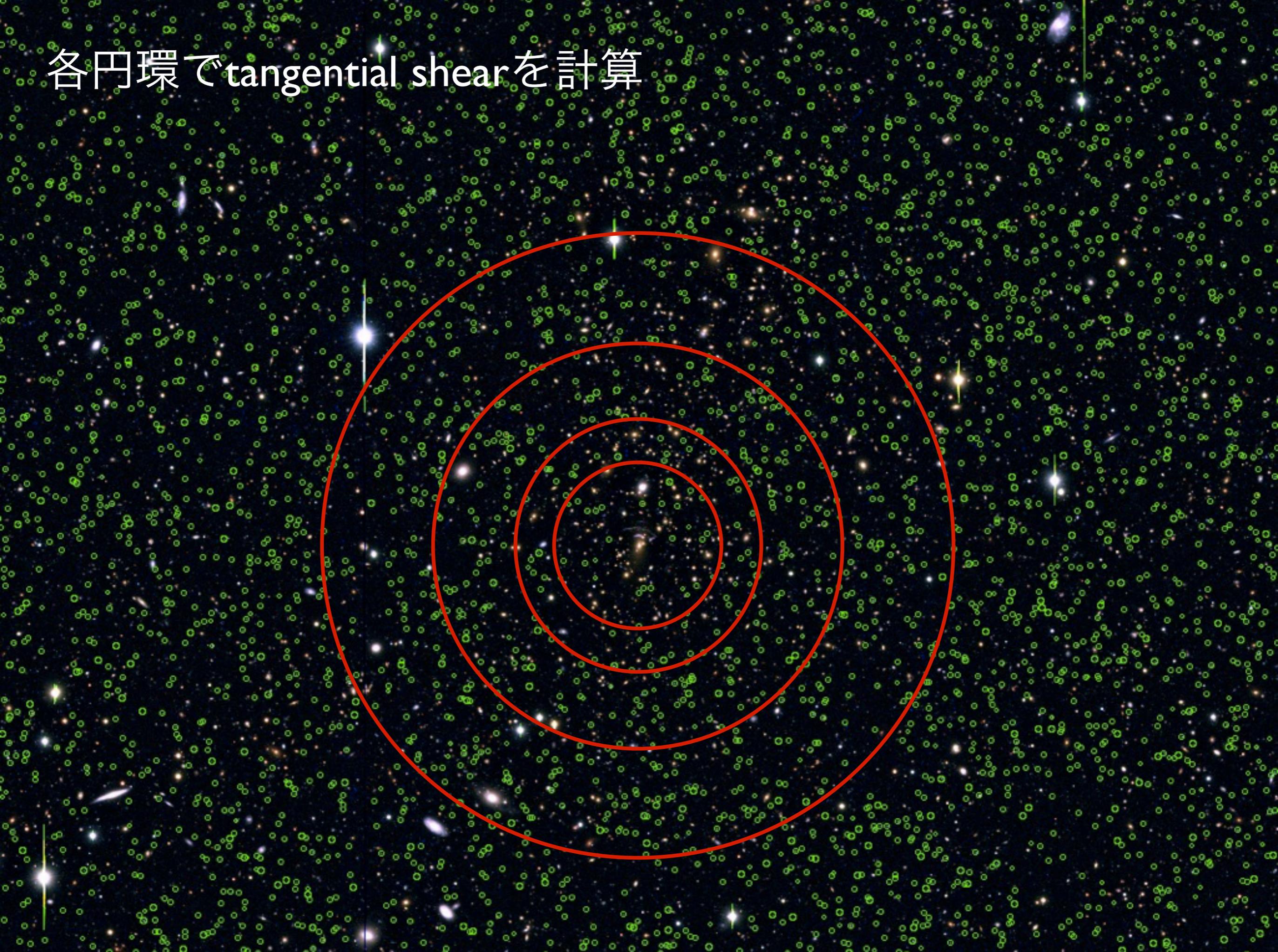
すばる望遠鏡広視野画像



解析に使った銀河

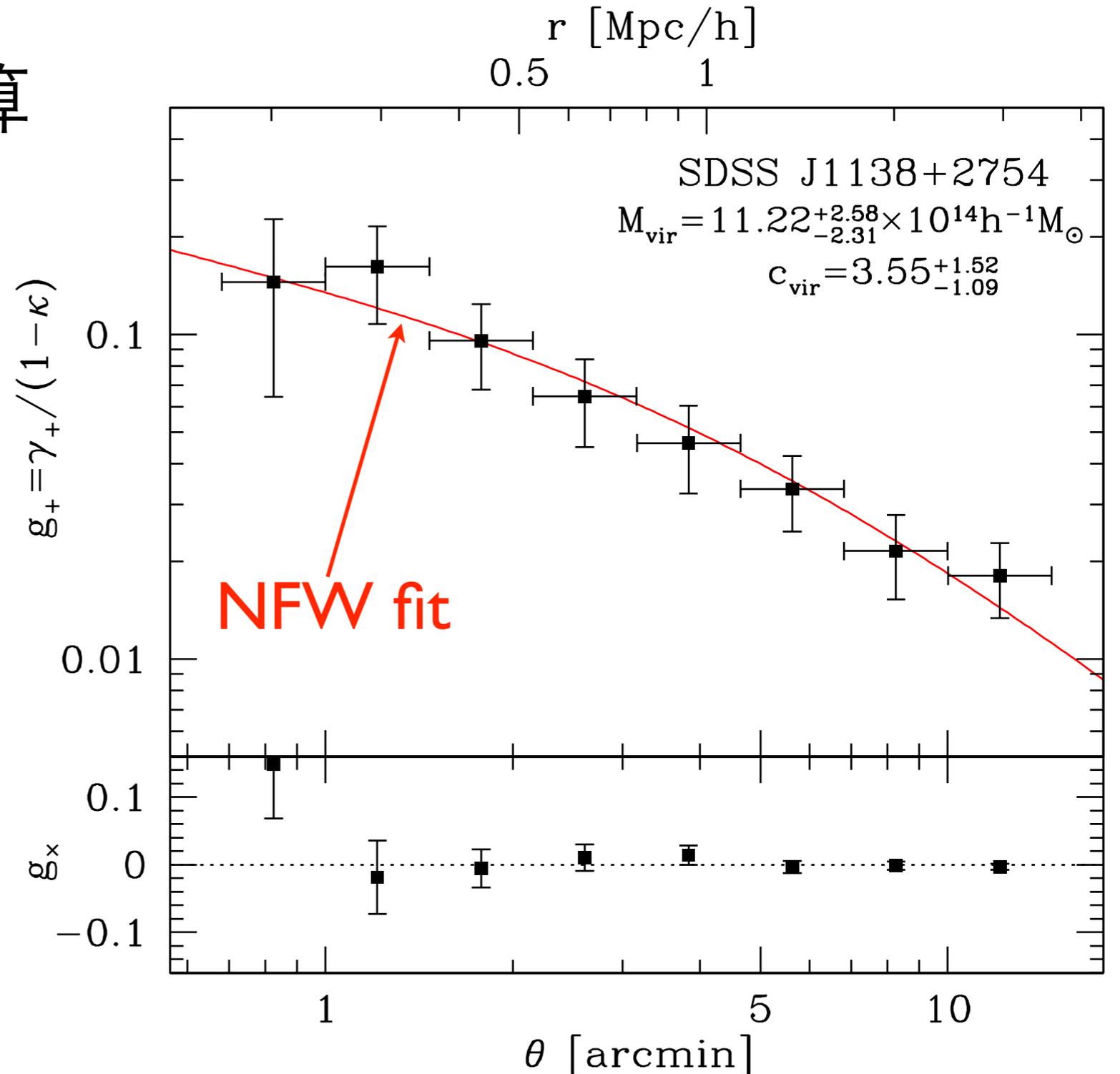


各円環でtangential shearを計算



観測された tangential shear 分布

- NFW分布から計算された g_+ とよく一致
- g_x は期待どおりほぼゼロ
- NFW fitの結果
銀河団の質量は $M \sim 10^{15} M_{\text{sun}}/h$ とかなり重いことが判明



ダークマター分布: mass map

- tangential shear 解析では質量密度分布の中心や分布の関数形をあらかじめ仮定
- 仮定をおかず直接密度分布を再構築することも可能 (shear \rightarrow convergence)

(Kaiser & Squires 1993)



質量密度分布の再構築 (I)

- 復習: 密度分布 κ とレンズポテンシャル ψ の関係

$$\psi(\vec{\theta}) = \frac{1}{\pi} \int d\vec{\theta}' \kappa(\vec{\theta}') \ln |\vec{\theta} - \vec{\theta}'|$$

- ψ の2階微分が shear γ なので

$$\gamma(\vec{\theta}) = \frac{1}{\pi} \int d\vec{\theta}' \kappa(\vec{\theta}') D(\vec{\theta} - \vec{\theta}')$$

$$D(\vec{\theta}) \equiv \frac{\theta_2^2 - \theta_1^2 - 2i\theta_1\theta_2}{|\vec{\theta}|^4}$$

shearは密度分布
の non-local な
情報を持つ！

質量密度分布の再構築 (II)

- 畳み込み → フーリエ空間では積

$$\hat{\gamma}(\vec{\ell}) = \frac{1}{\pi} \hat{\kappa}(\vec{\ell}) \hat{D}(\vec{\ell})$$

$$\hat{D}(\vec{\ell}) = \pi \frac{\ell_1^2 - \ell_2^2 + 2i\ell_1\ell_2}{|\vec{\ell}|^2} = \frac{\pi^2}{\hat{D}^*(\vec{\ell})}$$

$$\rightarrow \kappa(\vec{\theta}) - \kappa_0 = \frac{1}{\pi} \int d\vec{\theta}' \gamma(\vec{\theta}') D^*(\vec{\theta} - \vec{\theta}')$$

定数

→ γ に影響せず
(mass-sheet 縮退)

$$D^*(\vec{\theta}) \equiv \frac{\theta_2^2 - \theta_1^2 + 2i\theta_1\theta_2}{|\vec{\theta}|^4}$$

質量密度分布の再構築 (III)

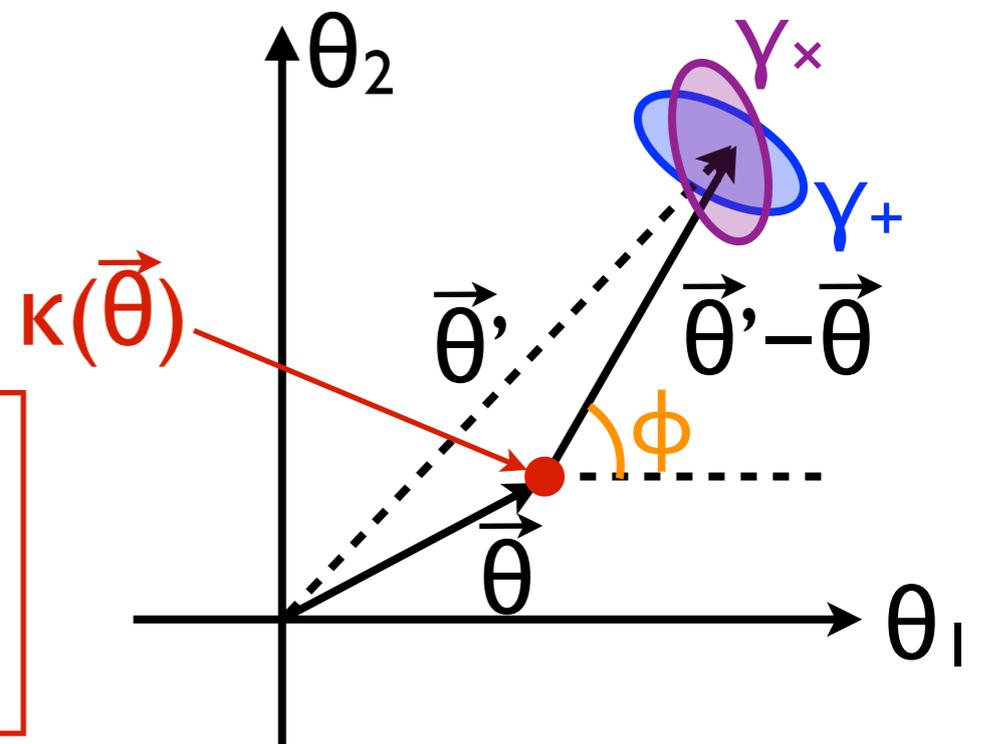
- わかりやすくするためちよっと書き換える

$$\kappa(\vec{\theta}) - \kappa_0 = \underbrace{\frac{1}{\pi} \int d\vec{\theta}' \frac{\gamma_+(\vec{\theta}'; \vec{\theta})}{|\vec{\theta} - \vec{\theta}'|^2}}_{\text{Eモード (real)}} + i \underbrace{\frac{1}{\pi} \int d\vec{\theta}' \frac{\gamma_\times(\vec{\theta}'; \vec{\theta})}{|\vec{\theta} - \vec{\theta}'|^2}}_{\text{Bモード (ゼロになる)}}$$

$$\gamma_+(\vec{\theta}'; \vec{\theta}) \equiv -\gamma_1 \cos 2\phi - \gamma_2 \sin 2\phi$$

$$\gamma_\times(\vec{\theta}'; \vec{\theta}) \equiv \gamma_1 \sin 2\phi - \gamma_2 \cos 2\phi$$

ある点 $\vec{\theta}$ の convergence $\kappa(\vec{\theta})$
 → その周りの γ_+ を足し上げる



質量密度分布の再構築 (IV)

- 現実にはフィルター (smoothing) が必要 (小スケールのノイズの寄与が発散)

$$\tilde{\kappa}(\vec{\theta}) = \int d\vec{\theta}' \kappa(\vec{\theta}') U(|\vec{\theta}' - \vec{\theta}|)$$

- フィルターを考慮した質量再構築 (Schneider 1996)

$$\tilde{\kappa}(\vec{\theta}) = \int d\vec{\theta}' \gamma_+(\vec{\theta}'; \vec{\theta}) Q(|\vec{\theta}' - \vec{\theta}|)$$

$$Q(\theta) = \frac{2}{\theta^2} \int_0^\theta d\theta' \theta' U(\theta') - U(\theta)$$

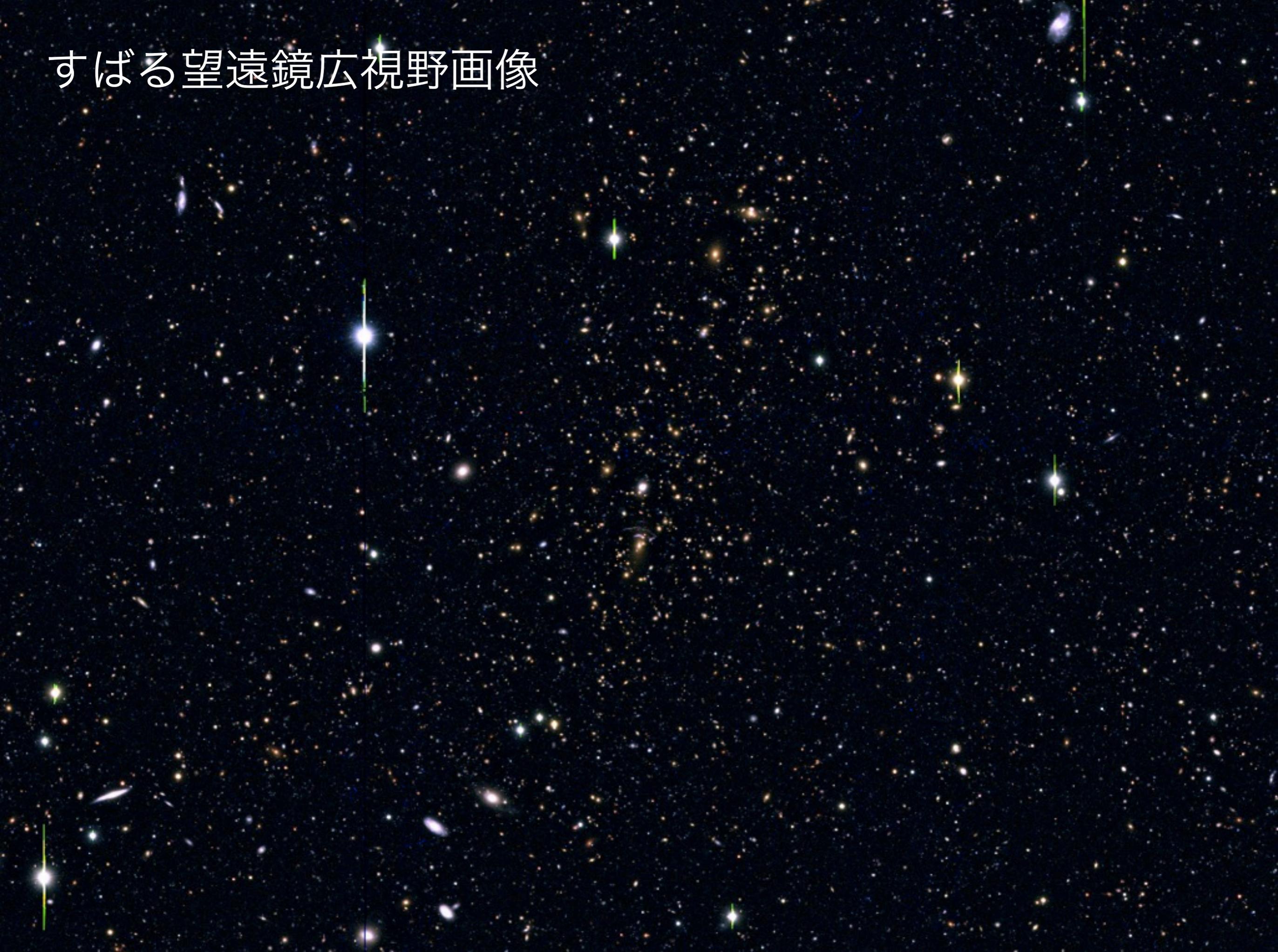
解析の例

- **SDSSJ1138+2754**
Sloan Giant Arcs
Survey (SGAS) で
見つかった強い
重力レンズを示す
銀河団 ($z=0.45$)
- すばるSuprime-cam
画像を用いて弱
重力レンズ解析

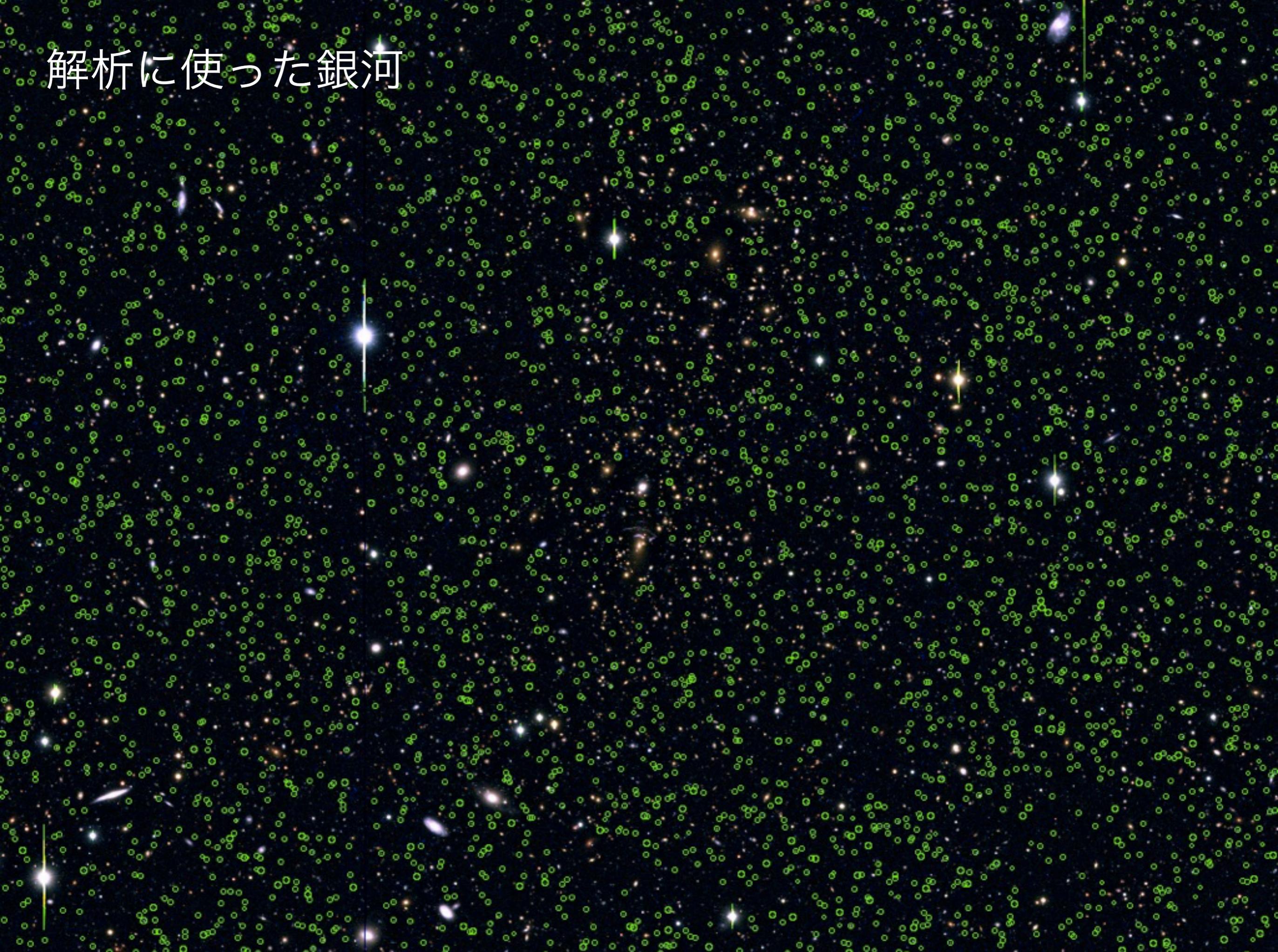


Subaru/Suprime-cam gri-band

すばる望遠鏡広視野画像



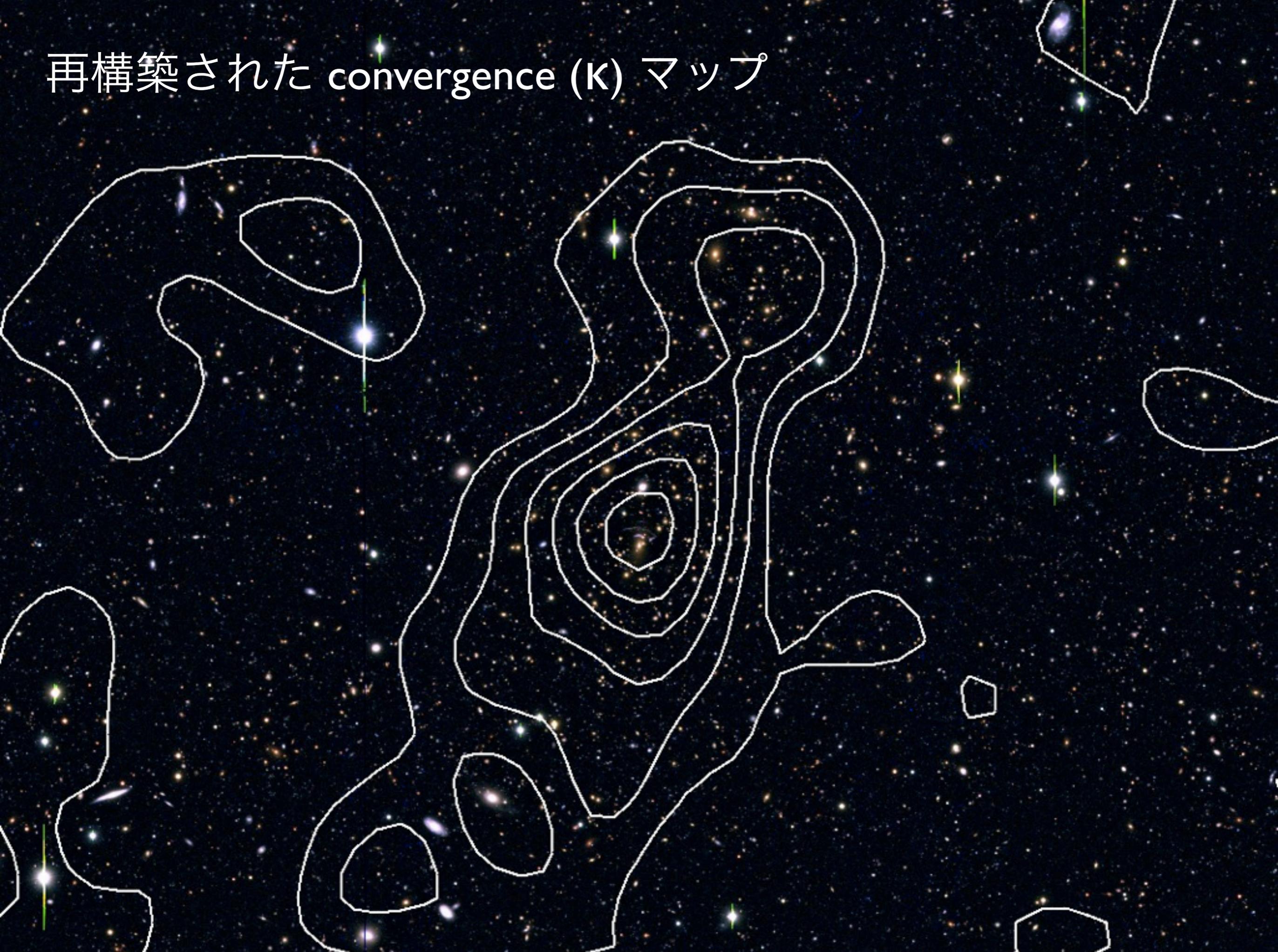
解析に使った銀河



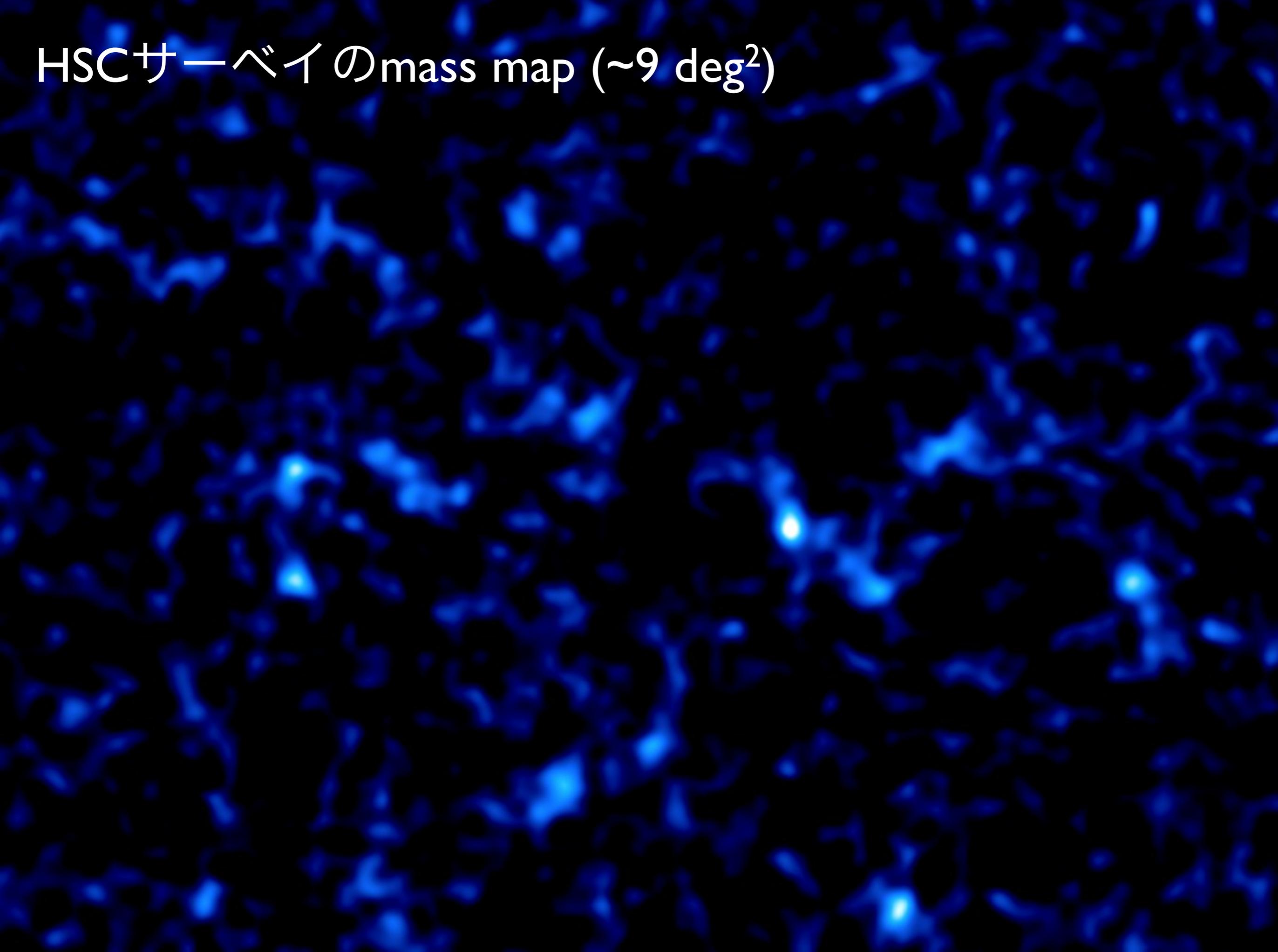
観測された shear (γ) マップ



再構築された convergence (K) マップ



HSCサーベイのmass map ($\sim 9 \text{ deg}^2$)



まとめ

- 銀河の形状を平均して shear γ を観測
- 観測量 shear γ と質量分布 convergence κ はレンズポテンシャル ψ を介して互いに関係 (γ は質量分布の non-local な情報をもつ)
- ある点のまわりの tangential shear γ_+ が重要な情報を持つ
- tangential shear profile と mass map を用いた銀河団ダークマター分布の測定を紹介した