QCD for Collider Physics I

1

2005. 4. 14

LHC実験解析のためにQCDの基礎知識が不可欠であることを、まず感じていただきたいと思い、次のDØ論文を紹介します。

Measurement of the top quark mass in all-jet events

DØ Collaboration

Abstract

We describe a measurement of the mass of the top quark from the purely hadronic decay modes of $t\bar{t}$ pairs using all-jet data produced in $p\bar{p}$ collisions at $\sqrt{s} = 1.8$ TeV at the Fermilab Tevatron Collider. The data, which correspond to an integrated luminosity of $110.2 \pm 5.8\ \mathrm{pb}^{-1}$, were collected with the DØ detector from 1992 to 1996. We find a top quark mass of $178.5 \pm 13.7(\mathrm{stat}) \pm 7.7(\mathrm{syst})\ \mathrm{GeV}/c^2$.

PACS: 12.38.-t; 14.65.Ha

Phys. Lett. B606, 25 (2005)

Keywords: Top quark

Tevatron Run I ($\sqrt{s} = 1.8$ TeV, $L = 110\ pb^{-1}$) で

$$p\bar{p} \to t\ \bar{t}\ X$$
$$t \to bW^+,\ W^+ \to jj;\quad \bar{t} \to \bar{b}W^-,\ W^- \to jj$$

のシグナルを ≧6 jet events 中で求め、m_t を測定した論文です。

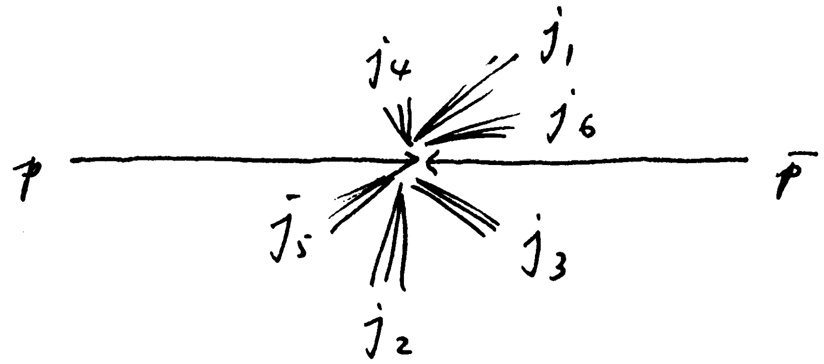
$$m_t = \underbrace{178.5}_{\text{中心値}} \pm 13.7 \pm \underbrace{7.7}_{sys}\ \mathrm{GeV}$$

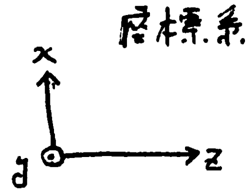
が答えですが、「中心値」と「統計エラー」が信頼できるか？が第一の問題です。

次に、Tevatronの経験をLHCに外挿するときに、QCDの基礎が必要であることを見たいと思います。

このDØの論文は、次回までに全員が読んで下さい。10回の講義が終わるころにもう一度読んで、自分で考えていただきたいと思います。

DØ論文はまずジェットの定義から始まります。





ハドロンの $\vec{p}$ 分布から出発して、同じ「向き」の momentum を足してハドロンのクラスター（ジェット）を作るのですが、「向きの近さ」を

$$R=\sqrt{(\Delta\eta)^2+(\Delta\phi)^2}$$

で定義し、$R<0.3$ のペアは全て一クラスターにします。

ϕ は azimuthal 角、η は pseudo-rapidity です。

2005. 4. 14

[Lorentz boost と rapidity]

$$p^\mu = (E, p_x, p_y, p_z), \qquad p_T = \sqrt{p_x^2 + p_y^2}, \qquad p^2 = E^2 - |\vec{p}|^2 = m^2$$

に対し. rapidity は $\quad y = \frac{1}{2} \ln \frac{E + p_z}{E - p_z}$

z 方向の boost $\quad \begin{pmatrix} E' \\ p_z' \end{pmatrix} = \gamma \begin{pmatrix} 1 & \beta \\ \beta & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E \\ p_z \end{pmatrix} = \gamma \begin{pmatrix} E + \beta p_z \\ \beta E + p_z \end{pmatrix}$

のもとで

$$\begin{aligned} y \to y' &= \frac{1}{2} \ln \frac{E' + p_z'}{E' - p_z'} = \frac{1}{2} \ln \frac{(1+\beta)(E + p_z)}{(1-\beta)(E - p_z)} \\ &= \frac{1}{2} \ln \frac{E + p_z}{E - p_z} + \frac{1}{2} \ln \frac{1+\beta}{1-\beta} \\ &= y + \Delta \end{aligned}$$

boost は y の平行移動になります.

$$\Delta y = y_1 - y_2$$

は boost 不変量です. 覚えておくと良い式

$$\begin{cases} E = \sqrt{m^2 + p_T^2} \cosh y \\ p_z = \sqrt{m^2 + p_T^2} \sinh y \end{cases}$$

$$\Rightarrow E^2 - p_z^2 = (m^2 + p_T^2)(\cosh^2 y - \sinh^2 y) = m^2 + p_T^2$$

$m = 0$ のとき. $\quad y = \frac{1}{2} \ln \frac{1 + \cos\theta}{1 - \cos\theta} = \frac{1}{2} \ln \frac{\cos^2 \frac{\theta}{2}}{\sin^2 \frac{\theta}{2}} = -\ln \tan \frac{\theta}{2}$

$m \neq 0$ のとき、 $\quad \eta = \frac{1}{2} \ln \frac{1 + \cos\theta}{1 - \cos\theta} = -\ln \tan \frac{\theta}{2}$ を pseudo-rapidity と呼びます.

任意のハドロン又はクラスター $\vec{p}$ の組み $\underbrace{}_{}$ $\{\vec{p}_i \text{ と } \vec{p}_j\}$ について

$$R_{ij} = \sqrt{(\eta_i - \eta_j)^2 + (\phi_i - \phi_j)^2} < R = 0.3$$

ならば $\vec{p}_i + \vec{p}_j = \vec{p}_{ij}$ として 全ての R_{ij} が $R_{ij} \geqq R$ となるまで続けると、クラスターとクラスターの向きが最低でも $R\ (=0.3)$ だけ離したクラスターのセットができます。このときできたクラスターの momentum が

$$\begin{cases} E_T = \sqrt{m^2 + p_T^2} > 10\,\mathrm{GeV} \\ |\eta| < 2.5 \end{cases}$$

を満たすものを、ジェットと呼びます。DØ は

$$\geqq 6 \text{ ジェット事象} \quad 165,377 \text{ コ} \quad \left(\frac{S}{N} \sim \frac{1}{1000}\right)$$

次に、少なくとも 1 ジェットが $(b \to \mu)$ シグナルをもつことを要求

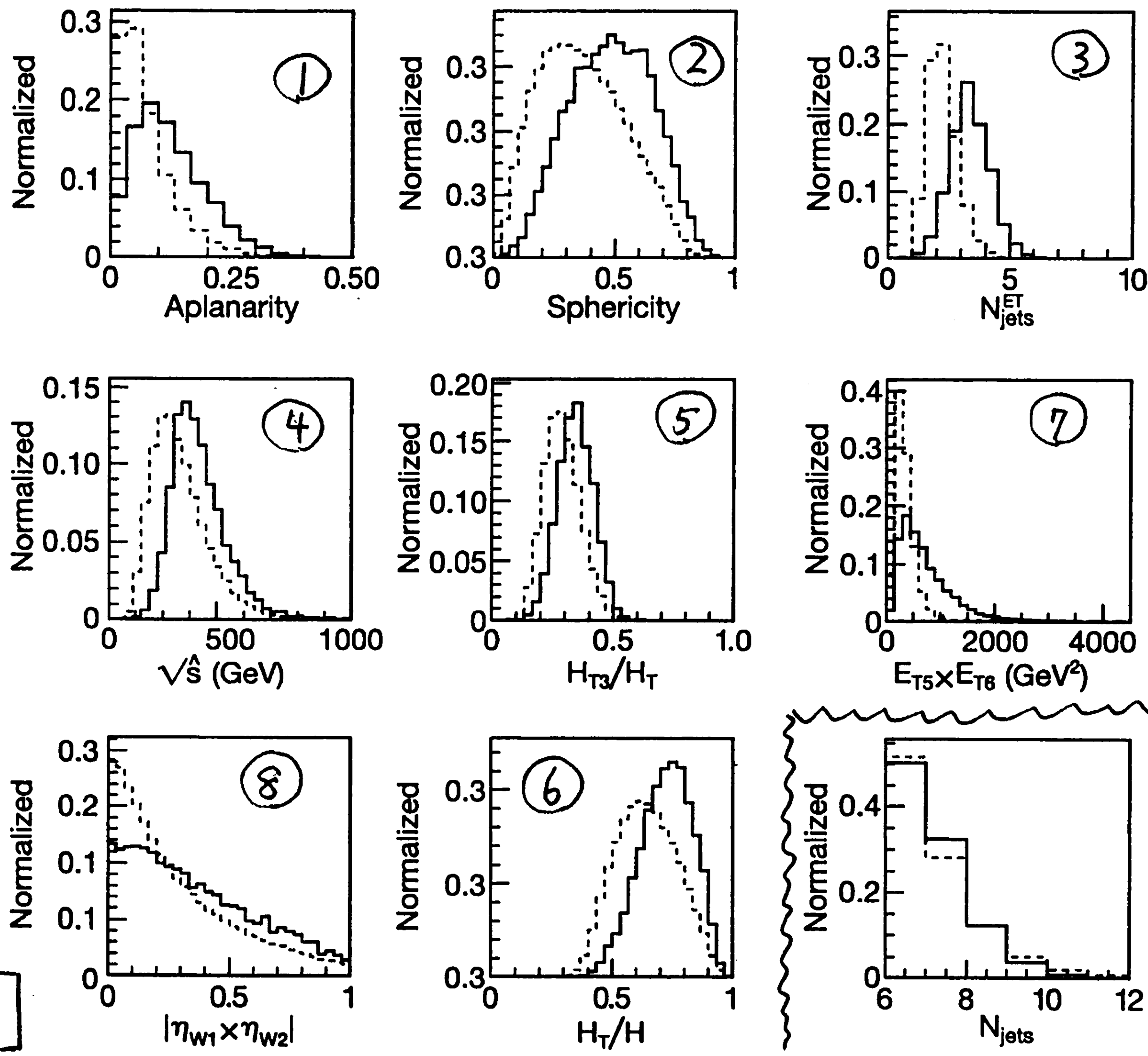
$$\xrightarrow{b\text{-tag}} 3,043 \text{ コ} \quad \left(\frac{S}{N} \sim \frac{1}{100}\right) \qquad \begin{array}{l} S: 20\% \\ N: 2\% \end{array}$$

この 3,043 events を用いて m_t を決めるのですが、$S/N = 1/100$ ではどうにもなりません。まず

$$E_{T1} > E_{T2} > \cdots > E_{T6} > \cdots$$

として、6-ジェットを選び、それらに対して 8ヶの観測量の分布を計算し、S と N の分布を較べます。

2005.4.14



これは使わない。

Fig. 1

① Aplanarity
② Spherisity

$$M_{ij} = \sum_{k=1}^{n} (p_k)_i (p_k)_j = \mathcal{O}\begin{pmatrix}\lambda_1 & & \\ & \lambda_2 & \\ & & \lambda_3\end{pmatrix}\mathcal{O}$$

$i,j = x,y,z$ $\quad$ $\lambda_1 < \lambda_2 < \lambda_3$

$$A = \frac{3}{2}\frac{\lambda_1}{\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3} \xrightarrow{\text{planar}} 0$$

$$S = \frac{3}{2}\frac{\lambda_1+\lambda_2}{\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3} \xrightarrow{\text{collinear}} 0$$

③ $N_{jet}^{E_T}$ = # of jets with $E_T^{jet} > E_T$

④ $\sqrt{\hat{s}} = \left[\left(\sum_{i=1}^{6} p_i^{jet}\right)^2\right]^{1/2}$: invariant mass of 6-jets

⑤ H_{T3}/H_T
⑥ H_T/H

$$H_T = \sum_j E_T^j,\quad H_{T3} = H_T - E_{T1} - E_{T2},\quad H = \sum_j E_j$$

⑦ $E_{T5}\cdot E_{T6}$: product of two smallest E_T's

⑧ $|\eta_{W_1}\cdot\eta_{W_2}|$: product of two η's of W candidates

In Fig. 1, ——— Signal ($t\bar{t}$) expectation by MC
- - - - - Noize (background) constructed by Data

★ $t\bar{t} \to 6$ jet シグナルの方は、MCが(少しは)信用できると仮定する。

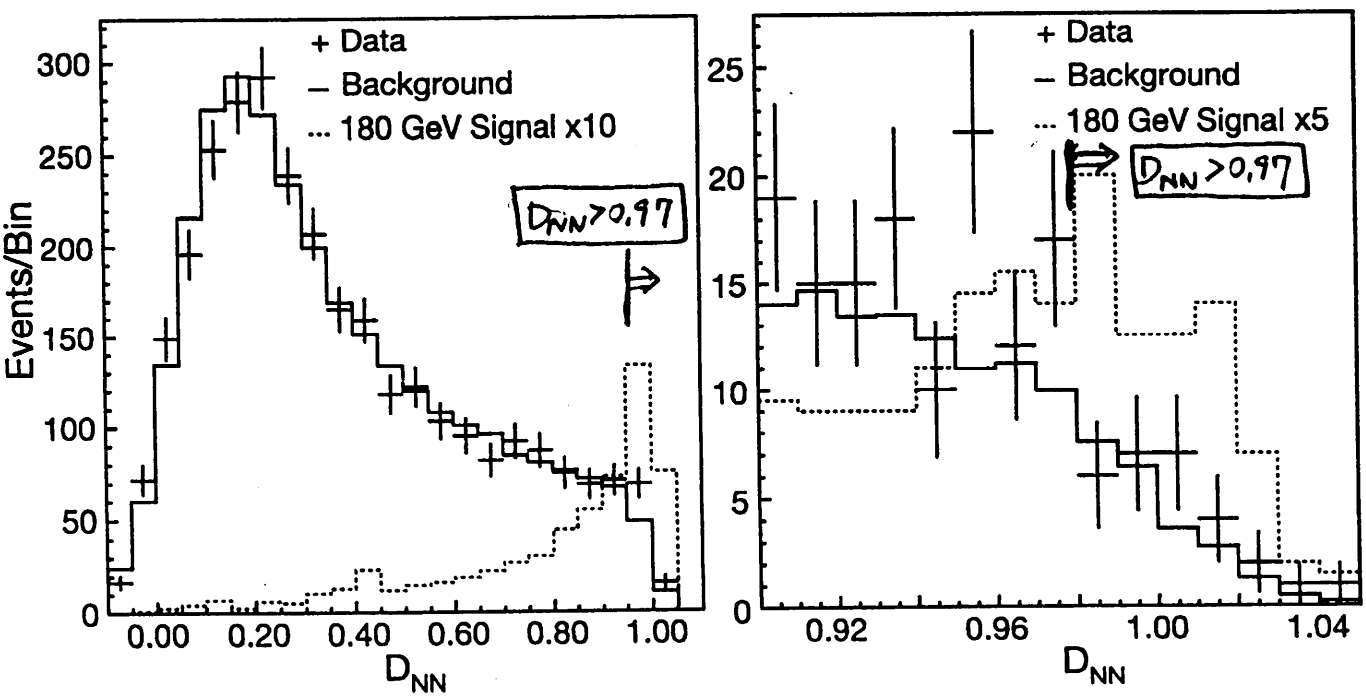
★ background ($p\bar{p} \to \geq 6$ jets) は、MCは全く信用できないので

データを用いる。 ⇒ b-tagをはずした、165,373イベントを使う。
(S/N = 1/1,000 なので 99.9% b.g.)
⇒ 1つ1つのイベントに対し、ウェイト w_i を計算する。

w_i = そのイベントが b-tag される確率
⇑
MCを使って評価

⇒ 165,373イベントそれぞれに w_i をかけた分布を加えたのが ---- の分布。

⇒ Neural Net を使って、⑧ケの分布から($t\bar{t}$)らしさ, D_{NN} を計算:



(a) (b)

2005. 4. 14

$D_{NN} > 0.97$ を選ぶと、65イベント。 ($S/N \sim 17/48 \sim 1/3$)

W_1, W_2, t_1, t_2 を次の χ^2 を最小にする「解」として選ぶ：

$$\chi^2 = \left(\frac{m_{t_1} - m_{t_2}}{2 \times \sigma_t}\right)^2 + \left(\frac{m_{W_1} - m_{W_0}}{\sigma_W}\right)^2 + \left(\frac{m_{W_2} - m_{W_0}}{\sigma_W}\right)^2$$

ここで、W_1, W_2 は 2-jet の mass, t_1, t_2 は W_1, W_2 を含む 3jet の mass,

$m_{W_0} = 77.5\,\mathrm{GeV}$, $\sigma_W = 21\,\mathrm{GeV}$, $\sigma_{m_t} = 31\,\mathrm{GeV}$ ⇐ $t\bar{t}$ MC

最後に、こうして選ばれた t_1 と t_2 の mass 分布を調べる。

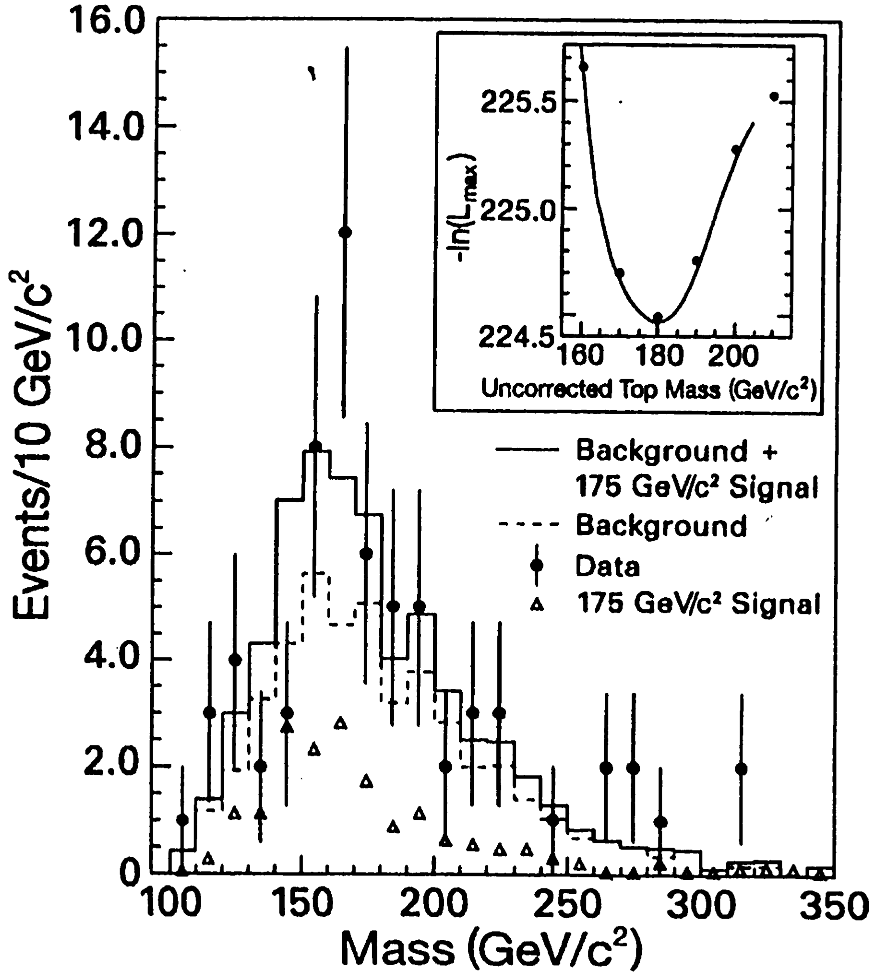


Fig. 3. Data and the sum of background and Monte Carlo signal plotted as a function of the mean mass, M. Insert is $-\ln L_{max}$ as a function of the top quark mass.

シグナルとバックグランドの mass 分布がほとんど同じであることに注目して下さい。バックグランドの normalization の評価の信頼性（b-tag rate から求めた weight w_i 等，MC による評価）が重要であるように思われます。

次に，observed mass (m_{fit}) と「本当の」mass m_t との経験則

$$m_{fit} = 0.712\, m_t + 53.477\ \mathrm{GeV}$$

を用いて，約 2.6 GeV の補正をします。これは MC。

最後に liklihood 分布から

$$m_t = 178.5 \pm 13.7\,(\mathrm{stat}) \pm 7.7\,(\mathrm{sys})\ \mathrm{GeV}$$

を得ます。$\sigma^{D\emptyset}_{t\bar{t}} \approx 11 \pm 5\ \mathrm{pb}$（$17 \pm 7$ イベント）は $\sigma^{QCD}_{t\bar{t}} = 5.6 \pm 1.4 \pm 1.2$ ($m_t = 172\ \mathrm{GeV}$)

⇓

8〜9 イベントの期待値。

と無矛盾と結論しています。

さて質問です。

この解析で，もし，あらかじめ，t の存在と，$m_t \sim 180\ \mathrm{GeV}$ を知っていなかったら，シグナルは見つかるでしょうか？

どうぞ，私の全ての講義が終わったあとで，この問題をもう一度考えてみて下さい。LHC の物理を目指す方は全員例外なく，Tevatron の物理を経験することが必要です。

2005.4.14

TevatronのデータからQCDジェットについて、そしてMCがいかに信用できないかを学ぶことはLHCの物理のために必要ですが、十分ではありません。

Tevatronのjet ——外挿 = QCD——→ LHCのjet

2 TeV　　　　14 TeV

現在、MCを少しでも役に立つものにする為に多くの方々が努力をされていますが、これらの努力は基本的に、上の外挿をよりQCDの基本原理に忠実に行うことで、LHCの実際の物理と、MCの予言とがかけはなれたものにならないようにという目標で行われているものです。最高のMCができても、実際のデータとの間に、normalizationはもとより、全ての分布に対し、数10%から100%近くまでのずれが予想されることを覚悟しておいていただきたいと思います。この場合、実際のデータを使ってMCを(場合によってはその理論的基礎までもを)補正しなければいけませんが、その補正が、QCDの基本的要請に合ったものでないと、次から次へと矛盾が拡大生産されてしまいます。「ここを直すとあちらが立たず」になってしまいます。ですから、ジェットの基本的性質をQCDのレベルで理解しておくことが重要だと思うのです。

いくつか例を考えてみます。

$pp \to h\ X$
$\quad \hookrightarrow \gamma\gamma$ 　　h の p_T 分布 vs b.g. の p_T 分布 ?

$\to j_1 j_2 h\ X$ 　　$|\eta_1 - \eta_2| >$ large gap
$\eta_2 < \eta_h < \eta_1$

$\to \tau^+\tau^- \to \ell^\pm \ell'^\mp$
$\ell^\pm \pi^\mp$
$\ell^\pm(\pi^\mp\pi^0)$

$\eta_2 < \eta < \eta_1$ の jet activity veto

$WW^* \to \ell^\pm \ell'^\mp \cancel{p}_T\ ,\ \underbrace{\ell^\pm \cancel{p}_T}_{W}\ \underbrace{jj}_{W^*}$ 　扇ジェット（面の向き）

W (m_T peak)
W^*（もし $m_h - m_W \sim 30$ GeV なる narrow jet）

jet physics で決まる
resolution が

$\to t\bar{t}h\ X$ 　… 超難しい (challenging) 4 b-jets + W^+W^-
$\quad \hookrightarrow b\bar{b}$

$\to b\bar{b}h\ X$ 　(large $\tan\beta$) 　4 b-jets, 2b + $\tau^+\tau^-$
$\quad \hookrightarrow b\bar{b}, \tau^+\tau^-$

$\to \tilde{g}\tilde{g}\ X$
$\quad \hookrightarrow \begin{cases} q\bar{q}'\tilde{\chi}_i^\pm & ;\ \tilde{\chi}_i^\pm \to LSP + q\text{'s} + \ell\text{'s} \\ q\bar{q}\ \tilde{\chi}_i^0 & ;\ \tilde{\chi}_i^0 \to LSP + q\text{'s} + \ell\text{'s} \end{cases}$ 　W, Z
$\quad \hookrightarrow \ell\bar{\ell}', jj$

<u>Calibration</u>

$\ell = e, \mu$ 　　$J/\psi, \Upsilon, Z \to e^+e^-, \mu^+\mu^-$

$\vec{\cancel{p}}_T$ 　　もし $\sigma_{QCD}(pp \to WX) \gg \sigma_{\text{new phys}}(pp \to WX)$ ならば
$W \to \ell\nu$ の
$m_T = \sqrt{(|\vec{p}_{\ell T}| + |\vec{\cancel{p}}_T|)^2 - (\vec{p}_{\ell T} + \vec{\cancel{p}}_T)^2}$ 分布の peak $\sim m_W$

E_{jet} : Jetの内容が良くわかっていて、σ_{obs} が十分大きい process でかつ $S/N \sim 1$.
$W \to j_1 j_2$, $Z \to j_1 j_2$, $t \to b j_1 j_2$ 位しかないが
他の条件を満たす場合が思いつけない。

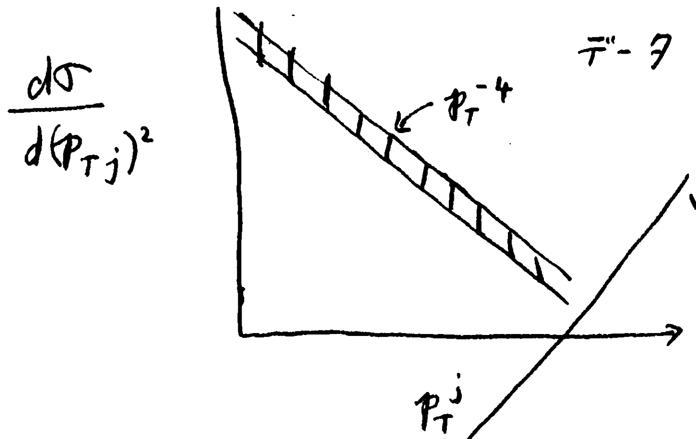
2005. 4. 14

QCD-jetを用いるしかないのではないか？　$pp \to j_1 j_2 X$ …①

$\to Z j X$ …②

$\hookrightarrow \ell^+\ell^-$

どちらもQCD-MCとデータを比較することになる。
②はp_Tバランスの制限が強くて有理かも。



データ＝QCD-MCを仮定すれば
$(p_T^j)_{obs}$ と $(p_T^j)_{physics}$ の関係が
$(p_T^j)_{obs}$ ごとに $\sim \frac{1}{4}\left(\frac{\Delta\sigma}{\sigma}\right)$ の精度で
決まる。

⇒ どうやってテストするか？

⇒ $t\bar{t} \to \ell$ + 4jet で m_t が合うか？

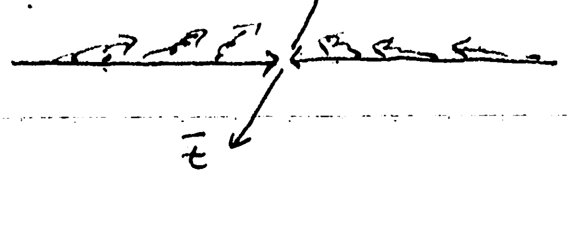
⇒ $t\bar{t} \to$ 6jets は無理かな？

jetのp_Tだけでなく、
- jet definition（Rの値）
- 親がgかqか

等に依存するはず。

依存性はQCDの考察で多少は予想できる。

QCD効果で一番重要なのは、hard scattering scale Qが大きくなると、initial partonからのradiationによる 'mini'-jet activityが $\ln Q$ で増大すること。例えば、同じ $t\bar{t}X$ でも $m(t\bar{t}) = Q$ が大きくなるLHCでは $t\bar{t}$ + multijet が増えてはる！



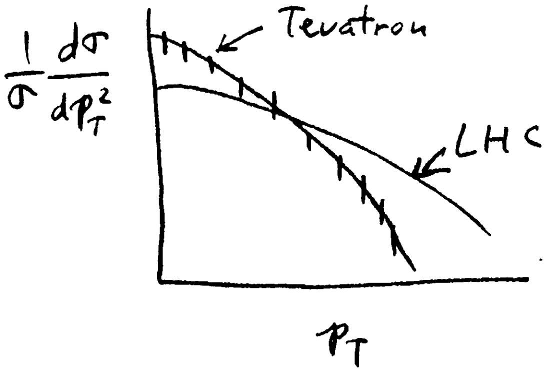
更に、例えQが同じ様に思えても、

$p\bar{p} \to Z\,X$ @ Tevatron　　$x_1 x_2 > \left(\frac{m_Z}{\sqrt{s}}\right)^2 \sim \left(\frac{1}{20}\right)^2$

$\cancel{M_Z = x_1 x_2 \sqrt{s}}$

$pp \to Z\,X$ @ LHC　　$x_1 x_2 > \left(\frac{m_Z}{\sqrt{s}}\right)^2 \sim \left(\frac{1}{150}\right)^2$

phase space の大きなLHCでは、"X"のjet activityが大きくなると予想される。



Tevatron でのZのp_T分布は、QCD-MCでfitされているが、

P-QCDのmultiple soft-gluon resummation
とNon-perturbativeなintrinsic parton k_T (~1GeV) } のcombination

⇓

LHCへの外挿に大きな不定性が残る。

ほとんどP-QCDになるはずだが、その部分がTevatron dataで本当に再現されているのかどうか分からない。

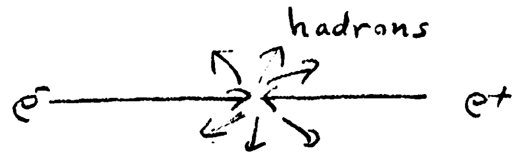
⇒ 実際のデータを使ってPQCD-MCをtuneする必要があるだろう。

///

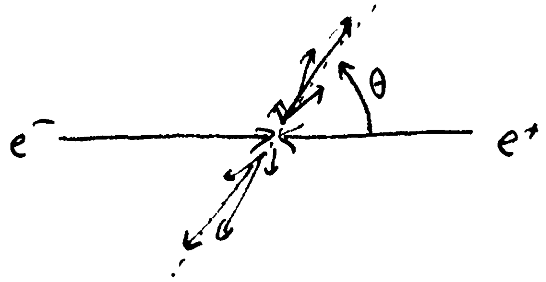
2005.4.14

PQCD によるジェットの理解 ($e^+e^- \to hadrons$)

$\sqrt{s} < 3\,GeV$ では $e^+e^- \to hadrons$ は fire "ball" と言われていた。
丸い



$\sqrt{s} > 5\,GeV$ (SPEAR) で 2-jet に見え出した。



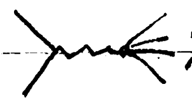
$$\frac{d\sigma}{d\cos\theta_J} \sim 1+\cos^2\theta_J$$

あたかも spin $\frac{1}{2}$ で構造も mass も持たない $q\bar{q}$ が対生成し、q と $\bar{q}$ の momentum の向きに hadron が生成されたように見えた。 $\underbrace{q \to hadron\ jet}_{fragmentation}$

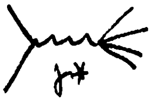
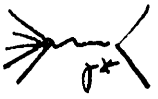
一方
$$\frac{\sigma_{tot}^{had}}{\sigma_{tot}^{\mu\mu}} = \frac{\sigma_{tot}(e^+e^- \to \gamma^* \to hadrons)}{\sigma_{tot}(e^+e^- \to \gamma^* \to \mu^+\mu^-)} \approx 3\sum_{q=u,d,s,c}(Q_q)^2$$

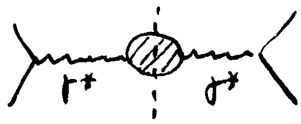
とほぼ合っていて、あたかもカラー自由度3を持ったゲルマンの半端電荷クォークが対生成したかのように思われた。

この現象は QCD の Asymptotic freedom (Short Distance = SD で弱結合) とどう関係しているのか？ SD dominance (LD physics の suppression) が鍵。

① $\sigma_{tot}(e^+e^- \to hadrons) \sim \sum_{\substack{\text{all hadronic} \\ \text{final states} \\ X}} \int \Big|$  $X \Big|^2 d\Phi_X$

↑ X の phase space

$= \sum_X \int \Big($  $X \Big) d\Phi_X \Big(X$  $\Big)$

$\overset{\text{unitarity}}{=} 2\,\mathrm{Im}$ 

光学定理 (unitary S matrix) $S = 1 + iT$

$$1 = S^\dagger S = (1 - iT^\dagger)(1 + iT) = 1 - i(T^\dagger - T) + T^\dagger T$$

$$-i(T - T^\dagger) = T^\dagger T$$

$$-i\langle i|(T - T^\dagger)|i\rangle = \langle i|T^\dagger T|i\rangle = \sum_X \langle i|T^\dagger|X\rangle\langle X|T|i\rangle$$

$$-i(T_{ii} - T_{ii}^*) = \sum_X (T_{Xi})^*(T_{Xi})$$

$\sum_X |X\rangle\langle X| = 1$

↑ phase spase 積分含む.

$$2\,\mathrm{Im}\,T_{ii} = \sum_X |T_{Xi}|^2$$

$|i\rangle = |\gamma^*\rangle \cdots |e^+e^-\rangle$

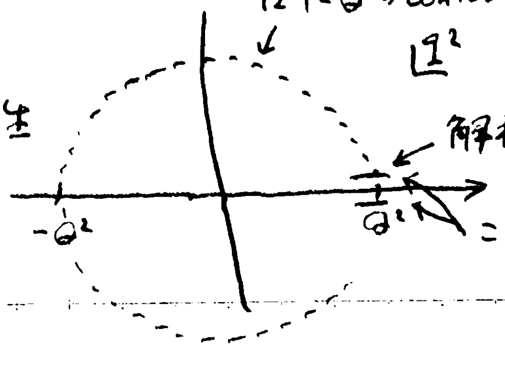
$|X\rangle = |\,hadrons\rangle$

$T_{ii} \sim \Pi(q^2)$ depends only on q^2

$q^2 < 0$ で $|q^2| = Q^2 \gg \Lambda_{QCD}^2$ ならば SD : $\dfrac{1}{Q}$ の時間しか存在できない。

$q^2 = Q^2 > 0$ ではどうか?

$\Pi(q^2)$ 関数の解析性

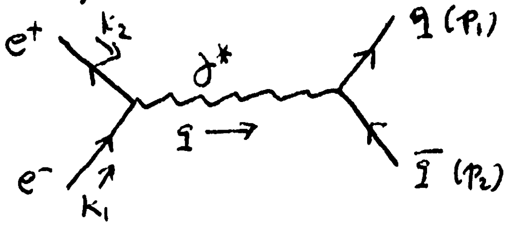


でも、摂動の各次ではLD依存性が現われる…
(ように見えるが実は)

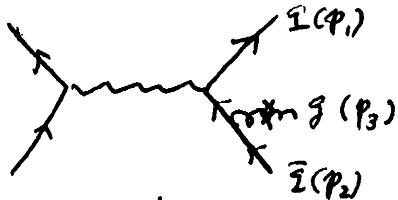
2005. 4. 14

0次： $M_0 = M_0(e^+e^- \to q\bar{q}) = \bar{v}(k_2)\gamma_\mu u(k_1)\dfrac{1}{q^2}\bar{u}(p_1)\gamma^\mu v(p_2)$ $\sim 1 \pm \cos\theta$

次回の講義で計算します。



1次： $M_1 = M_1(e^+e^- \to q\bar{q}g) = \bar{v}(k_2)\gamma_\mu u(k_1)\dfrac{1}{q^2}\bar{u}(p_1)\gamma^\mu \dfrac{\not{p}_2+\not{p}_3}{(p_2+p_3)^2}\gamma^\nu v(p_2)\,\epsilon^*_\nu(p_3)$



$$\frac{1}{(p_2+p_3)^2} = \frac{1}{2p_2p_3} = \frac{1}{2E_2E_3(1-\cos\theta_{23})} \to \infty \quad \begin{cases} E_3 \to 0 & \text{soft} \\ \cos\theta_{23} \to 1 & \text{collinear} \end{cases}$$

少しだけ計算の練習をしましょう。

0次の cross section： $d\sigma_0 = \dfrac{1}{2s}\overline{\sum}|M_0|^2 d\Phi_2$

$\uparrow$ invariant flux　　$\uparrow$ invariant 2-body phase space

(1) $$d\Phi_n = (2\pi)^4\delta^4\Big(q - \sum_{i=1}^n p_i\Big)\prod_{i=1}^n \frac{d^3p_i}{(2\pi)^3 2E_i}$$

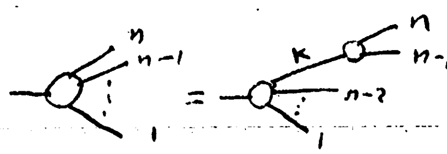
$$\left(\int \delta(p_i^2 - m_i^2)\underbrace{\ }_{\Theta(p_i^0)} d^4p_i = \int \delta\big((p_i^0 - E_i)(p_i^0+E_i)\big)\Theta(p_i^0)\,dp_i^0\,d^3p_i = \frac{d^3p_i}{2E_i} \right)$$

$E_i = \sqrt{m_i^2 + |\vec{p}_i|^2}$

(2) $$d\Phi_1 = (2\pi)\,\delta^4(q-p)\frac{d^3p}{2E} = (2\pi)\,\delta(q^2 - m^2)$$

(3) $$d\Phi_n = \underbrace{d\Phi_{n-1}}_{q \to q - p_n}\frac{d^3p_n}{(2\pi)^3 2E_n}$$

(4) $$= \underbrace{d\Phi_{n-1}}_{p_{n-1}=k}\frac{dk^2}{2\pi}\,d\Phi_2(k = p_{n-1}+p_n)$$



(4) 式は n 体の phase space を (n-1) 体と 2 体の重ね合せで表すので重要.

右辺 → 左辺は簡単に示せるはずです。次の変形

$$\delta^4(q-\sum_{i=1}^{n-2}p_i-k)\frac{d^3k}{2E_k}\ dk^2\ \delta^4(k-p_{n-1}-p_n)$$
$$=\delta^4(q-\sum_{i=1}^{n-2}p_i-k)\underbrace{\delta(k^2-(p_{n-1}+p_n)^2)\,d(p_{n-1}+p_n)^2}_{=1}\delta^4(k-p_{n-1}-p_n)\,d^4k$$
$$=\delta^4(q-\sum_{i=1}^{n}p_i)$$

です。(2) と (3) を用いて

(5) $$d\Phi_2=(2\pi)\,\delta((q-p_2)^2-m_1^2)\frac{d^3p_2}{(2\pi)^3 2E_2}=\frac{1}{(2\pi)^2}\delta((q-p_2)^2-m_1^2)\frac{d^3p_2}{2E_2}$$

(6) $$=\frac{1}{8\pi}\frac{2p^*}{\sqrt{q^2}}\frac{d\cos\theta^*}{2}\frac{d\phi^*}{2\pi}$$ $\vec{p}_1^{\,*}+\vec{p}_2^{\,*}=0$ frame で $|\vec{p}_i^{\,*}|=p^*$

(5) と (6) は大変に役に立つ公式です。(6) から, massless で flat な

2体の phase space の積分は

(7) $$\int d\Phi_2=\frac{1}{8\pi}$$

と規格化されていることが分かります。これらの式は、次回以降

しばしば使いますので、~~自由~~使いこなせるようにしておいて下さい。

(6) を用いると例えば

$$d\sigma_0=\frac{1}{2s}\overline{\sum}|M_0|^2\frac{1}{8\pi}\frac{d\cos\theta^*}{2}\Rightarrow\frac{d\sigma_0}{d\cos\theta^*}=\frac{1}{32\pi s}\overline{\sum}|M_0|^2$$

一方 H_1 ($e\bar{e}\to q\bar{q}g$) は $|p_3|\ll E_1, E_2$ のとき

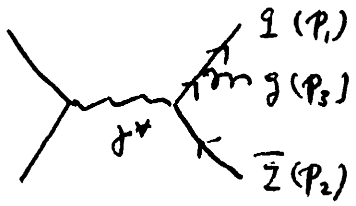
$$(\not{p}_2+\not{p}_3)\gamma^\nu v(p_2)\approx\not{p}_2\gamma^\nu v(p_2)=[2p_2^\nu-\gamma^\nu\not{p}_2]v(p_2)=v(p_2)(2p_2^\nu)$$
$\not{p}_2 v(p_2)=0$ (Dirac 方程式)

なので

$$M_1 = \bar{v}(k_2)\gamma_\mu u(k_1)\frac{1}{q^2}\bar{u}(p_1)\gamma^\mu v(p_2)\frac{2p_2^\nu\,\epsilon_\nu^*(p_3)}{(p_2+p_3)^2}$$

$$= M_0\,\frac{p_2\cdot\epsilon_3^*(p_3)}{p_2\cdot p_3}$$

となる。$|p_3| \ll E_1, E_2$ のとき (soft gluon), $q\bar{q}g$ 振幅が0次の $q\bar{q}$ 振幅と factorize することが重要です。もう一つの図



の寄与も足すと、

$$M_1 = M_0\left(\frac{p_2^\nu}{p_2\cdot p_3} - \frac{p_1^\nu}{p_1\cdot p_3}\right)\epsilon_\nu^*(p_3)$$

となります。ゲージ不変性 ($A_\nu \to A_\nu + \partial_\nu\phi$; $\epsilon_\nu(p_3) \to \underline{p_{3\nu}} + \epsilon_\nu(p_3)$ で振幅が不変) を確認して下さい。

$$M_1\,(\epsilon_\nu^*(p_3)\to p_{3\nu}) = M_0\left(\frac{p_2^\nu}{p_2\cdot p_3} - \frac{p_1^\nu}{p_1\cdot p_3}\right)p_{3\nu} = 0$$

$q\bar{q}g$ の cross section は

$$d\sigma_1 = \frac{1}{2s}\sum|M_1|^2\,d\Phi_3$$

$$= \frac{1}{2s}\sum\left|M_0\left(\frac{p_2^\nu}{p_2\cdot p_3} - \frac{p_1^\nu}{p_1\cdot p_3}\right)\epsilon_\nu^*(p_3)\right|^2 d\Phi_3$$

ここで (3) の公式

$$d\Phi_3 = \underbrace{d\Phi_2}_{q\to q-p_3\approx q}\,\frac{d^3p_3}{(2\pi)^3\,2E_3} \approx d\Phi_2\cdot\frac{E_3^2\,dE_3\,d\cos\theta\,d\phi}{16\pi^3 E_3} = d\Phi_2\cdot\frac{E_3\,dE_3\,d\cos\theta}{8\pi^2}$$

と
$$\sum_{spin} \epsilon_\nu^*(p_3)\,\epsilon_{\nu'}(p_3) = -g_{\nu\nu'} + (p_{3\nu} \text{ or } p_{3\nu'} \text{ terms})$$
$\hookrightarrow 0$ by gauge invariance

を用いて

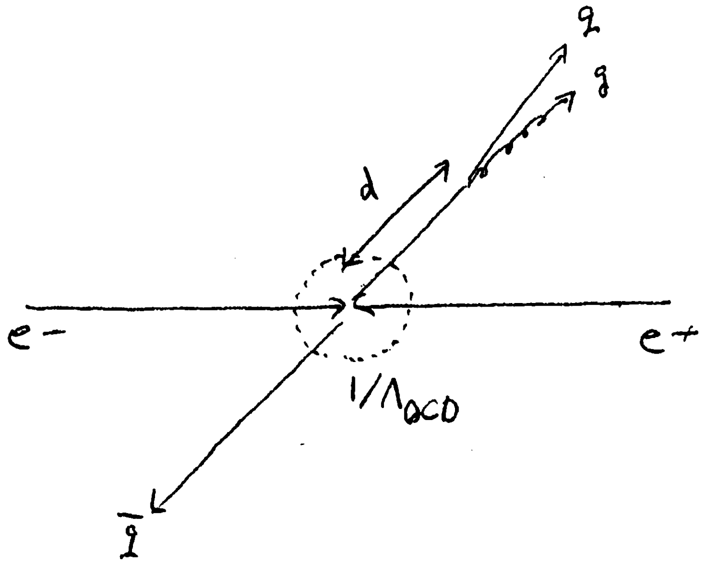
$$d\sigma_1 \approx \underbrace{\frac{1}{2s}\,\overline{\sum}\,|M_0|^2\, d\Phi_2}\cdot\left(\frac{p_2^\nu}{p_2\cdot p_3}-\frac{p_1^\nu}{p_1\cdot p_3}\right)(-g_{\nu\nu'})\left(\frac{p_2^{\nu'}}{p_2\cdot p_3}-\frac{p_1^{\nu'}}{p_1\cdot p_3}\right)$$
$$\frac{1}{8\pi^2}E_3\,dE_3\,d\cos\theta$$

$$= d\sigma_0\cdot\frac{2p_1\cdot p_2}{(p_1\cdot p_3)(p_2\cdot p_3)}\,\frac{1}{8\pi^2}E_3\,dE_3\,d\cos\theta$$
$$\approx d\sigma_0\cdot\frac{4}{E_3^2(1-\cos\theta)(1+\cos\theta)}\,\frac{1}{8\pi^2}E_3\,dE_3\,d\cos\theta$$
$$= d\sigma_0\,\frac{1}{4\pi^2}\,\frac{dE_3}{E_3}\,\frac{d\cos\theta}{1-\cos\theta}$$

$\ln\frac{E}{m_g}$ ← soft な発散

$\ln(1-\cos\theta)$ ← collinear な発散

LD (Long Distance) の物理



$$d=\frac{1}{\sqrt{(p_1+p_3)^2}}\,\gamma\beta \approx \frac{1}{\sqrt{(p_1+p_3)^2}}\,\frac{\sqrt{s}/2}{\sqrt{(p_1+p_3)^2}}$$
$$=\frac{\sqrt{s}}{\cancel{2}\,p_1\cdot p_3}$$
$$=\frac{2E}{\cancel{2}E\cdot E_3(1-\cos\theta_{13})}$$
$$=\frac{1}{E_3(1-\cos\theta_{13})} > \frac{1}{\Lambda_{QCD}}$$

$d\sigma_1$ を見ると、大きな寄与がLD領域にあることがわかる。

何故 σ_{total} が有限で、且つLD物理によらないのか？

$d\sigma_1$ のLD依存性がループ補性の寄与と相殺するから。
virtual gluon補性

★ softの相殺 … Bloch-Nordsieck

★ collinear（を含めた）相殺 … KLN（木下 Lee Nevenberg）

⇓

これが重要 ⇒ LD依存性が全く無くなってしまう。

⇓

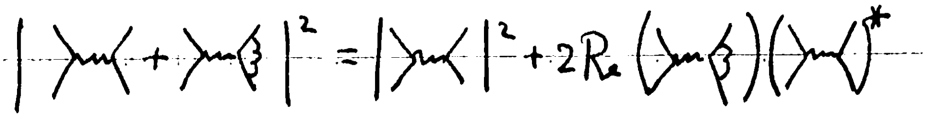
全エネルギースケールで物理が決まる。

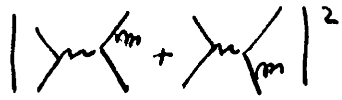
⇓

$Q=\sqrt{s} \gg \Lambda_{QCD}$ ならばPQCD.

LD部分の寄与は、momentum spaceで見るとphase spaceが小さい（small momentum $\sim \frac{d^3p}{E} \sim pdp \sim dp^2$）ので、振幅が大きくならなければ、次第に効かなくなる。

LDの寄与の相殺を見るためには、計算の中で発散が起きないように、正則化（regularization）をして、3体と、2体のループ計算をしなければならない。少し面倒なので、ここでは、「相殺する」という結果を使って議論を進めます。

σ_{total} では 2体の寄与 

と 3体の寄与 

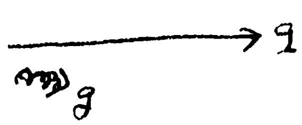
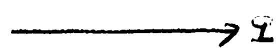
を足し合げることで

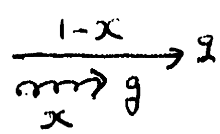
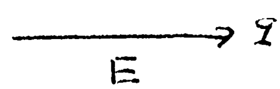
$$\sigma_{tot} = \int d\sigma(2体)\, d\Phi_2 + \int d\sigma(3体)\, d\Phi_3$$
$$= \sigma_0 \left(1 + \frac{\alpha_s}{\pi} + \cdots \right)$$

LDの寄与が相殺し、SDの物理が支配的になって $\frac{\alpha_s(Q)}{\pi}$ の摂動展開が得られた。

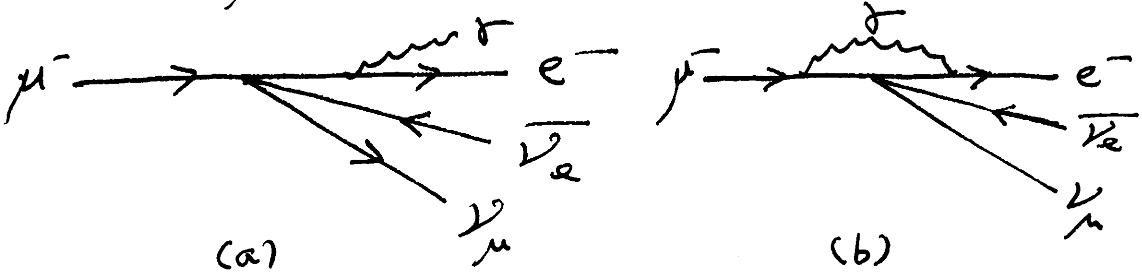
ではジェットの断面積ではどうだろうか? KLN定理が鍵となります。

KLN定理 --- soft, collinear を含むLD物理の寄与の発散は全エネルギーが同じ状態を区別しない (Energy degenerate states) 全ての物理量について成立する。

(例) ソフト  $E_q + E_g = E_q$ ($E_g \to 0$) 

collinear  $E_q + E_g = (1-x)E + xE = E$ 

木下東一郎は μ decay の輻射補正計算で

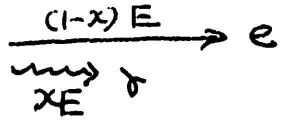


real 光子の寄与 (a) と virtual 光子の寄与 (b) のそれぞれに
$\ln\frac{m_\mu}{m_e}$ の項（$m_e\to0$ で発散する項）が現れるのに、
$O(\frac{\alpha}{\pi})$ の全ての輻射補正の和、μ lifitime への補正では
この項が相殺することを発見し、ソフトな発散を光子の
微小質量 (m_γ) で正則化したときの $m_\gamma\to0$ の発散と合わせ、

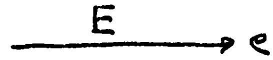
$$\left(\ln\frac{m_\mu}{m_\gamma}+\text{const}\right)\ln\frac{m_\mu}{m_e}$$

の項全て（$m_\gamma\to0,\ m_e\to0$ の発散）が終状態を足し合わせる
inclusive な量について相殺することを、摂動の全ての次数で
QED の場合に証明した。Lee と Neuenberg は、$m_\gamma\to0,\ m_e\to0$
の時に、エネルギーの和が同じになる状態（ソフトとコリニアー）を
足し合げる（区別しない）量に関して、この相殺が起きることを示した。
KLN 定理は P-QCD でも証明され、P-QCD の物理への
応用の根幹となった。

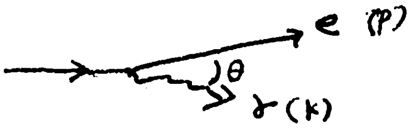
QEDでは $m_e = 0.5$ MeV が有限で、eもγも外に出て来る(asymptotic stateとして存在する。confineされない)ので、$m_e \neq 0$ ならば区別できる。



と



でも、eの速度は $\beta = \sqrt{1 - m^2/E^2}$ で光子の速度は1なので、いずれeはγに置いてけぼりです。コリニアー項の積分も



$$\frac{1}{2p\cdot k} = \frac{1}{2E_e E_\gamma (1 - \beta\cos\theta)}$$

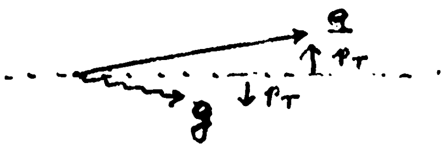
なので

$$\int_0^1 \frac{d\cos\theta}{1-\beta\cos\theta} = \left[\ln\frac{1}{1-\beta\cos\theta}\right]_0^1 = \ln\frac{1}{1-\beta}$$
$$= \ln\frac{1+\beta}{1-\beta^2} \approx \ln\frac{2}{m^2/E^2} = \ln\frac{2E^2}{m^2}$$

となります。

QCDでは $m_q = 0$ と考えても良いし、$m_q \ll \Lambda$ なので、

(q+g)系の不変質量、collinearな場合は横運動量方向の質量が



$2p_T \lesssim \Lambda$ 　($p_T \simeq \Lambda$ でも良いです)

のとき、q+g は q と区別できなくなってしまうわけです。

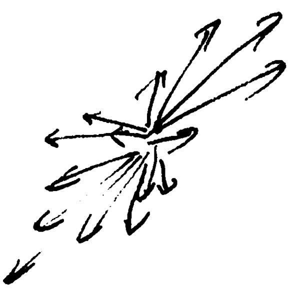
ここで $\frac{1}{\Lambda}$ がハドロンの拡がりと考えると良いかも知れません。

$\Lambda \sim 500$ MeV 程度とイメージすると、様々な現象を「量的に」とらえることができます。

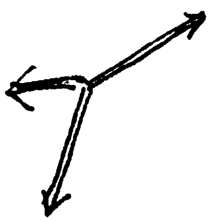
Jet cross section

ここまでの議論で、コリニアーやソフトな(g+g)対をgと、(q+g)対をqと区別しない量は、LD依存性($\ln\frac{E}{\Lambda}$項)が相殺し、高エネルギー($E\gg\Lambda$)でSDの物理($\frac{1}{E}$)が支配的になって、P-QCDで記述可能になることがわかります。

コリニアーとソフトの対を区別しないことは、一般的に、次の様なクラスターアルゴリズムで実現できます。



⇓



$\{\vec{p}_i\}$ のセットを考えます。$i=1,\cdots,n$ とします。

$\vec{p}_i\cdot\vec{p}_j = m_{ij}$ とし、$\min\{m_{ij}\}<\sqrt{s}\,y$ だったら

$\vec{p}_i+\vec{p}_j=\vec{p}_{ij}$ として、$n-1$ 個の残りのセットについてくり返します。

$\min\{m_{ij}\}>\sqrt{s}\,y$ になったら終わりです。

$y\approx 0$ だと、n コのパートン(ハドロン)が最後まで残ります。

$y\ll 1$ だと、#(2クラスター)~#(3クラスター)~…#(5クラスター)

$y<1$ だと、#(2クラスター)≫#(3クラスター)≫#(4クラスター)

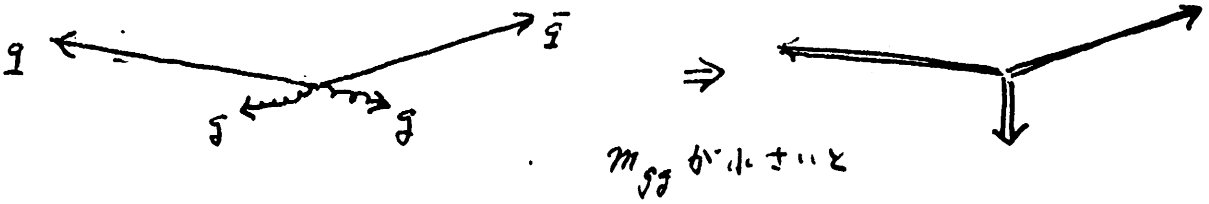
1 : $\frac{\alpha_s}{\pi}$: $\left(\frac{\alpha_s}{\pi}\right)^2$

$y=1$ だと、全てが足しあがって全断面積です。

このような cluster algorithm でできた momentum のクラスターを QCD-Jet と呼びます。

QCD-Jet はエネルギー的に同じ内部構造を区別せず、P-QCDで計算可能です。

(注) $\vec{p}_i\cdot\vec{p}_j = m_{ij}$ によるクラスター化は、エネルギーが同じペアが、
へのスプリット
$\vec{p}_i\cdot\vec{p}_j = 0$ (ソフトもコリニアーも)のときに起きることに注目したものですが、次の様な欠点があります。



このため、LD物理に少しびん感で、P-QCD展開の収束が悪くなり、実験との比較もエラーが大きくなります。

改良案は $$y_{ij} = 2\min(E_i^2, E_j^2)(1-\cos\theta_{ij})$$
を用いることで、kT-algorithm 又は Durham algorithm と呼ばれます。

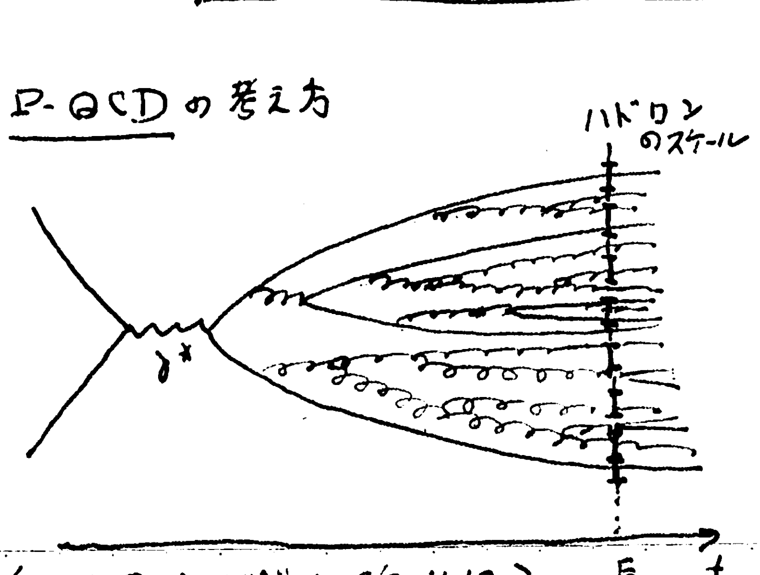
m_{ij}法は不測のエラーを導きますので、必ず、y_{ij}を用いるようにして下さい。

最後に、

ハドロンの{p_i}から作った $d\sigma(n\text{-Jet})_{hadrons}$ $\parallel$ クォーク、グルオンの{p_i}から作った $d\sigma(n\text{-Jet})_{P\text{-}QCD}$	$\sigma_{tot}^{hadrons}$ $\parallel$ $\sigma_{tot}^{q,g's}$

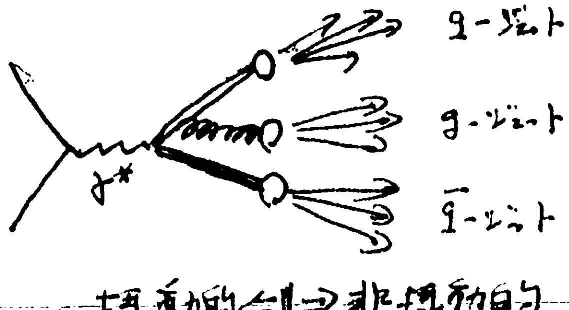
比較して良く考えて下さい。

P-QCDの考え方



(dσ(n-Jet)はハドロンのスケールに依存せずに決まる。)

大昔のパートン模型の考え方



QCD for Collider Physics II

2005. 4. 21

前回の反省

p.1 で $m_t = \underbrace{178.5}_{\text{mean}} \pm \underbrace{13.7}_{\text{stat.error}} \pm \underbrace{7.7}_{\text{sys.error}}$ GeV

のところ、stat.err. が統計誤差、sys.error が系統誤差です。

stat.error は基本的に $1/\sqrt{N_{event}}$ に比例するので、沢山の実験をすれば、$1/\sqrt{N_{total}} = 1/\sqrt{\sum_i N_i}$ の様に減ります。

$$x = \bar{x}_i \pm \Delta_i \ (stat)$$

で、$i=1,\cdots,n$ の実験があれば全部合わせると

$$x = \bar{x} \pm \Delta \ (\text{stat.error}) \qquad \begin{cases} \dfrac{1}{\Delta} = \sqrt{\displaystyle\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{\Delta_i^2}} \\ \bar{x} = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} \frac{\Delta^2}{\Delta_i^2}\, \bar{x}_i \end{cases}$$

となるわけです。ガウス分布の重ね合せ

$$P(x) = \prod_{i=1}^{n} P_i(x) \sim \prod_{i=1}^{n} e^{-\frac{(x-\bar{x}_i)^2}{2\Delta_i^2}}$$
$$= e^{-\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{x-\bar{x}_i}{\Delta_i}\right)^2}$$
$$= e^{-\frac{1}{2}\left[\left(\frac{x-\bar{x}}{\Delta}\right)^2 + \chi^2_{min}\right]}$$
$$\chi^2_{min} = \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\bar{x}-\bar{x}_i}{\Delta_i}\right)^2$$

に従うわけです。$\chi^2_{min} \sim n$ であれば、n 実験は統計的に無矛盾です。

sys.error はこうはいきません。例えば、もし全ての実験が同じ「ものさし」を使っていたら、この「ものさし」の目盛りのエラーは全ての実験データに共通です。

上の例で、n 個のデータが　$x = \bar{x}_i \pm \Delta_i^{stat} \pm \Delta_i^{sys}$

となっていて、　$\Delta_i^{sys} = \Delta^{sys}$

が共通のもの指しのエラーだったとしましょう。この場合、全ての実験の合計は、

$$x = \bar{x} \pm \Delta^{stat} \pm \Delta^{sys}$$

となり、$\bar{x}$ と Δ^{stat} は統計エラーだけの場合と同じですが、当然、Δ^{sys} は減りません。　$x = \bar{x} \pm \Delta_{tot}$　，　$\Delta_{tot} = \sqrt{(\Delta^{stat})^2 + (\Delta^{sys})^2}$

と書くと、Δ^{stat} は $N_{tot} = \sum_{i=1}^{n} N_i$ の増大と共に $1/\sqrt{N_{tot}}$ で減るが Δ^{sys} はいつまでも残ることになります。この「もの指し」のエラーに対応するのが、測定のために使ったシミュレーションプログラムのエラーで、最後のエラーが、この様なエラーにできるかぎり依存しないようにすることが、個々の実験に望まれるわけです。一方、n 個の実験が全く異るもの指しを使い、Δ_i^{sys} が完全に独立 (independent) だという極限も考えられます。この場合は、

各実験の答を　$x = \bar{x}_i \pm \Delta_i^{tot}$　　$\Delta_i^{tot} = \sqrt{(\Delta_i^{stat})^2 + (\Delta_i^{sys})^2}$

とし、n 実験の総合を、　$x = \bar{x} \pm \Delta^{tot}$

$$\begin{cases} \dfrac{1}{\Delta^{tot}} = \sqrt{\displaystyle\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{(\Delta_i^{tot})^2}} \\ \bar{x} = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\Delta^{tot}}{\Delta_i^{tot}}\right)^2 \bar{x}_i \end{cases}$$

と表せます。良いもの指し (小さな Δ_i^{sys}) の実験結果が、より大きなウェイト $(\Delta^{tot}/\Delta_i^{tot})^2$ を持ちます。

この場合も　$\chi^2_{min} = \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\bar{x} - x_i}{\Delta_i^{tot}} \right)^2$

の値が、各実験の Δ_i^{sys} の評価、それらの独立性の仮定の正しさの評価に使われます。

$$\begin{cases} \chi^2_{min} \sim n & \text{なら OK.} \\ \chi^2_{min} \gg n & \text{なら } \Delta_i^{sys} \text{ の独立性が疑問} \\ \chi^2_{min} \ll n & \text{なら } \Delta_i^{sys} \text{ の評価に誤りがあり.} \end{cases}$$

従って $\bar{x}$ の値, Δ^{tot} の値が共に信用できません。

独立な実験データの数を n とし、fit するパラメータ（上の例では $\bar{x}$）の数を m（上の例では1）とするとき、　$n - m$ = d.o.f. (degree of freedom)

と呼びます。上の判定条件は　$\chi^2_{min}/(\text{d.o.f.}) \begin{cases} \gg 1 \\ \approx 1 \\ \ll 1 \end{cases}$

と読みかえることができます。

一般の実験の sys. error はある部分は共通、ある部分は独立です。

Exp. 1 :　$(\Delta_1^{sys})^2 = (\Delta_1^{sys\text{-}A})^2 + (\Delta_1^{sys\text{-}B})^2 + (\Delta_1^{sys\text{-}C})^2 + \cdots$

Exp. 2 :　$(\Delta_2^{sys})^2 = (\Delta_2^{sys\text{-}A})^2 + (\Delta_2^{sys\text{-}B})^2 \qquad\qquad + (\Delta_2^{sys\text{-}D})^2 + \cdots$

↑ 共通　↑ 独立　↑ E.1に固有（独立）　↑ E.2に固有（独立）

実験結果を総合するときは、共通な部分と、独立な部分を正しく評価することが必要になります。正しかったかどうかの指標の一つは $\chi^2_{min}/(\text{d.o.f.})$ です。//

p.12 で $pp(p\bar{p}) \to ZX$ に関与するパートン（q と $\bar{q}$）の momentum fraction を x_1 と x_2 としたときに

$$x_1 x_2 \geq \frac{m_Z^2}{s} \begin{cases} \sim \left(\frac{90\,\mathrm{GeV}}{2\,\mathrm{TeV}}\right)^2 \sim 0.002 \\ \sim \left(\frac{90\,\mathrm{GeV}}{14\,\mathrm{TeV}}\right)^2 \sim 0.00004 \end{cases}$$

です。右向きビームを $P_1^\mu = (E, 0, 0, E)$、左 〃 $P_2^\mu = (E, 0, 0, -E)$ } $p, \bar{p}$ の質量を無視しました。

とすると、$s = (P_1 + P_2)^2 = (E+E)^2 - (E-E)^2 = 4E^2$

パートンの4運動量を $p_1^\mu = x_1 P_1^\mu$, $p_2^\mu = x_2 P_2^\mu$ とすると、パートン・パートン系の不変質量 $\sqrt{\hat{s}}$ は

$$\hat{s} = (p_1 + p_2)^2 = (x_1 P_1 + x_2 P_2)^2 = 2x_1 x_2 P_1 \cdot P_2 = x_1 x_2 (P_1 + P_2)^2 = x_1 x_2 s$$

です。$\hat{s} \geq m_Z^2$ のときに Z が生成されます。Z の生成断面積は

$$\frac{E\,d\sigma}{d^3p} = \frac{E}{dp_z}\frac{d\sigma}{d^2p_T} = \frac{d\sigma}{dy\; p_T\,dp_T\,d\phi} = \frac{d\sigma}{\pi\,dy\,dp_T^2} = \frac{1}{\pi} f(y, p_T^2)$$

の様に2変数、$y = \frac{1}{2}\ln\frac{E+p_z}{E-p_z}$, $p_T^2 = (p_x)^2 + (p_y)^2$

に依存します。この y, p_T^2 分布、$f(y, p_T^2)$ を予言することは、P-QCD の最大の目標の一つですが、これがどんなに困難なことであるかをこの講義で明らかにしたいと思います。例えTevatronのデータで tune しておいても、LHC実験に携る方は、P-QCDの予言が大きくずれる可能性を覚悟し、P-QCD の不確性によって予想されるずれと、新しい物理によるずれとを判別できるようにしておかなければなりません。（* $dy = \frac{dp_z}{E}$ を証明せよ。）

更に、 $pp(p\bar{p}) \rightarrow Z\ X$

過程のZのphase spaceは (y, p_T) で指定されますから、(y, p_T) の適当な領域、

$$y_0 - \Delta y \leq y \leq y_0 + \Delta y$$
$$p_T^0 - \Delta p_T \leq p_T \leq p_T^0 + \Delta p_T$$

のイベントを集め、全てのハドロンに対してJet-clustering algorithmを適用すると、

$$pp(p\bar{p}) \rightarrow Z\ X$$

事象は、

$$pp(p\bar{p}) \rightarrow Z \begin{array}{l} + 0\ \text{jet} \\ + 1\ \text{jets} \\ + 2\ \text{jets} \\ + 3\ \text{jets} \\ + \cdots \end{array}$$

の和となるはずです。P-QCDに基くシミュレーションプログラムの目標は、これらの全てのジェット事象の微分断面積、

$$d\sigma\ (pp, p\bar{p} \rightarrow Z + n\ \text{jets}) \quad ; n = 0, 1, 2, \cdots$$

の大きさと分布ができる限りP-QCDの予言に忠実なものとすることです。これは更に困難なことであり、現在進行中の努力を、この講義の最後に説明したいと思っています。今は、この断面積が

Jet-clustering algorithm の詳細

Jetの定義 $(\Delta R, E_T^{min})$

に強く依存し、且つ、上の詳細が一定のルールに従ったものである場合にのみ、

2005. 4. 21

P-QCDに基いた計算(つまり、我々の最高のシミュレーションプログラムの予言)が、その大体の傾向が信頼できるのだ(可能性がある)ということを理解して欲しい(おいて)と思います。

この一定のルールの基本が

「ソフト、コリニアーな分解を区別しない」 ……①

というKLN定理に帰着するわけです。この上に、P-QCDを使うことの代償として、

「摂動展開の収束性を損なわない」 ……②

ための多くの、定量化しにくい「ルール」がつけ加わります。(あらかじめリストアップしておきにくい)

心構えとしては、これらの「ルール」を全て満たす分布で、且つ「新しい物理による汚染」の少ない事象について、その断面積と分布とが合うようにP-QCDシミュレーションプログラムをチューニングし、それを用いて、新しい物理を探索するという手順を思い描くのが良いと思います。

例えば、P-QCDの収束性の条件として、ΔRが余り小さくないこと、$E_T^{min} / P_T^{Z\text{-}boson}$が余り小さくないこと、等があります。この条件を満たしているときだけ、Z+n-jetのプログラムをデータを使って修正(tune)できます。

一方、新しい物理はZ+5jetを予言するが、5-jetはΔRが充分小さく

ないと区別できないかも知れません。その場合は、シミュレーションプログラムを本来信用できない領域で使わなければならないかも知れません。

ΔR を大きくして、$Z+4jet$, $Z+3jet$ にしたときのP-QCDとの比較は役に立つかも知れませんし、ΔR が小さい時のP-QCDの予言の中にも信用できる部分（「かしこく」定義されたジェットシェイプ等）があること、それに何より、「新しい物理による汚染」の無いデータは、一定のルールに従って処理をすればP-QCDの計算不能な高次効果を含んでいるはずであることを利用して、データをうまく使った解析もできるに違いありません。このときの「一定のルール」を理解することが、P-QCDを理解することだ、と思います。

p.10〜p.11で、E_T^{jet} のcalibrationには $pp \to j_1 j_2 X$ 等の
$\to Z j X$
high P_T のQCD-jetを用いるより他は無いかも知れないと書きましたが、

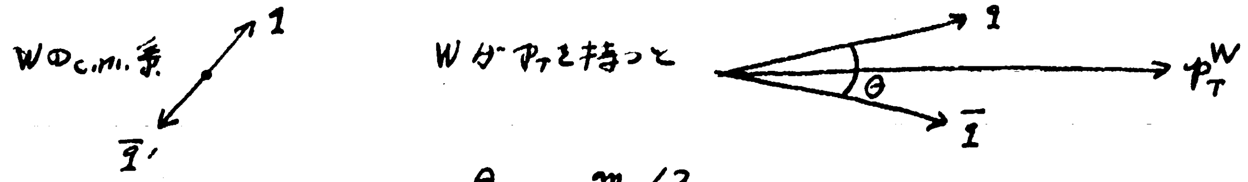
$$pp \to t\,\bar{t}\,X$$
$$t \to b\,W^+ \qquad \bar{t} \to \bar{b}\,W^-$$
$$W^+ \to \ell^+ \nu \qquad W^- \to j_1 j_2$$

事象を純粋に集めることができれば、$W^\pm \to j_1 j_2$ が、良く理解されているW崩壊のジェットと一致することを要請してcalibrationが可能です。

2005. 4. 21

サンプルの純度(purity)の評価、spectator jetの寄与等の難しい評価が含まれるので、時間をかけて改良していくことになるでしょう。

ここでちょっと練習。 $W \to j_1 j_2$ は 2jet に見えそうですが、$\Delta R = 0.3$ で全ての $W \to$ hadrons が 1jet になってしまう p_T があります。



$$\frac{\theta}{2} \approx \frac{m_W/2}{p_T^W/2}$$

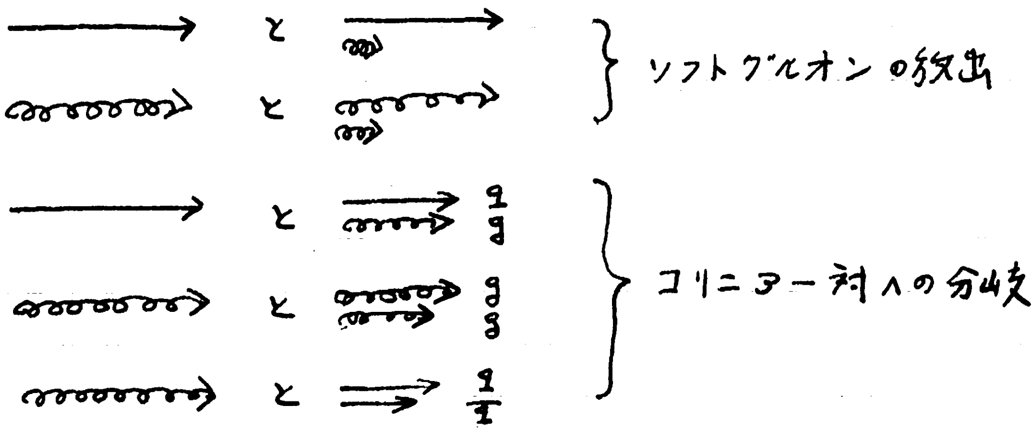
$$\theta \approx \frac{2m_W}{p_T^W} < 0.3$$

$$\Rightarrow p_T^W \gtrsim \frac{2m_W}{0.3} \approx 500\ \mathrm{GeV}$$

つまり、$p_T > 500\,\mathrm{GeV}$ の $W \to$ hadrons はほぼ全て 1jet となり、typicalな QCD-jet に較べて「ハード(平均のハドロンエネルギーが高い)、細い、$\langle n_{ch} \rangle$が小さい」等の特徴を持つものになります。違いはわずかでしょう。これより充分低い p_T をもつ W だけが 2-jet となり、m_W の評価等ができるようになります。上で、high p_T の W-jet と通常の P-QCD jet の違いはわずかだろうと書きましたが、$p_T > 2 \sim 3$ TeV になったらずい分違うかも知れません。現在のP-QCDシミュレータは余り信用できないことを念頭においた上で、比較をしてみて下さい。 //

P-QCD ジェットの復習 (p.19 ~ p.24)

P-QCD によるクォーク, グルオン生成断面積は,



を区別しない量（ジェット断面積）に対しては, LD(長距離)の物理への依存性が $\frac{\Lambda}{\text{全エネルギー}}$ で抑えられ, SD（短距離）の物理で決定される。これらの量は, QCD の有効結合 $\alpha_s(Q)$ が SD で（large Q で）小さくなることにより, $\alpha_s(Q)$ の展開（QCD摂動論=P-QCD）による近似が可能となる。

ここで一番重要なことは, P-QCD のジェット断面積は, クォーク・グルオンが最終的にハドロンになるかどうかには全く依存せずに決定されることです。$e^+e^- \to \gamma^* \to$ hadrons の全断面積と全く同じです。クォーク・グルオンがハドロンになる物理は LD の物理なので, 充分高い全エネルギーで, 正しく定義されたジェット断面積は, クォーク・グルオンの理論(P-QCD)でもハドロンの理論(QCD=実験)でも同じになるはずです。

ですから、P-QCDジェットの断面積、分布と、実際のデータとの比較は、本来、シミュレーションプログラムの介在無しに行うべきものです。

歴史的な理由で（P-QCDができるはるか前にジェット現象が見つかり、その現象論的理解の枠組としてクォーク、グルオンジェット模型が使われ、それが一定の役割を果たしたために）、この点が不明瞭となり、多くの誤解が生まれたようです。最近のシミュレーションプログラムでは、できるだけ小さなエネルギースケール（Q_0）までP-QCD「的」なクォーク、グルオンのシャワーを発生させ、Q_0のスケール（LD）でクォーク、グルオン系をハドロン系に置き換えることで、ハドロン事象をシミュレートしようとしています。最終的なハドロン分布は、Q_0の選び方やハドロン系の選び方の詳細（LDの物理）に依存するので、沢山のパラメータを使って再現性を高くします。一方、P-QCDのジェット断面積は、Q_0にもハドロン系の選び方にも一切依存しないはずなのですが、この点は低エネルギーの実験では良く分かりませんでした。現在準備されているP-QCDシミュレータでは、多ジェット生成過程（3,4,5,6ジェット）のジェット間相関等の観測量がP-QCDの（量子力学的な）予言に合うようなものにしようと努力しているようです。//

2005. 4. 21

場の量子論(Quantum Field Theory)の基礎

P-QCDはQFTの一つなので、QFTの基礎をある程度理解しておくことが必要です。素粒子の全ての相互作用(多分、重力によるものを除いて)がQFTに従うので、素粒子の物理学を研究するためには、QFTが必要です。図式的には

$$\left.\begin{array}{l}\text{量子力学}\\ \text{特殊相対性理論}\end{array}\right\} \Rightarrow \text{場の量子論 (QFT)}$$

となります。相対論的エネルギー($E > mc^2$)の粒子の量子力学を作ろうとすると、粒子・反粒子の対生成が起きるので、時空の任意の点で粒子の生成・消滅が可能な理論が必要で、これが、マクスウェルの電磁場を含む古典的(且つ相対論的な)場の理論を量子化して得られたわけです。得られた理論が、量子力学や相対論を再現するためには、

- ✓ 相互作用が$\overbrace{\text{一点}}^{\text{時空の}}$で起きる。
- ✓ 全ての粒子に反粒子があり、その質量、スピンが等しい。
- ✓ スピン整数の粒子はボース統計，半整数の粒子はフェルミ統計
- ✓ 例え低エネルギーであっても、$\Delta E \cdot \Delta t \simeq \hbar$で許される短時間，高エネルギー粒子の生成・消滅が起き、その効果は超高エネルギーの物理のヒントを与える。

等の要請を満たさなければなりません。最後の条は、いわゆる「発散の困難」を「くり込み群」の言葉で言い換えたものです。摂動的な場の量子論は、まず、相互作用をしない自由な場の運動方程式を解き、相互作用の効果を摂動として逐次評価するわけですが、この過程で上の全ての条件を調べることができます。

QFT はとても奥が深く、且つ、敷居の高い理論なので、この講義の中で解説することはとてもできません。ここでは最小限の（それ以下かも知れません）覚えておくと便利な項目だけを復習しようと思います。

まず、場としては

スピン0粒子の場（スカラー場）　$\phi(x)$　$\begin{cases} \phi^*(x)=\phi(x) & \cdots 実場 \\ \phi^*(x)\neq\phi(x) & \cdots 複素場 (2ヶ) \end{cases}$

スピン$\frac{1}{2}$粒子の場（Dirac場）　$\psi(x)=\begin{pmatrix}\psi_1(x)\\ \psi_2(x)\\ \psi_3(x)\\ \psi_4(x)\end{pmatrix}$　4個の複素場が1セットでLorentz変換をする。

［質量がゼロだと、右巻きと左巻きが分離し、それぞれ2成分］

スピン1粒子の場（ゲージ場）　$A^\mu(x)=(A^0(x), A^1(x), A^2(x), A^3(x))$

4個の実場が、1セットとしてLorentz変換のもとでベクトルのように変換する。質量ゼロの場合、この内2成分（ヘリシティー＋と－、右巻きと左巻き）だけが物理的なので、ゲージ変換の自由度を持つ。

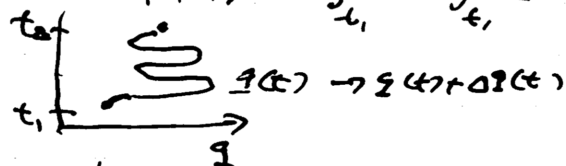
$\phi(x)$ 　　　　　調和振動子

自由な実スカラー場のラグランジアン密度

(1) $$\mathcal{L}(x) = \frac{1}{2}(\partial_\mu \phi(x))(\partial^\mu \phi(x)) - \frac{m^2}{2}(\phi(x))^2$$ 　　$x^\mu = (t, x, y, z)$

(2) $$L(t) = \int \mathcal{L}(x)\, d^3x$$ 　　ラグランジュアン $L = \frac{1}{2} m \dot{q}^2 - V(q)$

(3) $$I(t_2, t_1) = \int_{t_1}^{t_2} L(t)\, dt = \int \mathcal{L}(x)\, d^4x$$ 　　作用積分 $\int_{t_1}^{t_2} dt\, L = \int_{t_1}^{t_2} dt \left[\frac{1}{2} m \dot{q}^2 - V(q)\right]$



運動方程式

(4) $t_1 < t < t_2$ で $\phi(x) \to \phi(x) + \delta\phi(x)$ のときに、$I(t_2, t_1)$ が不変

(5)
$$\delta I = \int_{t_1}^{t_2} d^4x \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi}\delta\phi + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi)}\delta(\partial_\mu \phi)\right]$$

$$= \int_{t_1}^{t_2} d^4x \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi}\delta\phi + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi)}\partial_\mu(\delta\phi)\right]$$ 　… x は変化しないので

$$= \int_{t_1}^{t_2} d^4x \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi}\delta\phi - \left(\partial_\mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi)}\right)\delta\phi + \partial_\mu\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \partial_\mu \phi}\cdot\delta\phi\right)\right]$$

$$= \int_{t_1}^{t_2} d^4x \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} - \partial_\mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi)}\right]\delta\phi + \underbrace{\int_{t_1}^{t_2} d^4x\, \partial_\mu\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \partial_\mu \phi}\cdot\delta\phi\right)}_{\text{表面積分} \to (\delta\phi(\text{表面})=0) \to 0}$$

全ての $\delta\phi$ について $\delta I = 0$ であるためには

(6) $$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} - \partial_\mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi)} = 0$$ 　　$\frac{\partial V}{\partial q} - \frac{d}{dt}\frac{dL}{d\frac{dq}{dt}} = 0$

$$\boxed{\frac{d}{dt}(m\dot{q}) = \frac{\partial V}{\partial q}}$$

(7) $$0 = \partial_\mu \partial^\mu \phi(x) + m^2 \phi(x) = [\partial_\mu \partial^\mu + m^2]\phi(x)$$

$$= \left[\left(\frac{\partial}{\partial t}\right)^2 - \left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^2 - \left(\frac{\partial}{\partial y}\right)^2 - \left(\frac{\partial}{\partial z}\right)^2 + m^2\right]\phi(x)$$

$$= \left[-\left(i\frac{\partial}{\partial t}\right)^2 + (-i\nabla)^2 + m^2\right]\phi(x)$$

2005. 4. 21

保存則

(8) $$\phi(x) \to \phi'(x) = \phi(x) + \delta\phi(x)$$

で $\mathcal{L}(\phi, \partial_\mu\phi)$ が不変だと.

(9) $$\delta\mathcal{L} = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\phi}\delta\phi + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi)}\delta(\partial_\mu\phi)$$
$$= \partial_\mu\underbrace{\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\partial_\mu\phi}\delta\phi\right)}_{j^\mu(x)} + \Big[\underbrace{\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\phi} - \partial_\mu\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\partial_\mu\phi}\right)}_{\to 0 \ \text{運動方程式}}\Big]\delta\phi$$
$$= 0$$

(10) $$\partial_\mu j^\mu(x) = 0 \quad ; \quad j^\mu(x) = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\partial_\mu\phi}\delta\phi$$ カレントの保存

$$\partial_0 j^0(x) = \nabla\cdot\boldsymbol{j}(x)$$

(11) $$\partial_0 Q \equiv \partial_0\int d^3x\, j^0(x) = \underbrace{\int d^3x\, \nabla\cdot\boldsymbol{j}(x)}_{\to\text{表面項}} = 0$$ 荷電の保存

複素スカラー場 $\phi(x) = \phi_1(x) + i\phi_2(x)$ $\phi_1(x), \phi_2(x)$ が実場の場合

(12) $$\mathcal{L}(x) = (\partial_\mu\phi^*(x))(\partial^\mu\phi(x)) - m^2\phi^*(x)\phi(x)$$

(13) $$\begin{cases} \partial_\mu\dfrac{\partial\mathcal{L}}{\partial\partial_\mu\phi} - \dfrac{\partial\mathcal{L}}{\partial\phi} = 0 & \Rightarrow \ [\partial_\mu\partial^\mu + m^2]\phi^*(x) = 0 \\ \partial_\mu\dfrac{\partial\mathcal{L}}{\partial\partial_\mu\phi^*} - \dfrac{\partial\mathcal{L}}{\partial\phi^*} = 0 & \Rightarrow \ [\partial_\mu\partial^\mu + m^2]\phi(x) = 0 \end{cases}$$

(14) $$\phi(x) \to \phi'(x) = e^{i\theta}\phi(x) = \phi(x) + i\theta\phi(x)$$

で $\mathcal{L}$ が不変なので

(15) $$\partial_\mu j^\mu(x) = 0 \quad ; \quad j^\mu(x) = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\partial_\mu\phi}\delta\phi + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\partial_\mu\phi^*}\delta\phi^* = i\left(\phi(\partial^\mu\phi^*) - (\partial^\mu\phi)\phi^*\right)\theta$$
$$\equiv i\underbrace{(\phi\overleftrightarrow{\partial^\mu}\phi^*)}_{\text{カレント}}\theta$$

(16) $$Q = \int\left(\phi\frac{\partial\phi^*}{\partial t} - \phi^*\frac{\partial\phi}{\partial t}\right)d^3x$$ ：電荷

時空の変換を伴う不変性

(17) $x^\mu \to x'^\mu = \underbrace{\Lambda^\mu{}_\nu}_{\text{Lorentz変換}} x^\nu + \underbrace{a^\mu}_{\text{座標原点の移動}} \qquad = x^\mu + \underbrace{\delta x^\mu}_{\text{微小変換}}$

(18) z軸のまわりの回転 $\Lambda = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & \cos\theta & \sin\theta & \\ & -\sin\theta & \cos\theta & \\ & & & 1 \end{pmatrix} = \exp i\theta \underbrace{\begin{pmatrix} & & & \\ & & 1 & \\ & -1 & & \\ & & & \end{pmatrix}}_{J_z = M_{12} = -M_{21}} = 1 + i\theta \begin{pmatrix} & & & \\ & & 1 & \\ & -1 & & \\ & & & \end{pmatrix} + \cdots$

(19) z軸の向きのboost $\Lambda = \begin{pmatrix} \cosh y & & & \sinh y \\ & 1 & & \\ & & 1 & \\ \sinh y & & & \cosh y \end{pmatrix} = \exp i(-iy) \underbrace{\begin{pmatrix} & & & 1 \\ & & & \\ & & & \\ 1 & & & \end{pmatrix}}_{= M_{03} = -M_{30}} = 1 + y \begin{pmatrix} & & & 1 \\ & & & \\ & & & \\ 1 & & & \end{pmatrix} + \cdots$

Lorentz変換の生成演算子を $M^{\mu\nu} = -M^{\nu\mu}$ $(\mu, \nu = 0, 1, 2, 3)$

(20) と書くと、 $J^k = \frac{1}{2}\epsilon^{ijk} M^{ij}$ $(i, j = 1, 2, 3)$ は k軸の回りの回転

(21) $K^k = M^{0k} = \frac{1}{2}(M^{0k} - M^{k0})$ $(k = 1, 2, 3)$ は k軸方向のboost

(22) で

$$\left.\begin{aligned} [J^i, J^j] &= i\epsilon^{ijk} J^k \\ [K^i, K^j] &= -i\epsilon^{ijk} J^k \\ [J^i, K^j] &= i\epsilon^{ijk} K^k \end{aligned}\right\} \text{Lorentz変換の代数}$$

代数は、微小な変換を2回くり返し、順序を換えたものを比較すれば得られます。
変換をくり返したものが、また変換である(変換群)とき、代数は閉じます。

(17)の変換で $\mathcal{L}$ が不変であれば、

(23) $\mathcal{L}(x) \to \mathcal{L}'(x') = \mathcal{L}(x) \qquad \mathcal{L}'(x) = \mathcal{L}(\Lambda^{-1}x) = \mathcal{L}^{(x)} - \underbrace{(\partial_\mu \mathcal{L})\delta x^\mu}$

スカラー場は Lorentz変換で不変なので、同様に

(24) $\phi(x) \to \phi'(x') = \phi(x) \qquad \phi'(x) = \phi(\Lambda^{-1}x) = \phi(x) - \underbrace{(\partial_\mu \phi)\delta x^\mu}$

座標原点の移動(translation ; (17)式で $\delta x^\mu = a^\mu$) のときの保存カレントは

2005. 4. 2?

$L = \frac{1}{2}m\dot{q}^2 - V$

(25) $j^{\mu}(x) = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \partial_\mu \phi}\partial^\nu \phi - g^{\mu\nu}\mathcal{L} \equiv T^{\mu\nu}(x)$　　$\nu = 0, 1, 2, 3$ 方向の移動

となり、保存カレントは $\nu = 0, 1, 2, 3$ 方向の4つ：　$H = \frac{dL}{d\dot{q}}\dot{q} - L = m\dot{q}\dot{q} - \left(\frac{1}{2}m\dot{q}^2 - V\right)$

$= \frac{1}{2}m\dot{q}^2 + V$

(26) $H = \int d^3x\, T^{00}(x) = \int d^3x \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\phi}}\dot{\phi} - \mathcal{L}\right] \equiv \int d^3x\, \mathcal{H}(x)$　$= \frac{p^2}{2m} + V$

ハミルトン密度

(27) $P^i = \int d^3x\, T^{0i}(x) = \int d^3x \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\phi}}\partial^i \phi\right]$

保存量　Q(16)，H(26)，P^i (27) は量子化された場 $\phi(x)$ の一粒子波動関数の規格化に役立つ.

$i\frac{\partial}{\partial t}\psi = E\psi$　　$\psi = e^{-iEt}$

量子化：場を，固有運動量 $\mathbb{P}$ を持つ粒子の生成・消滅演算子で展開する.

(28) $\phi(x) = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3}\frac{1}{\sqrt{2E_p}}\left(a_{\mathbb{P}}e^{-ip\cdot x} + a_{\mathbb{P}}^{\dagger}e^{ip\cdot x}\right)_{p^0 = E_p = \sqrt{\mathbb{P}^2 + m^2}}$

(29) $[a_{\mathbb{P}}, a_{\mathbb{P}'}^{\dagger}] = (2\pi)^3\delta^3(\mathbb{P} - \mathbb{P}')$　，$[a_{\mathbb{P}}, a_{\mathbb{P}'}] = [a_{\mathbb{P}}^{\dagger}, a_{\mathbb{P}'}^{\dagger}] = 0$

で (29)式は調和振動子の生成・消滅演算子.

(30) $a_{\mathbb{P}}|0\rangle = 0$

で真空を定義すると，momentum $\mathbb{P}$ をもった1粒子状態

(31) $|\mathbb{P}\rangle = a_{\mathbb{P}}^{\dagger}|0\rangle$

は (29) より

(32) $\langle \mathbb{P}'|\mathbb{P}\rangle = (2\pi)^3\delta^3(\mathbb{P} - \mathbb{P}')$

と規格化される．(32) を Lorentz不変な規格化 ~~……~~

(33) $\langle \mathbb{p}' | \mathbb{p} \rangle = 2E_{\mathbb{p}} (2\pi)^3 \delta^3(\mathbb{p}-\mathbb{p}')$

とするために、~~■■~~ $a_{\mathbb{p}}$ を $\sqrt{2E_{\mathbb{p}}}$ 倍し、交換関係$\overbrace{を}^{(29)}$

(34) $\underline{[a_{\mathbb{p}}, a^{\dagger}_{\mathbb{p}'}] = 2E_{\mathbb{p}} (2\pi)^3 \delta^3(\mathbb{p}-\mathbb{p}')}$

とすると、表式 (28) は

(35) $$\phi(x) = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3 2E_{\mathbb{p}}} \left(a_{\mathbb{p}} e^{-ipx} + a^{\dagger}_{\mathbb{p}} e^{ipx} \right)$$

(0点エネルギーの和(∞)は無視!)

と書ける。この規格化のもとで、Q(16)、H(26)、P^i(27) が一粒子状態の粒子数、エネルギー、運動量となる。運動方程式 $\overset{(7)}{は}$

(36) $$\begin{aligned}[\partial_\mu \partial^\mu + m^2] e^{\pm ip\cdot x} &= [(\pm ip_\mu)(\pm ip^\mu) + m^2] e^{\pm ip\cdot x} \\ &= [-p^2 + m^2] e^{\pm ip\cdot x} \\ &= [-E_{\mathbb{p}}^2 + \mathbb{p}^2 + m^2] e^{\pm ip\cdot x} \\ &= 0\end{aligned}$$

(37) $$\begin{aligned}\langle 0 | \phi(x) | \mathbb{p} \rangle &= \langle 0 | \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3 2E_{\mathbb{k}}} \left(a_{\mathbb{k}} e^{-ikx} + a^{\dagger}_{\mathbb{k}} e^{ikx} \right) a^{\dagger}_{\mathbb{p}} | 0 \rangle \\ &= e^{-ipx} = e^{-i(E_{\mathbb{p}} t - \mathbb{p}\cdot\mathbb{x})}\end{aligned}$$

が一粒子波動関数。複素共役を

(38) $\langle \mathbb{p} | = \langle 0 | a_{\mathbb{p}} = (|\mathbb{p}\rangle)^{\dagger}$

とすると、

(39) $\langle \mathbb{p} | \phi(x) | 0 \rangle = e^{ipx} = \langle 0 | \phi(x) | \mathbb{p} \rangle^*$

(40) $\phi(x)^* = \phi(x)$

なので $\phi(x)$ は実スカラー場と呼ばれる。

2005. 4. 22

摂動論による散乱(遷移)振幅の計算

(41) $\mathcal{L} = \mathcal{L}_0 + \mathcal{L}_I$

とし、$\mathcal{L}_0$ は (1)式、$\mathcal{L}_I$ は例えば

(42) $\mathcal{L}_I = -V_I = -\frac{\lambda}{3!}\phi(x)^3$

とする。始状態を $|p_1, p_2\rangle = a^\dagger_{p_1} a^\dagger_{p_2}|0\rangle$，終状態を $|p_3, p_4\rangle = a^\dagger_{p_3} a^\dagger_{p_4}|0\rangle$

とすると，それらは共に $\mathcal{L}_0$ の解で表わせる (35)式。遷移振幅は，

(43) $S_{fi} = \langle p_3, p_4| T e^{-i\int \mathcal{H}_I d^3x dt} |p_1, p_2\rangle \qquad T e^{-i\int_{t_1}^{t_2} H_I dt}$

を $\mathcal{H}_I = V_I = -\mathcal{L}_I$ の展開で解く。T は時間順序積で

(44) $\int \mathcal{H}_I d^3x = H_I$

とすると

(45) $$T e^{-i\int H_I t} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} \underbrace{T \prod_{k=1}^{n} \left[\int_{t_{k0}}^{t_{k1}} [-iH_I(t_k)]dt_k\right]}_{\underset{\to+\infty}{t_{n1}} > t_{n0} = t_{(n-1)1} > t_{(n-1)0} = t_{(n-2)1} > \cdots > t_{20} = t_{11} > \underset{\to-\infty}{t_{10}}}$$

$$= T e^{i\int \mathcal{L}_I d^4x}$$

相互作用 (42) の例では 2次 (λ^2) の項が S_{fi} に寄与する：

(46) $$S_{fi}^{(2)} = \langle 0| a_{p_3} a_{p_4} \frac{1}{2!} T\left[\int -\frac{i\lambda}{3!}\phi(x)^3 d^4x\right]\cdot\left[\int -\frac{i\lambda}{3!}\phi(y)^3 d^4y\right] a^\dagger_{p_1} a^\dagger_{p_2}|0\rangle$$

これは，上式の $\phi(x)$，$\phi(y)$ に (35)式の展開式を代入し，(34)の規格化された

交換関係を使って計算できます。唯一

(47) $\langle 0|T\phi(x)\phi(y)|0\rangle = \theta(x^0-y^0)\langle 0|\phi(x)\phi(y)|0\rangle + \theta(y^0-x^0)\langle 0|\phi(y)\phi(x)|0\rangle$

が外線の $a^\dagger_{p_1}, a^\dagger_{p_2}, a_{p_3}, a_{p_4}$ とキャンセルせずに残ります。

(48) $\langle 0|\, a_k\, a^\dagger_{k'}\, |0\rangle = 2E_k (2\pi)^3 \delta^3(k-k')$

の寄与だけが残るので、(47)式は、点yで粒子が生成され、点xで消滅する寄与$(x^0>y^0)$と、その逆過程（実粒子なので、反粒子=粒子）の和となります。

(48)式を使って計算すると

$$(49)\quad \langle 0|T\phi(x)\phi(y)|0\rangle = \theta(x^0-y^0)\int\frac{d^3k}{(2\pi)^3 2E_k}e^{-ik(x-y)} + \overbrace{\int\frac{d^3k}{(2\pi)^3 2E_k}e^{-ik(y-x)}}^{\theta(y^0-x^0)}$$

$$= \int\frac{d^3k}{(2\pi)^3}\left[\theta(x^0-y^0)\frac{1}{2E_k}e^{-ik(x-y)} - \theta(y^0-x^0)\frac{1}{2E_k}e^{ik(x-y)}\right]$$

$\hookrightarrow d^3k \to -d^3(-k)$

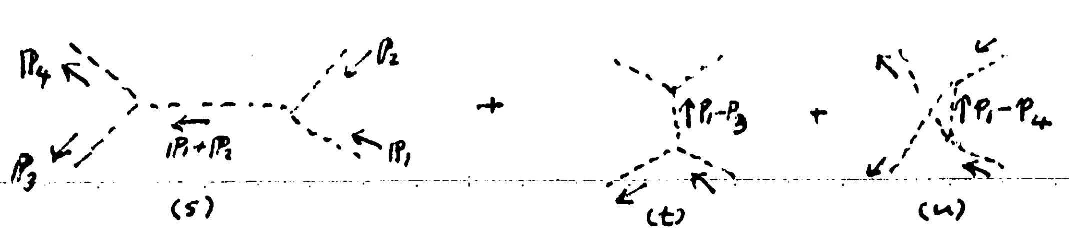
$$= \int\frac{d^4k}{(2\pi)^4}\underbrace{\frac{i}{k^2-m^2+i\varepsilon}}_{\text{Feynman Propagator}}e^{-ik(x-y)}$$

$$\frac{i}{(k^0-E_k+i\varepsilon)(k^0+E_k-i\varepsilon)}$$

散乱振幅は次の様になり、

(50)

(51)



2005. 4.22

複素スカラー場の場合は $\phi^*(x) \neq \phi(x)$ なので展開は

(52) $$\phi(x) = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3 2E_{\mathbb{p}}} \left[a_{\mathbb{p}} e^{-ipx} + b_{\mathbb{p}}^{\dagger} e^{ipx} \right]_{p^0 = E_{\mathbb{p}} = \sqrt{|\mathbb{p}|^2 + m^2}}$$

$$\phi^*(x) = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3 2E_{\mathbb{p}}} \left[a_{\mathbb{p}}^{\dagger} e^{ipx} + b_{\mathbb{p}} e^{-ipx} \right]_{p^0 = E_{\mathbb{p}} = \sqrt{|\mathbb{p}|^2 + m^2}}$$

となります。

(53) $$\left.\begin{aligned} [a_{\mathbb{p}}, a_{\mathbb{p}'}^{\dagger}] &= 2E_{\mathbb{p}} (2\pi)^3 \delta^3(\mathbb{p} - \mathbb{p}') \\ [b_{\mathbb{p}}, b_{\mathbb{p}'}^{\dagger}] &= 2E_{\mathbb{p}} (2\pi)^3 \delta^3(\mathbb{p} - \mathbb{p}') \end{aligned}\right\} \text{それ以外は全て交換}$$

とし、$a_{\mathbb{p}}|0\rangle = b_{\mathbb{p}}|0\rangle = 0$ で真空を決めると、

(54) $$\left.\begin{aligned} |\mathbb{p}\rangle &= a_{\mathbb{p}}^{\dagger}|0\rangle \quad \text{を粒子 一ヶ} \\ |\mathbb{p}'\rangle &= b_{\mathbb{p}}^{\dagger}|0\rangle \quad \text{を反粒子 一ヶ} \end{aligned}\right\} \text{の状態と考えると、}$$

(13)の運動方程式より、粒子と反粒子は同じ運動方程式に従う(同じ質量)。

Q(16) は(粒子数)−(反粒子数)となり、H(26), P^i(27) は粒子と反粒子の和となる。

Feynman Propagator の形 $\overbrace{\text{は全く}}^{(49)と}$ 同じだが、

(55) $$\langle 0|T\phi(x)\phi^*(y)|0\rangle = \theta(x^0 - y^0)\langle 0|\phi(x)\phi^*(y)|0\rangle + \theta(y^0 - x^0)\langle 0|\phi^*(y)\phi(x)|0\rangle$$

$$= \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{i}{k^2 - m^2 + i\varepsilon} e^{-ik(x-y)}$$

今度は、第一項が y で粒子が生成 x で消滅する寄与、第二項は
x で反粒子が生成 y で消滅する寄与
の和として表わされる。

2005. 4.22

質量ゼロ,実ヴェクトル場(光子,グルオン)の場合

(56) $$A^\mu(x) = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3 2E_p} \sum_{\lambda=\pm1} \left[a_{p,\lambda}\varepsilon^\mu(p,\lambda)e^{-ipx} + a^\dagger_{p,\lambda}\varepsilon^\mu(p,\lambda)^* e^{+ipx} \right]_{p^0=E_p=|p|}$$

ここで $A^\mu(x)$ は4成分の実場だが,物理的成分は $\lambda=\pm$ の2ヶ(ヘリシティーが±1,横波成分)しかない。Feynman Propagator を,この物理的成分の寄与の和と表わすと,

(57) $$\langle 0|TA^\mu(x)A^\nu(y)|0\rangle = \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{i}{k^2-m^2+i\varepsilon} \sum_\lambda \varepsilon^\mu(k,\lambda)\varepsilon^\nu(k,\lambda)^* e^{-ikx}$$

ここで,k が3軸方向を向いていたとすると,

(58) $$\varepsilon^\mu(k,\lambda) = \frac{1}{\sqrt2}(-\lambda\varepsilon^\mu_x - i\varepsilon^\mu_y) = \underbrace{(-\lambda)}_{\text{位相のコンベンション}}\frac{\varepsilon^\mu_x + i\lambda\varepsilon^\mu_y}{\sqrt2} = \frac{1}{\sqrt2}(0, \mp1, -i, 0)$$

なので

(51) $$\sum_\lambda \varepsilon^\mu(k,\lambda)\varepsilon^\nu(k,\lambda)^* = \varepsilon^\mu_x\varepsilon^\nu_x + \varepsilon^\mu_y\varepsilon^\nu_y = \begin{pmatrix} 0 & & & \\ & 1 & & \\ & & 1 & \\ & & & 0 \end{pmatrix}$$

となります。これを covariant に書こうとすると,k^μ の他に $n\cdot k \neq 0$ のベクトルがもう1つ必要です。$n^2=1$ とすると

(52) $$\sum_\lambda \varepsilon^\mu(k,\lambda)\varepsilon^\nu(k,\lambda)^* = -g^{\mu\nu} + \frac{k^\mu n^\nu + k^\nu n^\mu}{k\cdot n} - \frac{k^\mu k^\nu}{(k\cdot n)^2}$$; axial gauge

$n^\mu=(1,0,0,0)$ frame で $k^\mu=(k,0,0,k)$ とれば,(51)はすぐに求まります。

光子,グルオンの物理的状態だけが寄与する場合は(52)式の様に n^μ というベクトルが必要なこと,振幅 $T = M_\mu\varepsilon^\mu(k,\lambda)$ が $M_\mu k^\mu = 0$ を満たす場合は,(52)式の $-g^{\mu\nu}$ 項だけが寄与することを覚えておいて下さい。 //

2005. 4. 21

Dirac 場 (スピン$\frac{1}{2}$の粒子の場)

スピン$\frac{1}{2}$の場合、$J_z=\pm\frac{1}{2}$ の成分しかないので、2成分の場で表現できそうだ。

実際、質量ゼロのディラック粒子は、ヘリシティー(運動量方向のスピン$\frac{\mathbf{p}\cdot\mathbf{J}}{|\mathbf{p}|}$の固有値)が変化しないので、2成分で表示される。ヘリシティーが1個しかないのに2成分になるのは、粒子が$\lambda=+\frac{1}{2}$なる反粒子の$\lambda=-\frac{1}{2}$だからである。質量が有限だと、$\lambda=+\frac{1}{2}$の粒子と$\lambda=-\frac{1}{2}$の粒子の混合が起こり、4成分場で表示される。

QCD for Collider Physics III

2005. 5. 5

まずは前回の反省から.

p.43 の Feynman Propagator の導出をもう少していねいにやってみます。

まず

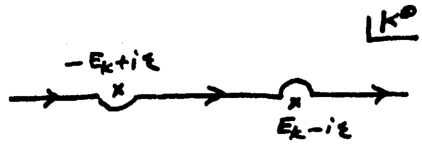
(53) $$\langle 0|\phi(x)\phi(y)|0\rangle = \langle 0|\int\frac{d^3k}{(2\pi)^3 2E_{\mathbb{k}}}\left(a_{\mathbb{k}}e^{-ikx}+\cdots\right)\int\frac{d^3p}{(2\pi)^3 2E_{\mathbb{p}}}\left(\cdots+a_{\mathbb{p}}^{\dagger}e^{+ipy}\right)|0\rangle$$
$$= \langle 0|\int\frac{d^3k}{(2\pi)^3 2E_{\mathbb{k}}}\int\frac{d^3p}{(2\pi)^3 2E_{\mathbb{p}}}\,2E_{\mathbb{k}}(2\pi)^3\delta^3(\mathbb{k}-\mathbb{p})\,e^{-ik(x-y)}|0\rangle$$
$$= \int\frac{d^3k}{(2\pi)^3 2E_k}\,e^{-ik(x-y)}$$

ここで (34) の normalization

(54) $$\langle 0|a_{\mathbb{k}}a_{\mathbb{p}}^{\dagger}|0\rangle = \langle 0|[a_{\mathbb{k}},a_{\mathbb{p}}^{\dagger}]|0\rangle = 2E_{\mathbb{p}}(2\pi)^3\delta^3(\mathbb{p}-\mathbb{k})$$

を用いました。 (44)式は逆の方向で示してみます。

(55) $$D_F(x-y) = \int\frac{d^4k}{(2\pi)^4}\,\frac{i}{k^2-m^2+i\epsilon}\,e^{-ik(x-y)}$$
$$= \int\frac{d^3k\,dk^0}{(2\pi)^4}\,\frac{i}{(k^0)^2-E_k^2+i\epsilon}\,e^{-ik(x-y)}$$
$$= \int\frac{d^3k\,dk^0}{(2\pi)^4}\,\frac{i\,e^{-ik(x-y)}}{(k^0-(E_k-i\epsilon))(k^0+(E_k-i\epsilon))}$$



ここで $\int_{-\infty}^{\infty}dk^0$ をするのですが、 $x^0-y^0=t>0$ ならば e^{-ik^0t} は $\mathrm{Im}\,k^0<0$(下側) で減衰、 $x^0-y^0=-t<0$ ならば $e^{-ik^0(x^0-y^0)}=e^{ik^0t}$ は $\mathrm{Im}\,k^0>0$(上側) で減衰する。

ここに注意すると、

(56) $$D_F(x-y) = \int\frac{d^3k}{(2\pi)^4}\left\{\theta(x^0-y^0)\int dk^0\,\frac{i\,e^{-ik(x-y)}}{(k^0-(E_k-i\epsilon))2E_k} + \theta(y^0-x^0)\int dk^0\,\frac{i\,e^{-ik(x-y)}}{(-2E_k)(k^0+E_k-i\epsilon)}\right.$$

(56)′ $$D_F(x-y) = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^4}\left\{\theta(x^0-y^0)\int dk^0\left[i(-2\pi i)\delta(k^0-E_k)\frac{e^{-ik(x-y)}}{2E_k}\right]\right.$$
$$\left. + \theta(y^0-x^0)\int dk^0\left[i(2\pi i)\delta(k^0+E_k)\frac{e^{-ik(x-y)}}{2E_k}\right]\right\}$$
$$= \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3 2E_k}\left\{\theta(x^0-y^0)\, e^{-i(E_k(x^0-y^0)-\mathbf{k}(\mathbf{x}-\mathbf{y}))} - \theta(y^0-x^0)\, e^{-i(E_k(y^0-x^0)-\mathbf{k}(\mathbf{x}-\mathbf{y}))}\right\}$$
★ $$= \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3 2E_k}\left\{\theta(x^0-y^0)\, e^{-ik(x-y)} + \theta(y^0-x^0)\, e^{-i(E_k(y^0-x^0)-\mathbf{k}(\mathbf{y}-\mathbf{x}))}\right\}$$
$$= \theta(x^0-y^0)\langle 0|\phi(x)\phi(y)|0\rangle + \theta(y^0-x^0)\langle 0|\phi(y)\phi(x)|0\rangle$$
$$\equiv \langle 0|T\phi(x)\phi(y)|0\rangle$$

In the 3'rd line of (56)′, ★の行で、 $d^3\mathbf{k} \to -d^3(-\mathbf{k}) = -d^3\mathbf{k}'$ とした。

(57) $$D_F(x-y) \equiv \langle 0|T\phi(x)\phi(y)|0\rangle = \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4}\underbrace{\frac{i}{k^2-m^2+i\varepsilon}}_{\tilde{D}_F(k)} e^{-ik(x-y)}$$

はとても大切です。$i\varepsilon$の符号は、non-relativisticな共鳴散乱として

(58) $$\frac{1}{E-(E_k-i\varepsilon)} \Rightarrow e^{-iEt} = e^{-i(E_k-i\varepsilon)t} = e^{-iE_kt-\varepsilon t}$$

となること。それから、relativisticな resonance 散乱では $s=E^2$ として

(59) $$\frac{1}{s-m^2+im\Gamma} \approx \frac{1}{E^2-(m-\frac{i}{2}\Gamma)^2} \Rightarrow e^{-iEt} = e^{-i(m-\frac{i}{2}\Gamma)t} = e^{-imt-\frac{\Gamma}{2}t} = \psi(t)$$
$$|\psi(t)|^2 = e^{-\Gamma t} = e^{-t/\tau}$$

となることにも関係するものです。ここで $\tau=\frac{1}{\Gamma}$ は寿命です。

符号を間違えると、発散してしまいます。

次に (50)式' の計算をやってみます。(46)式' で、

$$(60)\quad S_{fi}^{(2)} = \langle 0|a_{p_3}a_{p_4}\underbrace{\frac{1}{2!}}_{x,\,y\text{ の順序}} T\left[\int d^4x\left[-\frac{i\lambda}{3!}\phi(x)^3\right]\right]\left[\int d^4y\left[-\frac{i\lambda}{3!}\phi(y)^3\right]\right]a_{p_1}^{\dagger}a_{p_2}^{\dagger}|0\rangle$$

$\phi(x)^3$ から a_{p_1}, a_{p_2} 等を選ぶ方法が $3!$ ある.

$$= (-i\lambda)^2\int d^4x\int d^4y\Big\{e^{ix(p_3+p_4)}\langle 0|T\phi(x)\phi(y)|0\rangle e^{-iy(p_1+p_2)}$$
$$+e^{ix(p_4-p_2)}\langle 0|T\phi(x)\phi(y)|0\rangle e^{-iy(p_1-p_3)}$$
$$+e^{ix(p_3-p_2)}\langle 0|T\phi(x)\phi(y)|0\rangle e^{-iy(p_1-p_4)}\Big\}$$

$$= -\lambda^2\int d^4x\int d^4y\int\frac{d^4k}{(2\pi)^4}\Big\{\frac{i}{k^2-m^2+i\varepsilon}e^{-ik(x-y)}e^{ix(p_3+p_4)}e^{-iy(p_1+p_2)}$$
$$+\ ''\ e^{-ik(x-y)}e^{ix(p_4-p_2)}e^{-iy(p_1-p_3)}$$
$$+\ ''\ e^{-ik(x-y)}e^{ix(p_3-p_2)}e^{-iy(p_1-p_4)}\Big\}$$

$$= -i\lambda^2\int\frac{d^4k}{(2\pi)^4}\frac{1}{k^2-m^2+i\varepsilon}\Big\{(2\pi)^4\delta^4(k-p_3-p_4)(2\pi)^4\delta^4(-k+p_1+p_2)$$
$$+(2\pi)^4\delta^4(k-p_4+p_2)(2\pi)^4\delta^4(-k+p_1-p_3)$$
$$+(2\pi)^4\delta^4(k-p_3+p_2)(2\pi)^4\delta^4(-k+p_1-p_4)\Big\}$$

$$= -i\lambda^2\left\{\frac{1}{(p_1+p_2)^2-m^2+i\varepsilon}+\frac{1}{(p_1-p_3)^2-m^2+i\varepsilon}+\frac{1}{(p_1-p_4)^2-m^2+i\varepsilon}\right\}(2\pi)^4\delta^4(p_1+p_2-p_3-p_4)$$

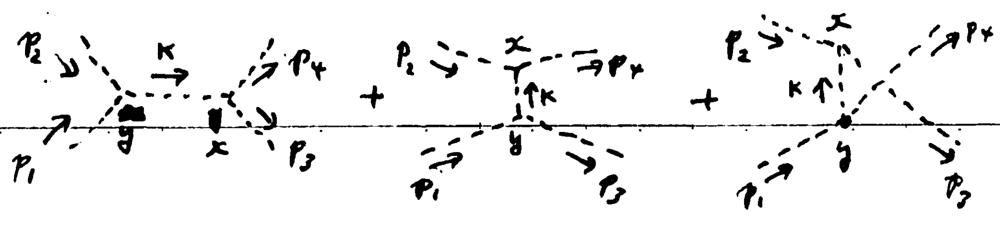
$$= \langle f|\,1+iT\,|i\rangle$$

$$= i\langle f|T|i\rangle = iT_{fi}$$

$$= iM_{fi}(2\pi)^4\delta^4(p_1+p_2-p_3-p_4)$$

$$(61)\quad M_{fi} = -\lambda^2\left\{\frac{1}{(p_1+p_2)^2-m^2+i\varepsilon}+\frac{1}{(p_1-p_3)^2-m^2+i\varepsilon}+\frac{1}{(p_1-p_4)^2-m^2+i\varepsilon}\right\}$$

$$= -\lambda^2\left(\frac{1}{s-m^2}+\frac{1}{t-m^2}+\frac{1}{u-m^2}\right)$$



(60)式で全ての規格化を説明したつもりです。簡単な計算ですのでやって

みて下さい。大切なことは、$\phi(x)$の自由場の生成・消滅演算子による展開式(35)、

共変規格化された交換関係(34)、T積の真空期待値(57)、と

(62) $$\int d^4x\, e^{-ixk} = (2\pi)^4 \delta^4(k)$$

くらいでしょうか。「Feynman Propagator (57)を外線にどうつなぐか」と考えても

正しい散乱振幅が得られます。Feynman図を前ページに示しました。

理論の方は必ず、演算子による計算をマスターして下さい。標準模型やMSSM、

GUT等、多くの粒子が1組(multiplet=多重項)として結合しているときに、

多くの振幅の干渉が重要になるのですが、振幅間の相対的な位相を

最も簡単に求められるのが演算子法です。

振幅(61)から断面積を求めてみましょう。

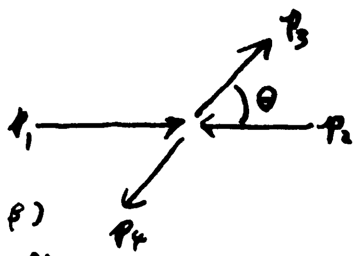
(63) $$d\sigma = \frac{1}{F} |M_{fi}|^2 d\Phi_2$$

ここで共変規格化されたフラックスは

(64)
$$
\begin{aligned}
F &= (2E_1)(2E_2)\,|\vec{v}_1 - \vec{v}_2| \\
&= 4\sqrt{(p_1\cdot p_2)^2 - m_1^2 m_2^2} \\
&= 2\sqrt{s^2 - 2(m_1^2+m_2^2)s + (m_1^2-m_2^2)^2} \qquad \cdots\ s=(p_1+p_2)^2 = 2p_1\cdot p_2 + m_1^2 + m_2^2 \\
&= \begin{cases} 4p_1\cdot p_2 = 2(p_1+p_2)^2 = 2s & \cdots\ m_1=m_2=0 \\ 2s\sqrt{1-4m^2/s} & \cdots\ m_1=m_2=m \\ 4p_1 m_2 & \cdots\ p_2^\mu=(m_2,0,0,0)\ \text{frame で}\ p_1^\mu=(E_1,0,0,p_1) \end{cases}
\end{aligned}
$$

(65) $$d\sigma = \frac{1}{2s\sqrt{1-4m^2/s}}\ \lambda^4 \left|\frac{1}{s-m^2}+\frac{1}{t-m^2}+\frac{1}{u-m^2}\right|^2 \frac{1}{8\pi}\sqrt{1-\frac{4m^2}{s}}\ \frac{d\cos\theta}{2}\ \frac{d\phi}{2\pi}$$

(66) $$\frac{d\sigma}{d\cos\theta} = \frac{\lambda^4}{32\pi s}\left|\frac{1}{s-m^2}+\frac{1}{t-m^2}+\frac{1}{u-m^2}\right|^2$$



(67)
$$s = (p_1+p_2)^2 = 4E^2$$
$$t = (p_1-p_3)^2 = 2m^2 - 2E^2(1-\beta\cos\theta)$$
$$u = (p_1-p_4)^2 = 2m^2 - 2E^2(1+\beta\cos\theta)$$

$$p_1^\mu = E(1,0,0,\beta)$$
$$p_2^\mu = E(1,0,0,-\beta)$$
$$p_3^\mu = E(1,\beta\sin\theta,0,\beta\cos\theta)$$
$$p_4^\mu = E(1,-\beta\sin\theta,0,-\beta\cos\theta)$$

(67)式の s, t, u は それぞれ「s-, t-, u-channel に粒子が交換される過程」という表現を使うことが多いので覚えて下さい。(61)式の Feynman図で左から s, t, u です。

最後に一つだけ大切な注意。この例では $\vec{p}_3$ の粒子と $\vec{p}_4$ の粒子は区別がつきません。(これこそ量子力学の不思議ですよね。) その為、(67)の $(\cos\theta, \phi)$ による phase space の parametrization で、一般の場合のように

(68) $-1 \leq \cos\theta \leq 1$, $0 \leq \phi \leq 2\pi$

ととると、2重にカウントされてしまいます。2重カウントをさける為には、例えば

(69) $0 \leq \cos\theta \leq 1$, $0 \leq \phi \leq 2\pi$

とするのが一番理解しやすいです。$0 \leq \cos\theta \leq 1$ の粒子を $\vec{p}_1$ の粒子と呼ぶわけです。

全断面積は　そうすれば(66)式は正しく、

(70) $$\sigma_{tot} = \int_0^1 d\cos\theta\ \underbrace{\frac{d\sigma}{d\cos\theta}}_{(66)\text{式}}$$

となります。

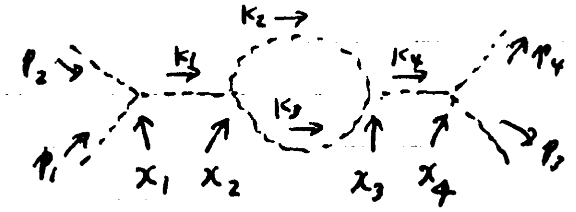
ここでループの計算もやってみましょう。「大して難しいことではない」ということだけでも分かっておくことは大切です。正確な計算は理論家(とか計算機)にまかせれば良いです。

(60)式の $p_1+p_2 \to p_3+p_4$ 過程で、摂動の4次になると、

(70) $$S^{(4)}_{fi} = \langle 0|\, a_{p_3} a_{p_4} \underbrace{\frac{1}{4!}}_{} T\left[\int \frac{-i\lambda}{3!}\phi(x_4)^3 d^4x_4\right]\left[\int \frac{-i\lambda}{3!}\phi(x_3)^3 d^4x_3\right]\left[\int \frac{-i\lambda}{3!}\phi(x_2)^3 d^4x_2\right]\left[\int \frac{-i\lambda}{3!}\phi(x_1)^3 d^4x_1\right] a^\dagger_{p_1} a^\dagger_{p_2}|0\rangle$$

(x_1, x_2, x_3, x_4)の順序が4!通り.

これを全部やると手がくたびれるので、次の図に対応する部分だけやってみます。

(71)


(72) $$S^{(4)}_{fi} = \frac{(-i\lambda)^4}{2!}\int d^4x_4 \int d^4x_3 \int d^4x_2 \int d^4x_1\, e^{ix_4(p_3+p_4)} e^{-ix_1(p_1+p_2)}$$

$$\langle 0|T\phi(x_4)\phi(x_3)|0\rangle \underbrace{\langle 0|T\phi(x_3)\phi(x_2)|0\rangle \langle 0|T\phi(x_3)\phi(x_2)|0\rangle} \langle 0|T\phi(x_2)\phi(x_1)|0\rangle$$

全く同じものを2回カウントするので $\frac{1}{2!}$ で割っておく。

$$= \frac{\lambda^4}{2}\int d^4x_4 \int d^4x_3 \int d^4x_2 \int d^4x_1\, e^{ix_4(p_3+p_4)} e^{-ix_1(p_1+p_2)} \int \frac{d^4k_1}{(2\pi)^4}\int \frac{d^4k_2}{(2\pi)^4}\int \frac{d^4k_3}{(2\pi)^4}\int \frac{d^4k_4}{(2\pi)^4}$$
$$\frac{i e^{-ik_1(x_2-x_1)}}{k_1^2-m^2+i\varepsilon}\ \frac{i e^{-ik_2(x_3-x_2)}}{k_2^2-m^2+i\varepsilon}\ \frac{i e^{-ik_3(x_3-x_2)}}{k_3^2-m^2+i\varepsilon}\ \frac{i e^{-ik_4(x_4-x_3)}}{k_4^2-m^2+i\varepsilon}$$

$$= \frac{\lambda^4}{2}\int \frac{d^4k_1}{(2\pi)^4}\int \frac{d^4k_2}{(2\pi)^4}\int \frac{d^4k_3}{(2\pi)^4}\int \frac{d^4k_4}{(2\pi)^4} \frac{\overbrace{(2\pi)^4\delta^4(p_1+p_2-k_1)}\overbrace{(2\pi)^4\delta^4(k_1-k_2-k_3)}\overbrace{(2\pi)^4\delta^4(k_2+k_3-k_4)}\overbrace{(2\pi)^4\delta^4(k_4-p_3-p_4)}}{(k_1^2-m^2+i\varepsilon)(k_2^2-m^2+i\varepsilon)(k_3^2-m^2+i\varepsilon)(k_4^2-m^2+i\varepsilon)}$$

$$= \frac{\lambda^4}{2}\int \frac{d^4k_3}{(2\pi)^4}\ \frac{1}{(p_1+p_2)^2-m^2+i\varepsilon}\ \frac{1}{(p_1+p_2-k_3)^2-m^2+i\varepsilon}\ \frac{1}{k_3^2-m^2+i\varepsilon}\ \frac{1}{(p_3+p_4)^2-m^2+i\varepsilon}\ (2\pi)^4\delta^4(p_1+p_2-p_3-p_4)$$

$$\equiv i M^{(4)}_{fi} (2\pi)^4 \delta^4(p_1+p_2-p_3-p_4)$$

$M_{fi}^{(4)}$ は (60)式と同様、$i(2\pi)^4\delta^4(p_1+p_2-p_3-p_4)$ をくくります。

(73) $$M_{fi}^{(4)} = \frac{\lambda^4}{2i}\frac{1}{(p_1+p_2)^2-m^2+i\varepsilon}\left[\int\frac{d^4k}{(2\pi)^4}\frac{1}{k^2-m^2+i\varepsilon}\frac{1}{(p_1+p_2-k)^2-m^2+i\varepsilon}\right]\frac{1}{(p_3+p_4)^2-m^2+i\varepsilon}$$

ここで

(74) $$p_1+p_2=p_3+p_4=q$$

を導入して、

(75) $$M_{fi}^{(4)} = \frac{\lambda^4}{(q^2-m^2+i\varepsilon)^2}\frac{1}{2}\underbrace{\left[\frac{1}{i}\int\frac{d^4k}{(2\pi)^4}\frac{1}{k^2-m^2+i\varepsilon}\frac{1}{(q-k)^2-m^2+i\varepsilon}\right]}_{F(q^2)}$$

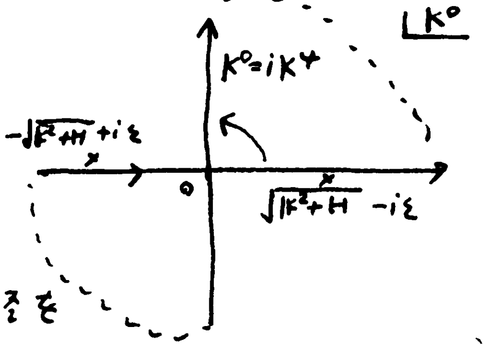
(76) $$\begin{aligned}F &= \frac{1}{i}\int\frac{d^4k}{(2\pi)^4}\frac{1}{k^2-m^2+i\varepsilon}\frac{1}{(q-k)^2-m^2+i\varepsilon}\\ &= \frac{1}{i}\int_0^1 dx\int\frac{d^4k}{(2\pi)^4}\frac{1}{[(1-x)(k^2-m^2+i\varepsilon)+x((q-k)^2-m^2+i\varepsilon)]^2}\\ &= \frac{1}{i}\int_0^1 dx\int\frac{d^4k}{(2\pi)^4}\frac{1}{[k^2-2xq\cdot k+xq^2-m^2+i\varepsilon]^2}\\ &= \frac{1}{i}\int_0^1 dx\int\frac{d^4k}{(2\pi)^4}\frac{1}{[(k-xq)^2-x^2q^2+xq^2-m^2+i\varepsilon]^2}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{1}{AB} &= \int_0^1 dx\frac{1}{[xA+(1-x)B]^2}\\ &= \int_0^1 dx\frac{1}{((A-B)x+B)^2}\\ &= \frac{1}{B-A}\int d\frac{1}{(A-B)x+B}\\ &= \frac{1}{B-A}\left[\frac{1}{(A-B)x+B}\right]_0^1\\ &= \frac{1}{B-A}\left(\frac{1}{A}-\frac{1}{B}\right) = \frac{1}{AB}\end{aligned}$$

ここで $k-xq=k'$ に積分変数を換えて、

(77) $$\begin{aligned}F &= \frac{1}{i}\int_0^1 dx\int\frac{d^4k'}{(2\pi)^4}\frac{1}{[k'^2+x(1-x)q^2-m^2+i\varepsilon]^2}\\ &= \frac{1}{i}\int_0^1 dx\int\frac{d^4k}{(2\pi)^4}\frac{1}{[k^2-H+i\varepsilon]^2}\end{aligned}$$

(78) $$H = m^2-x(1-x)q^2$$



更に $q^2<0$ のとき $H>0$ であることを考えて、k^0の積分路を

(79) $k^0 = ik^4$; $-\infty < k^4 < \infty$ [Wick rotation]

と変更して良い。

(79)
$$\begin{cases} d^4k = dk^0dk^1dk^2dk^3 = i\,dk^1dk^2dk^3dk^4 = i\,d^4k_E \\ k^2 = k^{0\,2} - \boldsymbol{k}^2 = -(k^4)^2 - \boldsymbol{k}^2 = -\left[(k^1)^2 + (k^2)^2 + (k^3)^2 + (k^4)^2\right] \equiv -k_E^2 \end{cases}$$

(80)
$$F = \int_0^1 dx \int \frac{d^4k_E}{(2\pi)^4} \frac{1}{[-k_E^2 - H + i\varepsilon]^2}$$

d^4k_E を4次元の極座標で表わすと、

(81)
$$(k_E^1, k_E^2, k_E^3, k_E^4) = |k_E|\,(\sin\theta_1\sin\theta_2\cos\phi,\ \sin\theta_1\sin\theta_2\sin\phi,\ \sin\theta_1\cos\theta_2,\ \cos\theta_1)$$

(82)
$$d^4k_E = \frac{\partial(k_E^1, k_E^2, k_E^3, k_E^4)}{\partial(|k_E|, \theta_1, \theta_2, \phi)}\, d|k_E|\,d\theta_1 d\theta_2 d\phi$$

$$= \frac{\partial(k_E^1, k_E^2, k_E^3, k_E^4)}{\partial(|k_E|, k_E^2, k_E^3, k_E^4)} \frac{\partial(|k_E|, k_E^2, k_E^3, k_E^4)}{\partial(|k_E|, \theta_1, \theta_2, \theta_3)}\, d|k_E|\,d\theta_1 d\theta_2 d\phi$$

$$= \frac{\partial\sqrt{|k_E|^2 - (k_E^2)^2 - (k_E^3)^2 - (k_E^4)^2}}{\partial|k_E|}\ |k_E|^3\ \frac{\partial(\sin\theta_1\sin\theta_2\sin\phi,\ \sin\theta_1\cos\theta_2,\ \cos\theta_1)}{\partial(\theta_1, \theta_2, \phi)}\, d|k_E|\,d\theta_1 d\theta_2 d\phi$$

$$= \frac{|k_E|^4}{k_E^1} \begin{vmatrix} * & * & -\sin\theta_1 \\ * & -\sin\theta_1\sin\theta_2 & 0 \\ +\sin\theta_1\sin\theta_2\cos\phi & 0 & 0 \end{vmatrix}\, d|k_E|\,d\theta_1 d\theta_2 d\phi$$

$$= |k_E|^3 d|k_E|\ \frac{\sin^3\theta_1\sin^2\theta_2\cos\phi}{\sin\theta_1\sin\theta_2\cos\phi}\, d\theta_1 d\theta_2 d\phi$$

$$= |k_E|^3 d|k_E|\ \sin^2\theta_1\sin\theta_2\, d\theta_1 d\theta_2 d\phi$$

$$= \frac{1}{2}|k_E|^2 d|k_E|^2\ \underbrace{\sqrt{1-\cos^2\theta_1}\, d\cos\theta_1}\ \underbrace{d\cos\theta_2}\ \underbrace{d\phi}$$

$$\rightarrow \frac{1}{2}|k_E|^2 d|k_E|^2 \cdot \frac{\pi}{2} \cdot 2 \cdot 2\pi$$

$$= \pi^2 |k_E|^2 d|k_E|^2$$

2005. 5 . 5

(83)
$$
\begin{aligned}
F_1 &= \int_0^1 dx \int \frac{\pi^2 d|k_E|^2}{(2\pi)^4} \frac{|k_E|^2}{(|k_E|^2 + H - i\varepsilon)^2} \\
&= \frac{1}{(4\pi)^2} \int_0^1 dx \int_0^{\Lambda^2} dt \, \frac{t}{(t+H-i\varepsilon)^2} \\
&= \frac{1}{(4\pi)^2} \int_0^1 dx \int_0^{\Lambda^2} dt \, \frac{t+H-H}{(t+H-i\varepsilon)^2} \\
&= \frac{1}{(4\pi)^2} \int_0^1 dx \int_0^{\Lambda^2} dt \left[\frac{1}{t+H-i\varepsilon} - \frac{H}{(t+H-i\varepsilon)^2} \right] \\
&= \frac{1}{(4\pi)^2} \int_0^1 dx \left[\ln (t+H-i\varepsilon) + \frac{H}{t+H-i\varepsilon} \right]_0^{\Lambda^2} \\
&= \frac{1}{(4\pi)^2} \int_0^1 dx \left[\ln \frac{\Lambda^2+H-i\varepsilon}{H-i\varepsilon} + \frac{H}{\Lambda^2+H-i\varepsilon} - \frac{H}{H-i\varepsilon} \right] \\
&= \frac{1}{(4\pi)^2} \int_0^1 dx \left[\ln \frac{\Lambda^2}{H-i\varepsilon} - 1 + O\left(\frac{H}{\Lambda^2}\right) \right] \\
&\equiv \frac{1}{(4\pi)^2} B_0 (q^2 ; m, m)
\end{aligned}
$$

(84)
$$
B_0 = \ln \Lambda^2 - 1 - \int_0^1 dx \ln [m^2 - q^2 x(1-x) - i\varepsilon]
$$

(84)の積分は

(85) $q^2 = -Q^2 < 0$

のときは簡単に実行できる.

(86)
$$
\int_0^1 dx \ln [\underbrace{m^2 + Q^2 x(1-x)}_{\text{常に} > 0 \text{ なので位相は現われない.}} - i\varepsilon]
$$

$$
= \int_0^1 dx \ln [Q^2 (x-\alpha_-)(\alpha_+ - x)]
$$

(87)
$$
\begin{cases}
\alpha_\pm = \dfrac{1 \pm \sqrt{1+4m^2/Q^2}}{2} \\
\alpha_+ + \alpha_- = 1 \\
\alpha_+ \alpha_- = -m^2/Q^2
\end{cases}
\qquad \alpha_- < 0 < x < 1 < \alpha_+
$$

(88) $B_0 = \ln \Lambda^2 - 1 - \ln Q^2 - \int_0^1 dx \left[\ln (x-\alpha_-) + \ln (\alpha_+ - x) \right]$

$$= \ln \frac{\Lambda^2}{Q^2} - 1 - \Big[(x-\alpha_-)\left[\ln(x-\alpha_-) - 1 \right] - (\alpha_+ - x)\left[\ln(\alpha_+ - x) - 1 \right] \Big]_0^1$$

$$= \ln \frac{\Lambda^2}{Q^2} - 1 - \left[(x-\alpha_-)\ln(x-\alpha_-) - (\alpha_+ - x)\ln(\alpha_+ - x) - 2x + 1 \right]_0^1$$

$$= \ln \frac{\Lambda^2}{Q^2} - 1 - \left[(1-\alpha_-)\ln(1-\alpha_-) - (\alpha_+ - 1)\ln(\alpha_+ - 1) - 2 - (-\alpha_-)\ln(-\alpha_-) + \alpha_+ \ln \alpha_+ \right]$$

$$= \ln \frac{\Lambda^2}{Q^2} + 1 - \left[2\alpha_+ \ln \alpha_+ + 2\alpha_- \ln(-\alpha_-) \right]$$

$$= \ln \frac{\Lambda^2}{Q^2} + 1 - \left[(1+\beta)\ln\frac{(1+\beta)}{2} + (1-\beta)\ln\frac{(\beta-1)}{2} \right] \qquad ; \beta = \sqrt{1+\frac{4m^2}{Q^2}}$$

$$= \ln \frac{\Lambda^2}{Q^2} + 1 - \left[\ln\frac{(\beta+1)(\beta-1)}{4} + \beta \ln \frac{\beta+1}{\beta-1} \right]$$

$$= \ln \frac{\Lambda^2}{Q^2} + 1 - \ln \frac{\cancel{4}m^2}{Q^2} - \beta \ln \frac{\beta+1}{\beta-1}$$

$$= \ln \frac{\Lambda^2}{\cancel{4}m^2} + 1 - \beta \ln \frac{\beta+1}{\beta-1}$$

(89) $Q^2 \gg m^2 \Rightarrow \beta = 1 + \frac{2m^2}{Q^2}$, $\ln \frac{2}{\frac{2m^2}{Q^2}} = \ln \frac{Q^2}{m^2}$; $\ln\frac{\beta+1}{\beta-1} = \ln \frac{(\beta+1)^2}{\beta^2-1} = 2\ln\frac{Q}{2m}(\beta+1)$

$$= 2\ln\frac{Q}{2m}\left(1+1+\frac{2m^2}{Q^2}\right)$$

$$= 2\ln\frac{Q}{m}\left(1+\frac{m^2}{Q^2}\right)$$

$$= 2\left(\ln\frac{Q}{m} + \ln\left(1+\frac{m^2}{Q^2}\right)\right)$$

$$= \ln\frac{Q^2}{m^2} + \frac{2m^2}{Q^2} + \cdots$$

$$B_0 \longrightarrow \ln\frac{\Lambda^2}{m^2} + 1 - \left(1+\frac{2m^2}{Q^2}\right)\left(\ln\frac{Q^2}{m^2} + \frac{2m^2}{Q^2} + \cdots\right)$$

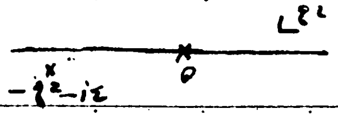
$$= \ln\frac{\Lambda^2}{Q^2} + 1 - \frac{2m^2}{Q^2}\left(\ln\frac{Q^2}{m^2} + 1\right) + \cdots$$

ここで　$q^2 > 4m^2$ のとき，$Q^2 = -q^2 - i\varepsilon$ を代入すると．

(90) $\beta = \sqrt{1 - \frac{4m^2}{q^2 - i\varepsilon}} = \sqrt{1 - \frac{4m^2}{q^2}}$ if $q^2 > 4m^2$

$$\ln\frac{\beta+1}{\beta-1} = \ln\frac{(\beta+1)^2}{\beta^2-1} = \ln\frac{(\beta+1)^2}{\frac{4m^2}{-q^2-i\varepsilon}} = \ln(\beta+1)^2 - \ln(4m^2) + \ln(-q^2-i\varepsilon)$$

(91) $\ln(-q^2 - i\varepsilon) = \ln\big(\underbrace{|q^2|}_{s} e^{-i\pi}\big) = \ln s - i\pi$



従って $q^2 = s > 4m^2$ のとき.

(92) $$B_0 = \ln\frac{\Lambda^2}{m^2} + 1 - \beta\left[\ln\frac{(\beta+1)^2}{\frac{4m^2}{s}} - i\pi\right]\theta(s-4m^2)$$
$$= \ln\frac{\Lambda^2}{m^2} + 1 - \beta\left[\ln\frac{1+\beta}{1-\beta} - i\pi\right]\theta(s-4m^2)$$

(93) $$\mathrm{Im}\, B_0 = \pi\beta\,\theta(s-4m^2)$$

ここまで計算した理由は、ユニタリティー(光学定理), p.14, が示せるからです。

(53)式で-

(94) $$2\,\mathrm{Im}\, M_{ii}^{(4)} = \frac{\lambda^4}{(s-m^2)^2}\frac{1}{2}\,2\,\mathrm{Im}\, F(s)$$
$$= \frac{\lambda^4}{(s-m^2)^2}\frac{1}{\cancel{2}}\cancel{2}\cdot\frac{1}{(4\pi)^2}\mathrm{Im}\, B_0(s)$$
$$= \frac{\lambda^4}{(s-m^2)^2}\frac{1}{16\pi^2}\beta\pi\,\theta(s-4m^2) \quad \cdots (93)$$
$$= \underbrace{\frac{\lambda^4}{(s-m^2)^2}\frac{1}{16\pi}\beta}\,\theta(s-4m^2)$$

一方、(70)式を使って s-channel 過程の全断面積を計算すると.

(95) $$\sigma_{tot} = \frac{1}{2s\beta}\int |M_{fi}^{(2)}|^2 d\Phi_2$$
$$= \frac{1}{2s\beta}\cdot\int_0^1 d\cos\theta\,\frac{\lambda^4\beta}{16\pi\,(s-m^2)^2}$$
$$= \frac{1}{2s\beta}\cdot\underbrace{\frac{\lambda^4}{16\pi}\frac{\beta}{(s-m^2)^2}}$$

従って unitarity の式が成立することが読みとれます.

(96) $$2\,\mathrm{Im}\, M_{ii}^{(4)} = \int |M_{fi}^{(2)}|^2 d\Phi_2$$

(95)式で同種粒子の2重カウントをさける為の $\int_0^1 dm\,\theta$ と、(72)式で2重カウントを補正するために $\frac{1}{2!}$ をかけることが対応しています。

Feynman図間のユニタリティーは Cutkosky則で保証されています。上の例では、

(96)

$$2i\,\mathrm{Im} \cdots = [\cdots] - [\cdots]^*$$

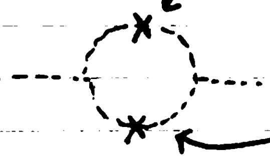
$$= \frac{1}{i}\int\frac{d^4k}{(2\pi)^4}\left[\frac{1}{k^2-m^2+i\varepsilon}\,\frac{1}{(k-q)^2-m^2+i\varepsilon} - \frac{1}{k^2-m^2-i\varepsilon}\,\frac{1}{(k-q)^2-m^2-i\varepsilon}\right]$$

$$= \frac{1}{i}\int\frac{d^4k}{(2\pi)^4}\left[(-2\pi i)\,\delta(k^2-m^2)\,(2\pi i)\,\delta((k-q)^2-m^2)\right]$$

Cutkosky則

証明はやっかいです。

on-shell



on-shell

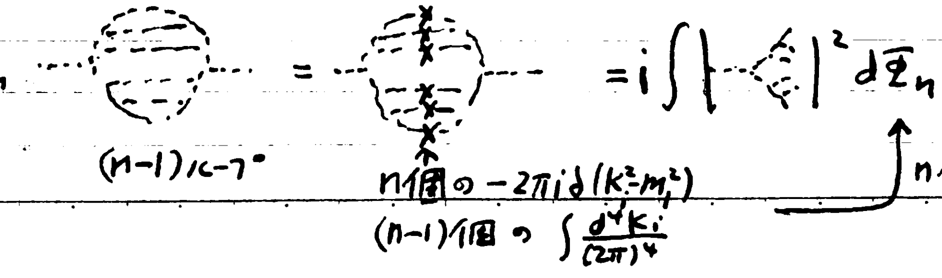
$$= i\int\frac{d^4k}{(2\pi)^2}\,\delta(k^2-m^2)\,\delta((q-k)^2-m^2)$$

$$= i\int\frac{d^3k}{(2\pi)^3\,2E}\,(2\pi)\,\delta((q-k)^2-m^2)$$

$$= i\int d\Phi_2$$ .... p.16, (5)式

ここで、ループ運動量積分が、Im部に対しては、実粒子2体のphase space積分になることが、鍵です。多重ループ積分のIm部は、n粒子生成の寄与について、n体のphase spaceの積分になります。

(97)



$$2i\,\mathrm{Im}\cdots = \cdots = i\int\left|\cdots\right|^2 d\Phi_n$$

ユニタリティーの要請は、例えばベクトルボソンのFeynman Propagatorが、

on-shell のときに

(98) $$\frac{i}{k^2-\cancel{M}^2+i\varepsilon}\left(-g^{\mu\nu}+\cdots\right) \longrightarrow \frac{i}{k^2-\cancel{M}^2+i\varepsilon}\sum_\lambda \varepsilon^\mu(k,\lambda)\varepsilon^\nu(k,\lambda)^*$$

となるなければならないことを意味します。この条件と、くり込み可能性の条件を

同時に満たす為には、ベクトルボソンがゲージボソンである必要があります。

p.45 の (52)式で $n^2=1$ の axial gauge の表式を書いたのですが、

(99) $$n^2=0 \qquad n\cdot k \neq 0$$

のゲージ (light-cone axial gauge) が便利ですので、ここで導入します。

(100) $$k^\mu = k(1,0,0,1) \qquad\qquad k^2=n^2=0$$
$$n^\mu = n(1,0,0,-1) \qquad\qquad k\cdot n = 2kn$$

の frame をとるととても簡単です。

(101) $$\frac{k^\mu}{k}=(1,0,0,1) \qquad \frac{n^\mu}{n}=(1,0,0,-1)$$

なので

(102) $$\frac{1}{2}\left(\frac{k^\mu}{k}+\frac{n^\mu}{n}\right)=(1,0,0,0)\ ,\ \frac{1}{2}\left(\frac{k^\mu}{k}-\frac{n^\mu}{n}\right)=(0,0,0,1)$$

従って

(103) $$\sum_\lambda \varepsilon^\mu(k,\lambda)\varepsilon^\nu(k,\lambda)^* = \begin{pmatrix}0&&&\\&1&&\\&&1&\\&&&0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-1&&&\\&1&&\\&&1&\\&&&1\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}1&&&\\&0&&\\&&0&\\&&&0\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}0&&&\\&0&&\\&&0&\\&&&1\end{pmatrix}$$
$$= -g^{\mu\nu} + \frac{1}{4}\left(\frac{k^\mu}{k}+\frac{n^\mu}{n}\right)\left(\frac{k^\nu}{k}+\frac{n^\nu}{n}\right) - \frac{1}{4}\left(\frac{k^\mu}{k}+\frac{n^\mu}{n}\right)\left(\frac{k^\nu}{k}-\frac{n^\nu}{n}\right)$$

$$\cancel{(104)\quad \sum_\lambda \epsilon^\mu(k,\lambda)\,\epsilon^\nu(k,\lambda)^* = -g^{\mu\nu} + \frac{k^\mu n^\nu + k^\nu n^\mu}{k\cdot n} \quad (\text{light-cone gauge})}$$

上の式は covariant になったので、$k\cdot n \neq 0$ である限り、どんな frame でも OK です。

このゲージでは、

(105) $k_\mu \epsilon^\mu(k,\lambda) = n_\mu \epsilon^\mu(k,\lambda) = 0$

が成立している。

ちなみに、HELAS では、光子、グルオンの polarization vector として、

(106)
$$\begin{cases} k^\mu = k\,(1, \sin\theta\cos\phi, \sin\theta\sin\phi, \cos\theta) \quad \text{に対し} \\ \epsilon^\mu(k,x) = (0, \cos\theta\cos\phi, \cos\theta\sin\phi, -\sin\theta) \xrightarrow{\theta=\phi=0} (0,1,0,0) \\ \epsilon^\mu(k,y) = (0, -\sin\phi, \cos\phi, 0) \xrightarrow{\theta=\phi=0} (0,0,1,0) \\ \epsilon^\mu(k,\lambda=\pm) = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\mp\epsilon^\mu(k,x) - i\,\epsilon^\mu(k,y)\right) \end{cases}$$

を用いている。これも実は light-cone gauge で、

(107) $n^\mu = n\,(1, -\sin\theta\cos\phi, -\sin\theta\sin\phi, -\cos\theta)$

に対応している。つまり $n^2=0$ ベクトルとして、k^μ の運動量成分が逆のベクトル

(108) $n^\mu \propto (k^0, -\mathbf{k})$

を用いている。このchoiceにより、n^μ の依存性が露わでない表式(106)が得られた。一方、各々の光子、グルオンに対し異なる n^μ (ゲージ) をとっていることに注意して下さい。//

この場で、massive ($m \neq 0$) vector boson の propagator についてコメントします。

vector boson の重心系では

$$
(109)\quad
\begin{cases}
k^\mu = (m, 0, 0, 0) \\
\varepsilon_x^\mu = (0, 1, 0, 0) \\
\varepsilon_y^\mu = (0, 0, 1, 0) \\
\varepsilon_z^\mu = (0, 0, 0, 1)
\end{cases}
$$

z方向へboostすると

$$
(110)\quad
\begin{cases}
\varepsilon^\mu(k, \lambda=\pm) = \dfrac{1}{\sqrt{2}}\left(\mp \varepsilon^\mu(k,x) - i\varepsilon^\mu(k,y)\right) = \dfrac{1}{\sqrt{2}}(0, \mp 1, -i, 0) \quad \cdots \text{不変} \\
\varepsilon^\mu(k, \lambda=0) = \varepsilon^\mu(k,z) = \gamma(\beta, 0, 0, 1)
\end{cases}
$$

Polarization sum は、rest frame ではすぐにわかり、

$$
(111)\quad \sum_\lambda \varepsilon^\mu(k,\lambda)\varepsilon^\nu(k,\lambda)^* = \begin{pmatrix} 0 & & & \\ & 1 & & \\ & & 1 & \\ & & & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & & & \\ & 1 & & \\ & & 1 & \\ & & & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & 0 & & \\ & & 0 & \\ & & & 0 \end{pmatrix} = -g^{\mu\nu} + \underline{\frac{k^\mu k^\nu}{m^2}}
$$

右はしの表式は共変的なので任意のフレームで成立する。Propagator は

$$
(112)\quad \langle 0 | T A^\mu(x) A^\nu(y) | 0 \rangle = \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \underline{\frac{i}{k^2 - m^2 + i\varepsilon}\left(-g^{\mu\nu} + \frac{k^\mu k^\nu}{m^2}\right)}
$$

この表示は、ユニタリティーが明らかなので、ユニタリーゲージと呼ぶ。

一方、〜〜部が $k \to \infty$ で constant であるため、くり込みができない(後出)。

自発的対称性の破れによって質量をもつゲージボゾンの場合、散乱振幅のゲージ不変性により、くり込み可能なゲージ、例えば ($-g^{\mu\nu}$) だけのゲージ (Feynmanゲージ) で計算ができる。ユニタリティーは、($k^\mu k^\nu/m^2$) に対応する成分が、南部Goldstonボソンの寄与として現れる為に満たされる。//

Dirac 方程式.

Dirac方程式はスピン$\frac{1}{2}$の粒子の運動方程式なので、少なくとも2成分必要だ。実際には(質量がゼロで無ければ)4成分がLorentz変換のもとで変換する。質量ゼロの極限(高エネルギー極限)で、カイラリティーによって二成分に分離されるので、4成分のDiracフェルミオンをカイラリティーが+(R)と−(L)、ヘリシティーが+(R)と−(L)の4成分で表示する。まず、Diracに従い、一次の微分方程式を求める;

(113) $$[\partial^\mu\partial_\mu + m^2]\psi = [i\gamma^\mu\partial_\mu + m][-i\gamma^\nu\partial_\nu + m]\psi = 0$$
$$= [\partial^\mu\partial^\nu\gamma_\mu\gamma_\nu + m^2]\psi$$
$$= [\partial^\mu\partial^\nu\frac{\gamma_\mu\gamma_\nu + \gamma_\nu\gamma_\mu}{2} + m^2]\psi$$

(113)式が成立するのは

(114) $$\gamma^\mu\gamma^\nu + \gamma^\nu\gamma^\mu = 2g^{\mu\nu}$$

のときである。カイラル表現(HELAS convention)をとると.

(115) $$\gamma^\mu = \begin{pmatrix} 0 & \sigma_+^\mu \\ \sigma_-^\mu & 0 \end{pmatrix};\quad \sigma_\pm^\mu = (1, \pm\sigma^i)$$

(116) $$\gamma^\mu\gamma^\nu + \gamma^\nu\gamma^\mu = \begin{pmatrix} 0 & \sigma_+^\mu \\ \sigma_-^\mu & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & \sigma_+^\nu \\ \sigma_-^\nu & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & \sigma_+^\nu \\ \sigma_-^\nu & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & \sigma_+^\mu \\ \sigma_-^\mu & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sigma_+^\mu\sigma_-^\nu + \sigma_+^\nu\sigma_-^\mu & 0 \\ 0 & \sigma_-^\mu\sigma_+^\nu + \sigma_-^\nu\sigma_+^\mu \end{pmatrix}$$

(117) $$\gamma^0\gamma^0 + \gamma^0\gamma^0 = 2\gamma^0\gamma^0 = \begin{pmatrix} 1\cdot1+1\cdot1 & 0 \\ 0 & 1\cdot1+1\cdot1 \end{pmatrix} = 2 \qquad (\gamma^0)^2 = 1$$
$$\gamma^i\gamma^i + \gamma^i\gamma^i = 2\gamma^i\gamma^i = \begin{pmatrix} \sigma^i(-\sigma^i)\times2 & \\ & (-\sigma^i)(\sigma^i)\times2 \end{pmatrix} = -2 \qquad (\gamma^i)^2 = 1$$

(118) $$\underbrace{\gamma^0\gamma^i}_{+\gamma^i\gamma^0} = \begin{pmatrix} 1(-\sigma^i) + (\sigma^i)\cdot 1 & \\ 0 & 1\cdot(+\sigma^i) + (-\sigma^i)\cdot 1 \end{pmatrix} = 0$$

$$\gamma^i\gamma^j + \gamma^j\gamma^i = \begin{pmatrix} \sigma^i(-\sigma^j) + \sigma^j(-\sigma^i) & 0 \\ 0 & (-\sigma^i)(\sigma^j) + (-\sigma^j)(\sigma^i) \end{pmatrix} = i\begin{pmatrix} -\sigma^k + \sigma^k & 0 \\ 0 & -\sigma^k + \sigma^k \end{pmatrix} = 0$$

(117), (118) により、(115) は (114) を満たす表式である。この表式の利点は

(119) $$\gamma_5 = i\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3 = i\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & \sigma^1 \\ -\sigma^1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & \sigma^2 \\ -\sigma^2 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & \sigma^3 \\ -\sigma^3 & 0 \end{pmatrix}$$

$$= i\begin{pmatrix} -\sigma^1 & 0 \\ 0 & \sigma^1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -\sigma^2\sigma^3 & 0 \\ 0 & -\sigma^2\sigma^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} i\sigma^1\sigma^2\sigma^3 & 0 \\ 0 & -i\sigma^1\sigma^2\sigma^3 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} i\sigma^1(i\sigma^1) & 0 \\ 0 & (-i\sigma^1)(i\sigma^1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

(120) $$P_L \equiv P_- = \frac{1-\gamma_5}{2} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$ L カイラリティー

$$P_R \equiv P_+ = \frac{1+\gamma_5}{2} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$ R カイラリティー

} の projector

(130) $$P_L\psi = \begin{pmatrix} \psi_- \\ 0 \end{pmatrix}, \quad P_R\psi = \begin{pmatrix} 0 \\ \psi_+ \end{pmatrix} \Rightarrow \psi = \begin{pmatrix} \psi_- \\ \psi_+ \end{pmatrix}$$ ← 上2つがカイラリティー ⊖ ← 下 〃 ⊕

まずは momentum space の free spinor を求める： λ を helicity として、（HELAS に従い、2倍のヘリシティー、λ=± とする）

(131) $$(p^\mu\gamma_\mu - m)\,u(p,\lambda) = 0$$

(132) $$\begin{pmatrix} -m & p^\mu\sigma_{+\mu} \\ p^\mu\sigma_{-\mu} & -m \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u(p,\lambda)_- \\ u(p,\lambda)_+ \end{pmatrix} = 0 \Rightarrow \begin{cases} (\not{p})_+\, u(p,\lambda)_+ = m\, u(p,\lambda)_- \\ (\not{p})_-\, u(p,\lambda)_- = m\, u(p,\lambda)_+ \end{cases}$$

(133) $$\begin{cases} [p^0 - \mathbf{p}\cdot\boldsymbol{\sigma}]\, u(p,\lambda)_+ = m\, u(p,\lambda)_- \\ [p^0 + \mathbf{p}\cdot\boldsymbol{\sigma}]\, u(p,\lambda)_- = m\, u(p,\lambda)_+ \end{cases}$$

但し $p^0 = E = \sqrt{m^2 + |\mathbf{p}|^2}$

(133) 式は、ヘリシティーの固有スピノール（λ は ±1）

(134) $$\frac{\mathbb{P}\cdot\sigma}{|P|}\chi_\lambda = \lambda\chi_\lambda \qquad (\sigma = 2J \text{ なので } \lambda = \pm 1)$$

を用いて、normalization 以外が定まる。

(135) $$u(p,\lambda)_\alpha = \omega(\alpha,\lambda)\chi_\lambda \qquad (\alpha=\pm,\ \lambda=\pm)$$

とおくと、(130) は、

(136) $$\begin{cases} (E-|P|\lambda)\,\omega(+,\lambda) = m\,\omega(-,\lambda) \\ (E+|P|\lambda)\,\omega(-,\lambda) = m\,\omega(+,\lambda) \end{cases}$$

(137) $$\omega(\pm,\lambda) = \sqrt{E\pm\lambda|P|} \qquad \text{又は} \quad \omega(\alpha,\lambda) = \sqrt{E+\alpha\lambda|P|}$$

(138) $$u(p,\lambda)_\pm = \sqrt{E\pm\lambda|P|}\,\chi_\lambda \qquad \text{又は} \quad u(p,\lambda)_\alpha = \sqrt{E+\alpha\lambda|P|}\,\chi_\lambda$$

(138) 式より、high-energy (massless fermion) の selection rule：

(139) $$u(p,\lambda)_\alpha \xrightarrow{E\gg m} \delta_{\alpha\lambda}\sqrt{2E}\,\chi_\lambda \qquad (\text{カイラリティー} = \text{ヘリシティー})$$

が導かれる。(139) 式のため、高エネルギー現象の記述にはカイラル表示が適している。

次に (134) 式の解を求める：

(140) $$\mathbb{P} = |P|(\sin\theta\cos\phi, \sin\theta\sin\phi, \cos\theta)$$

とすると

(141) $$\frac{\mathbb{P}\cdot\sigma}{|P|} = \sin\theta\cos\phi\,\sigma^1 + \sin\theta\sin\phi\,\sigma^2 + \cos\theta\,\sigma^3 = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta(\cos\phi - i\sin\phi) \\ \sin\theta(\cos\phi + i\sin\phi) & -\cos\theta \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta\, e^{-i\phi} \\ \sin\theta\, e^{i\phi} & -\cos\theta \end{pmatrix}$$

固有ベクトルは簡単に求まる。HELASでは

$$(142)\quad \chi_+ = \begin{pmatrix} \cos\frac{\theta}{2} \\ \sin\frac{\theta}{2} e^{i\phi} \end{pmatrix}$$

$$(143)\quad \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta e^{-i\phi} \\ \sin\theta e^{i\phi} & -\cos\theta \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \cos\frac{\theta}{2} \\ \sin\frac{\theta}{2} e^{i\phi} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta\cos\frac{\theta}{2} + \sin\theta\sin\frac{\theta}{2} \\ (\sin\theta\cos\frac{\theta}{2} - \cos\theta\sin\frac{\theta}{2}) e^{i\phi} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\theta - \frac{\theta}{2}) \\ \sin(\theta - \frac{\theta}{2}) e^{i\phi} \end{pmatrix} = \chi_+$$

χ_- は χ_+ で $\theta \to \pi - \theta$, $\phi \to \pi + \phi$ とすれば良いが、HELASでは

$$(144)\quad \chi_+ \Big|_{\theta \to \pi-\theta,\, \phi \to \pi+\phi} = \begin{pmatrix} \sin\frac{\theta}{2} \\ -\cos\frac{\theta}{2} e^{i\phi} \end{pmatrix} = -e^{i\phi} \begin{pmatrix} -\sin\frac{\theta}{2} e^{-i\phi} \\ \cos\frac{\theta}{2} \end{pmatrix} = -e^{i\phi} \chi_-$$

$$(145)\quad \chi_- = \begin{pmatrix} -\sin\frac{\theta}{2} e^{-i\phi} \\ \cos\frac{\theta}{2} \end{pmatrix}$$

(142) と (145) の phase convention は charge-conjugation の関係式

$$(146)\quad \chi_+ = i\sigma^2 (\chi_-)^* = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -\sin\frac{\theta}{2} e^{i\phi} \\ \cos\frac{\theta}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\frac{\theta}{2} \\ \sin\frac{\theta}{2} e^{i\phi} \end{pmatrix}$$

を満たす。(右巻きfermionは左巻きfermionの反粒子として作られる。)

u スピノールは (138), (142), (145) で完全に定まった。

v スピノールは charge-conjugation によって求める。(この位相 convention は、Majorana fermion があったり、u-スピノールと v-スピノールが干渉する時には重要です。)

$$(147)\quad v = C\bar{u}^T = i\gamma^2\gamma^0(u^\dagger\gamma^0)^T = i\gamma^2\gamma^0\gamma^{0T} u^* = i\gamma^2 u^* = \begin{pmatrix} 0 & i\sigma^2 \\ -i\sigma^2 & 0 \end{pmatrix} u^*$$

$$(148)\quad \begin{pmatrix} v(p,\lambda)_- \\ v(p,\lambda)_+ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} i\sigma^2\, u_+^*(p,\lambda) \\ -i\sigma^2\, u_-^*(p,\lambda) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{E+\lambda|p|}\; i\sigma^2 \chi_\lambda^* \\ \sqrt{E-\lambda|p|}\,(-i\sigma^2)\chi_\lambda^* \end{pmatrix}$$

(146) と同様

(149) $i\sigma^2 (\chi_+)^* = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\frac{\theta}{2} \\ \sin\frac{\theta}{2} e^{-i\phi} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sin\frac{\theta}{2} e^{-i\phi} \\ -\cos\frac{\theta}{2} \end{pmatrix} = -\chi_-$

(146) と (149) を合わせて.

(150) $i\sigma^2 (\chi_\lambda)^* = -\lambda \chi_{-\lambda}$

(150) を (145) に代入すると

(151) $v(p,\lambda)_\pm = \pm\lambda\sqrt{E \mp \lambda|p|}\,\chi_{-\lambda}$ 又は $v(p,\lambda)_\alpha = \alpha\lambda\sqrt{E-\alpha\lambda|p|}\,\chi_{-\lambda}$

(138) と (151) で完成です。(139) に対応する H.E. limit は

(152) $v(p,\lambda)_\alpha \xrightarrow{E \gg m} \delta_{\alpha,-\lambda}(-\sqrt{2E})\chi_{-\lambda}$ (反粒子のヘリシティー = 一カイラリティー)

Normalization:

(153) $\bar{u}(p,\lambda)u(p,\lambda) = (u(p,\lambda)_-^\dagger, u(p,\lambda)_+^\dagger)\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u(p,\lambda)_- \\ u(p,\lambda)_+ \end{pmatrix}$

$= u(p,\lambda)_-^\dagger u(p,\lambda)_+ + u(p,\lambda)_+^\dagger u(p,\lambda)_-$

$= \sqrt{E-\lambda|p|}\sqrt{E+\lambda|p|}\,\underbrace{\chi_\lambda^\dagger\chi_\lambda}_{=1} + \sqrt{E+\lambda|p|}\sqrt{E-\lambda|p|}\,\underbrace{\chi_\lambda^\dagger\chi_\lambda}_{=1}$

$= 2m$

(154) $\bar{v}(p,\lambda)v(p,\lambda) = v(p,\lambda)_-^\dagger v(p,\lambda)_+ + v(p,\lambda)_+^\dagger v(p,\lambda)_-$

$= \left[(-\lambda)\sqrt{E+\lambda|p|}\,(\lambda)\sqrt{E-\lambda|p|} + \lambda\sqrt{E-\lambda|p|}\,(-\lambda)\sqrt{E+\lambda|p|}\right]\chi_{-\lambda}^\dagger\chi_{-\lambda}$

$= -2m$

Projectors:

(155) $$\sum_\lambda u(p,\lambda)\bar{u}(p,\lambda) = \sum_\lambda \begin{pmatrix} u(p,\lambda)_- \\ u(p,\lambda)_+ \end{pmatrix} (u(p,\lambda)^\dagger_+ , u(p,\lambda)^\dagger_-)$$

$$= \sum_\lambda \begin{pmatrix} u(p,\lambda)_- u(p,\lambda)^\dagger_+ & u(p,\lambda)_- u(p,\lambda)^\dagger_- \\ u(p,\lambda)_+ u(p,\lambda)^\dagger_+ & u(p,\lambda)_+ u(p,\lambda)^\dagger_- \end{pmatrix}$$

$$= \sum_\lambda \begin{pmatrix} \sqrt{E-\lambda|p|}\sqrt{E+\lambda|p|}\,\chi_\lambda\chi_\lambda^\dagger & (E-\lambda|p|)\chi_\lambda\chi_\lambda^\dagger \\ (E+\lambda|p|)\chi_\lambda\chi_\lambda^\dagger & \sqrt{E+\lambda|p|}\sqrt{E-\lambda|p|}\,\chi_\lambda\chi_\lambda^\dagger \end{pmatrix}$$

(156) $$\sum_\lambda \chi_\lambda\chi_\lambda^\dagger = \begin{pmatrix} \cos\frac{\theta}{2} \\ \sin\frac{\theta}{2}e^{i\phi} \end{pmatrix}(\cos\tfrac{\theta}{2}, \sin\tfrac{\theta}{2}e^{-i\phi}) + \begin{pmatrix} -\sin\frac{\theta}{2}e^{-i\phi} \\ \cos\frac{\theta}{2} \end{pmatrix}(-\sin\tfrac{\theta}{2}e^{i\phi}, \cos\tfrac{\theta}{2})$$

$$= \begin{pmatrix} \cos^2\frac{\theta}{2} & \frac{1}{2}\sin\theta e^{-i\phi} \\ \frac{1}{2}\sin\theta e^{i\phi} & \sin^2\frac{\theta}{2} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \sin^2\frac{\theta}{2} & -\frac{1}{2}\sin\theta e^{-i\phi} \\ -\frac{1}{2}\sin\theta e^{i\phi} & \cos^2\frac{\theta}{2} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

(157) $$\sum_\lambda \lambda\chi_\lambda\chi_\lambda^\dagger = \begin{pmatrix} \cos^2\frac{\theta}{2} & \frac{1}{2}\sin\theta e^{-i\phi} \\ \frac{1}{2}\sin\theta e^{i\phi} & \sin^2\frac{\theta}{2} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \sin^2\frac{\theta}{2} & -\frac{1}{2}\sin\theta e^{-i\phi} \\ -\frac{1}{2}\sin\theta e^{i\phi} & \cos^2\frac{\theta}{2} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta e^{-i\phi} \\ \sin\theta e^{i\phi} & -\cos\theta \end{pmatrix}$$

$$= \frac{\mathbf{p}\cdot\boldsymbol{\sigma}}{|p|}$$

(156) と (157) を (155) に代入すると.

(158) $$\sum_\lambda u(p,\lambda)\bar{u}(p,\lambda) = \begin{pmatrix} m & E-|p|\frac{\mathbf{p}\cdot\boldsymbol{\sigma}}{|p|} \\ E+|p|\frac{\mathbf{p}\cdot\boldsymbol{\sigma}}{|p|} & m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} m & E-\mathbf{p}\cdot\boldsymbol{\sigma} \\ E+\mathbf{p}\cdot\boldsymbol{\sigma} & m \end{pmatrix}$$

$$= m + p_\mu \begin{pmatrix} 0 & \sigma_+^\mu \\ \sigma_-^\mu & 0 \end{pmatrix}$$

$$= m + \not{p}$$

(159) $$\sum_\lambda v(p,\lambda)\bar{v}(p,\lambda) = \sum_\lambda \begin{pmatrix} -m\chi_{-\lambda}\chi_{-\lambda}^\dagger & (E+\lambda|p|)\chi_{-\lambda}\chi_{-\lambda}^\dagger \\ (E-\lambda|p|)\chi_{-\lambda}\chi_{-\lambda}^\dagger & -m\chi_{-\lambda}\chi_{-\lambda}^\dagger \end{pmatrix}$$

$$= -m + \not{p}$$

ここまでで、振幅を計算するための準備はほぼできたと思うのですが、

自由Dirac場の方程式と、量子化とを簡単に復習します。

まず古典場のLagrangianは

(160) $$\mathcal{L} = \overline{\psi}(i\gamma_\mu\partial^\mu - m)\psi = -(\partial^\mu\overline{\psi})i\gamma_\mu\psi - m\overline{\psi}\psi$$

運動方程式は

(161)
$$\begin{cases} \partial^\mu \dfrac{\partial\mathcal{L}}{\partial\partial^\mu\psi} - \dfrac{\partial\mathcal{L}}{\partial\psi} = \partial^\mu\overline{\psi}(i\gamma_\mu) + m\overline{\psi} = \overline{\psi}(i\overleftarrow{\partial\!\!\!/} + m) = 0 \\ \partial^\mu \dfrac{\partial\mathcal{L}}{\partial\partial^\mu\overline{\psi}} - \dfrac{\partial\mathcal{L}}{\partial\overline{\psi}} = \partial^\mu(-i\gamma_\mu\psi) + m\psi = (-i\overrightarrow{\partial\!\!\!/} + m)\psi = 0 \end{cases}$$

Checkとして

(162)
$$\begin{cases} (-i\overrightarrow{\partial\!\!\!/} + m)\, u(p,\lambda)e^{-ip\cdot x}\Big|_{p^0=E=\sqrt{\mathbf{p}^2+m^2}} \\ \quad = (-p\!\!\!/ + m)u(p,\lambda)e^{-ipx} \\ \quad = 0 \\ (-i\overrightarrow{\partial\!\!\!/} + m)\, v(p,\lambda)e^{ipx}\Big|_{p^0=E=\sqrt{\mathbf{p}^2+m^2}} \end{cases}$$
$$= (p\!\!\!/ + m)v(p,\lambda)e^{ipx}$$
$$= 0$$

ここで突然量子化します。

(163)
$$\begin{cases} \psi(x) = \displaystyle\int \frac{d^3k}{(2\pi)^3 2E} \sum_\lambda \left\{ a_{\mathbf{k},\lambda} u(k,\lambda)e^{-ikx} + b^\dagger_{\mathbf{k},\lambda} v(k,\lambda)e^{ikx} \right\} \\ \overline{\psi}(x) = \displaystyle\int \frac{d^3k}{(2\pi)^3 2E} \sum_\lambda \left\{ a^\dagger_{\mathbf{k},\lambda} \overline{u}(k,\lambda)e^{ikx} + b_{\mathbf{k},\lambda} \overline{v}(k,\lambda)e^{-ikx} \right\} \end{cases}$$

量子化条件は

$$(164)\quad \begin{cases} \{a_{\mathbf{k},\lambda},\ a^{+}_{\mathbf{k}',\lambda'}\} = \{b_{\mathbf{k},\lambda},\ b^{+}_{\mathbf{k},\lambda}\} = 2E\,(2\pi)^3\delta^3(\mathbf{k}-\mathbf{k}')\,\delta_{\lambda\lambda'} \\ \{a_{\mathbf{k},\lambda},\ a_{\mathbf{k}',\lambda'}\} = \{a_{\mathbf{k},\lambda},\ b_{\mathbf{k},\lambda}\} = \{a_{\mathbf{k},\lambda},\ b^{+}_{\mathbf{k},\lambda}\} = \cdots = 0 \end{cases}$$

反交換関係(164)は共変な規格化(2E倍)されていることに注意して下さい。

「スピン半整数粒子はフェルミ統計に従う」ことの説明はスキップします。

「超対称性」で満足していただけるのなら、いつか講義をいたします。

ここでは、(164)で良いことを確認します。Hamiltonianは

$$(165)\quad \mathcal{H} = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\partial_0\psi}\partial^0\psi - g^{00}\mathcal{L}$$

$$= \overline{\psi}(i\gamma_0)\partial^0\psi - \overline{\psi}(i\not\partial - m)\psi$$

$$= \overline{\psi}(-i\gamma^i\partial_i + m)\psi$$

$$(166)\quad H = \int d^3x\,\mathcal{H}$$

$$= \int d^3x \int\frac{d^3k'}{(2\pi)^3 2E'}\int\frac{d^3k}{(2\pi)^3 2E}\sum_{\lambda'}\left\{a^{+}_{\mathbf{k}',\lambda'}\overline{u}(k',\lambda')e^{ik'x} + b_{\mathbf{k}',\lambda'}\overline{v}(k',\lambda')e^{-ik'x}\right\}$$

$$(-i\gamma^i\frac{\partial}{\partial x^i}+m)\sum_{\lambda}\left\{a_{\mathbf{k},\lambda}u(k,\lambda)e^{-ikx} + b^{+}_{k,\lambda}v(k,\lambda)e^{ikx}\right\}$$

$$(-i\gamma^i\frac{\partial}{\partial x^i}+m)u(k,\lambda)e^{-ikx} = (\gamma^i k^i + m)u(k,\lambda)e^{-ikx} = \gamma^0 E\,u(k,\lambda)e^{-ikx}$$

$$(-i\gamma^i\frac{\partial}{\partial x^i}+m)v(k,\lambda)e^{ikx} = (-\gamma^i k^i + m)v(k,\lambda)e^{ikx} = -\gamma^0 E\,v(k,\lambda)e^{ikx}$$

$$= \int d^3x\int\frac{d^3k'}{(2\pi)^3 2E'}\int\frac{d^3k\,E}{(2\pi)^3 2E}\sum_{\lambda,\lambda'}\left\{a^{+}_{\mathbf{k}',\lambda'}u^{+}(k',\lambda')e^{ik'x} + b_{\mathbf{k}',\lambda'}v^{+}(k',\lambda')e^{-ik'x}\right\}$$

$$\times\left\{a_{\mathbf{k},\lambda}u(k,\lambda)e^{-ikx} - b^{+}_{\mathbf{k},\lambda}v(k,\lambda)e^{ikx}\right\}$$

続けて

$$(167)\ H=\int\frac{d^3k'}{(2\pi)^3 2E'}\int\frac{d^3k}{(2\pi)^3 2E}E\sum_{\lambda,\lambda'}\Big\{a^\dagger_{\mathbf{k}',\lambda'}a_{\mathbf{k},\lambda}u^\dagger(\mathbf{k}',\lambda')u(\mathbf{k},\lambda)e^{i(E'-E)x^0}(2\pi)^3\delta^3(\mathbf{k}-\mathbf{k}')$$

$$-b_{\mathbf{k}',\lambda'}b^\dagger_{\mathbf{k},\lambda}v^\dagger(\mathbf{k}',\lambda')v(\mathbf{k},\lambda)e^{-i(E'-E)x^0}(2\pi)^3\delta^3(\mathbf{k}-\mathbf{k}')$$

$$-a^\dagger_{\mathbf{k}',\lambda'}b^\dagger_{\mathbf{k},\lambda}u^\dagger(\mathbf{k}',\lambda')v(\mathbf{k},\lambda)e^{i(E+E')x^0}(2\pi)^3\delta^3(\mathbf{k}+\mathbf{k}')$$

$$+b_{\mathbf{k}',\lambda'}a_{\mathbf{k},\lambda}v^\dagger(\mathbf{k}',\lambda')u(\mathbf{k},\lambda)e^{-i(E+E')x^0}(2\pi)^3\delta^3(\mathbf{k}+\mathbf{k}')\Big\}$$

$$=\int\frac{d^3k}{(2\pi)^3}\frac{1}{4E}\sum_{\lambda,\lambda'}\Big\{a^\dagger_{\mathbf{k},\lambda'}a_{\mathbf{k},\lambda}u^\dagger(\mathbf{k},\lambda')u(\mathbf{k},\lambda)-b_{\mathbf{k},\lambda'}b^\dagger_{\mathbf{k},\lambda}v^\dagger(\mathbf{k},\lambda')v(\mathbf{k},\lambda)$$

$$-a^\dagger_{-\mathbf{k},\lambda'}b^\dagger_{\mathbf{k},\lambda}u^\dagger(-\mathbf{k},\lambda')v(\mathbf{k},\lambda)e^{2iEx^0}$$

$$+b_{-\mathbf{k},\lambda'}a_{\mathbf{k},\lambda}v^\dagger(-\mathbf{k},\lambda')u(\mathbf{k},\lambda)e^{-2iEx^0}\Big\}$$

ここで次の式が必要の様ですね。

$$(168)\ u^\dagger(\mathbf{k},\lambda')u(\mathbf{k},\lambda)=\sum_\alpha u^\dagger(\mathbf{k},\lambda')_\alpha u(\mathbf{k},\lambda)_\alpha=\sum_\alpha\sqrt{E+\alpha\lambda'|\mathbf{k}|}\sqrt{E+\alpha\lambda|\mathbf{k}|}\underbrace{\chi^\dagger_{\lambda'}\chi_\lambda}_{\delta_{\lambda'\lambda}}=\sum_\alpha(E+\alpha\lambda|\mathbf{k}|)\delta_{\lambda\lambda'}$$

$$=2E\,\delta_{\lambda\lambda'}$$

$$v^\dagger(\mathbf{k},\lambda')v(\mathbf{k},\lambda)=\sum_\alpha v^\dagger(\mathbf{k},\lambda')_\alpha v(\mathbf{k},\lambda)_\alpha=\sum_\alpha\sqrt{E-\alpha\lambda'|\mathbf{k}|}\sqrt{E-\alpha\lambda|\mathbf{k}|}\underbrace{\chi^\dagger_{-\lambda'}\chi_{-\lambda}}_{\delta_{\lambda'\lambda}}=\sum_\alpha(E-\alpha\lambda|\mathbf{k}|)\delta_{\lambda\lambda'}$$

$$=2E\,\delta_{\lambda\lambda'}$$

$$u^\dagger(-\mathbf{k},\lambda')v(\mathbf{k},\lambda)=\sum_\alpha u(-\mathbf{k},\lambda')^\dagger_\alpha v(\mathbf{k},\lambda)_\alpha=\sum_\alpha\overbrace{\sqrt{E+\alpha\lambda'|\mathbf{k}|}\sqrt{E-\alpha\lambda|\mathbf{k}|}}^{\alpha\lambda}\underbrace{\chi^\dagger_{-\lambda'}\chi_{-\lambda}}_{\delta_{\lambda'\lambda}}=\sum_\alpha\alpha\lambda m\,\delta_{\lambda\lambda'}=0$$

$$v^\dagger(-\mathbf{k},\lambda')u(\mathbf{k},\lambda)=\sum_\alpha v(-\mathbf{k},\lambda')^\dagger_\alpha u(\mathbf{k},\lambda)_\alpha=\sum_\alpha\alpha\lambda\sqrt{E-\alpha\lambda'|\mathbf{k}|}\sqrt{E+\alpha\lambda|\mathbf{k}|}\underbrace{\chi^\dagger_{\lambda'}\chi_\lambda}_{\delta_{\lambda'\lambda}}=\sum_\alpha\alpha\lambda m\,\delta_{\lambda\lambda'}=0$$

これで何とかなりそうですけれど、今日は時間切れです。

来週はついに、QEDとQCDに入れそうです。 //

QCD for Collider Physics IV

2005.5.12

先週の続きを完成させます。(168)を(167)に代入して

(169) $$H = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{2E}{4E} \sum_{\lambda\lambda'} \left\{ a^\dagger_{k,\lambda'} a_{k,\lambda} \delta_{\lambda\lambda'} - b_{k,\lambda'} b^\dagger_{k,\lambda} \delta_{\lambda\lambda'} \right\}$$
$$= \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{1}{2} \sum_{\lambda} \left\{ a^\dagger_{k,\lambda} a_{k,\lambda} - b_{k,\lambda} b^\dagger_{k,\lambda} \right\}$$

ここで、生成消滅演算子のcovariantな規格化(164)を通常の(粒子数の)規格化

(170) $$\begin{cases} a_{k,\lambda} = \sqrt{2E}\, \hat{a}_{k,\lambda} , \quad b_{k,\lambda} = \sqrt{2E}\, \hat{b}_{k,\lambda} \\ \{\hat{a}_{k,\lambda}, \hat{a}^\dagger_{k',\lambda'}\} = \{\hat{b}_{k,\lambda}, \hat{b}^\dagger_{k',\lambda'}\} = (2\pi)^3 \delta^3(k-k') \end{cases}$$

にもどすと、

(171) $$H = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} E_k \sum_\lambda \left\{ \hat{a}^\dagger_{k,\lambda} \hat{a}_{k,\lambda} - \hat{b}_{k,\lambda} \hat{b}^\dagger_{k,\lambda} \right\}$$

ここで反交換関係(164),(170)を使うと

(172) $$H = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} E_k \sum_\lambda \left\{ \hat{a}^\dagger_{k,\lambda} \hat{a}_{k,\lambda} + \hat{b}^\dagger_{k,\lambda} \hat{b}_{k,\lambda} \underbrace{- (2\pi)^3 \delta^3(0)}_{-\infty\text{の定数}} \right\}$$

となって、粒子と反粒子のエネルギーの和となる。($a^\dagger_{k,\lambda}|0\rangle$ と $b^\dagger_{k,\lambda}|0\rangle$ の固有値。)

同様に(27)式の $P^i = \int d^3x \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \partial_0 \psi} \partial^i \psi \right]$ から、$\partial^i = -\frac{\partial}{\partial x^i}$ に注意して、

(173) $$\mathbb{P} = \int d^3x\, \psi^\dagger (-i\nabla) \psi = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \mathbb{k} \sum_\lambda \left\{ \hat{a}^\dagger_{k,\lambda} \hat{a}_{k,\lambda} + \hat{b}^\dagger_{k,\lambda} \hat{b}_{k,\lambda} \right\}$$

を導くことができる。(172),(173)は反交換関係(164),(170)の帰結で、Dirac粒子がフェルミ統計に従わなければ量子化できないことを表しています。

スピノールのLorentz変換

ここで少しだけ、Lorentz変換とそのgeneratorの関係を復習します。

Lorentz変換

(174) $x^\mu \to x'^\mu = \Lambda^\mu{}_\nu x^\nu$

は6ヶの実パラメータ（$\omega_{ji} = -\omega_{ij}$, $\omega_{0i} = -\omega_{i0}$）

(175) $\begin{cases} \omega_{ij} = \epsilon_{ijk}\theta^k & \cdots\ \theta^1, \theta^2, \theta^3 \text{ はそれぞれ } 2\text{-}3, 3\text{-}1, 1\text{-}2 \text{ 面内の回転角.} \\ \omega_{0i} = \beta^i & \cdots\ \beta^1, \beta^2, \beta^3 \text{ は } 1, 2, 3 \text{ 軸方向の速度.} \end{cases}$

で指定されますが、変換$\Lambda^\mu{}_\nu$を(175)のパラメータで表現することができて、

(178) $\Lambda^\alpha{}_\beta = \left(e^{-i\frac{\omega_{\mu\nu}}{2}M^{\mu\nu}}\right)^\alpha{}_\beta$

$M^{\mu\nu} = -M^{\nu\mu}$をgenerator（生成演算子）と呼びます。微小なLorentz変換を2回行ない、順序を替えたものとの差をとることで、交換関係

(179) $[M^{\mu\nu}, M^{\rho\sigma}] = i\{g^{\nu\rho}M^{\mu\sigma} + g^{\mu\sigma}M^{\nu\rho} - g^{\mu\rho}M^{\nu\sigma} - g^{\nu\sigma}M^{\mu\rho}\}$

を導くことができます。面頭そうですが、$(\mu\nu) = (ij)$, $(\rho\sigma) = (jk)$成分をとると、$g^{\nu\rho} = g^{jj} = -1$の項だけが右辺で残るので、

(180) $[M^{ij}, M^{jk}] = i\,g^{jj}M^{ik} = -i\,M^{ik} = i\,M^{ki}$

が分かります。これから

(181) $M^{ij} = \epsilon^{ijk}J^k$

が回転のgenerator（角運動量演算子）であることがわかります。

同様に

(182) $M^{0i} = K^i$

は i 軸方向の boost の generator です。座標表示では、

(183) $L^{\mu\nu} = i(x^\mu \partial^\nu - x^\nu \partial^\mu)$

で、例えば $(\mu\nu)=(ij)$ 成分が

(184)
$$\begin{cases} L^{ij} = i(x^i\partial^j - x^j\partial^i) = -i\left(x^i\dfrac{\partial}{\partial x^j} - x^j\dfrac{\partial}{\partial x^i}\right) = x^i p^j - x^j p^i = J^k \\ \mathbb{J} = \mathbb{X}\times\mathbb{P} = \mathbb{X}\times(-i\nabla) \end{cases}$$

× はベクトル積。

確認できます。$x^\mu = (x^0, x^1, x^2, x^3)^T$ を縦ベクトルとすると、$\Lambda^\mu{}_\nu$ を 4×4 の行列で表示することができて、6つの generator は

(185)
$$J^1 = M^{23} = -i\begin{pmatrix} 0&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&1\\0&0&-1&0\end{pmatrix},\quad J^2 = M^{31} = -i\begin{pmatrix} 0&0&0&0\\0&0&0&-1\\0&0&0&0\\0&1&0&0\end{pmatrix},\quad J^3 = M^{12} = -i\begin{pmatrix} 0&0&0&0\\0&0&1&0\\0&-1&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}$$

$$K^1 = M^{01} = i\begin{pmatrix} 0&1&0&0\\1&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix},\quad K^2 = M^{02} = i\begin{pmatrix} 0&0&1&0\\0&0&0&0\\1&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix},\quad K^3 = M^{03} = i\begin{pmatrix} 0&0&0&1\\0&0&0&0\\0&0&0&0\\1&0&0&0\end{pmatrix}$$

となります。例えば

(186)
$$e^{-i\phi J^3} = e^{-\phi\begin{pmatrix} 0&0&0&0\\0&0&1&0\\0&-1&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-\phi)^n}{n!}\begin{pmatrix} 0&0&0&0\\0&0&1&0\\0&-1&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}^n = 1 + \sum_{m=0}^{\infty}\left\{\frac{-\phi(-\phi^2)^m}{(2m+1)!}\begin{pmatrix} 0&0&0&0\\0&0&1&0\\0&-1&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix} + \frac{(-\phi^2)^m}{(2m)!}\begin{pmatrix} 0&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}\right\}$$

$$= \begin{pmatrix} 1&0&0&0\\0&\cos\phi&-\sin\phi&0\\0&\sin\phi&\cos\phi&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}$$

；3軸の周りの回転φ.

同様に、2軸の回りのθの回転は

(187)
$$e^{-i\theta J^2} = e^{-\theta\begin{pmatrix}0&0&0&0\\0&0&0&-1\\0&0&0&0\\0&1&0&0\end{pmatrix}} = \begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&\cos\theta&0&\sin\theta\\0&0&1&0\\0&-\sin\theta&0&\cos\theta\end{pmatrix}$$

又、3軸向きのboostは、$\eta = \frac{1}{2}\ln\frac{1+\beta}{1-\beta}$ をrapidityとして ($\beta = \tanh\eta$)

(188)
$$\begin{aligned}
e^{-i\eta K^3} &= e^{\eta\begin{pmatrix}0&0&0&1\\0&0&0&0\\0&0&0&0\\1&0&0&0\end{pmatrix}} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{\eta^n}{n!}\begin{pmatrix}0&0&0&1\\0&0&0&0\\0&0&0&0\\1&0&0&0\end{pmatrix}^n \\
&= 1 + \sum_{m=1}^{\infty}\left\{\frac{\eta^{2m-1}}{(2m-1)!}\begin{pmatrix}0&0&0&1\\0&0&0&0\\0&0&0&0\\1&0&0&0\end{pmatrix} + \frac{\eta^{2m}}{(2m)!}\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}\right\} \\
&= \begin{pmatrix}\cosh\eta&0&0&\sinh\eta\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\\sinh\eta&0&0&\cosh\eta\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\gamma&0&0&\gamma\beta\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\\gamma\beta&0&0&\gamma\end{pmatrix}
\end{aligned}$$

ここで次の展開式を使いました。

(189)
$$\begin{cases}
e^{i\theta} = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(i\theta)^n}{n!} = \sum_{m=0}^{\infty}\left\{\frac{(-\theta^2)^m}{(2m)!} + i\theta\frac{(-\theta^2)^m}{(2m+1)!}\right\} = \cos\theta + i\sin\theta \\
\cosh y \equiv \dfrac{e^y + e^{-y}}{2} = \dfrac{1}{2}\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\left\{\frac{y^n}{n!} + \frac{(-y)^n}{n!}\right\} = \sum_{m=0}^{\infty}\frac{y^{2m}}{(2m)!} \\
\sinh y \equiv \dfrac{e^y - e^{-y}}{2} = \dfrac{1}{2}\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\left\{\frac{y^n}{n!} - \frac{(-y)^n}{n!}\right\} = \sum_{m=0}^{\infty}\frac{y^{2m+1}}{(2m+1)!}
\end{cases}$$

$p^\mu = (m,0,0,0)^T$ から出発して

(190)
$$\begin{aligned}
\begin{pmatrix}E\\p^1\\p^2\\p^3\end{pmatrix} &= e^{-i\phi J^3}e^{-i\theta J^2}e^{-i\eta K^3}\begin{pmatrix}m\\0\\0\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&\cos\phi&-\sin\phi&0\\0&\sin\phi&\cos\phi&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&\cos\theta&0&\sin\theta\\0&0&1&0\\0&-\sin\theta&0&\cos\theta\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\gamma&0&0&\gamma\beta\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\\gamma\beta&0&0&\gamma\end{pmatrix}\begin{pmatrix}m\\0\\0\\0\end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix}E\\p\sin\theta\cos\phi\\p\sin\theta\sin\phi\\p\cos\theta\end{pmatrix} \quad ; \begin{cases}E = m\gamma = m\cosh\eta\\ p = m\gamma\beta = m\sinh\eta\end{cases}
\end{aligned}$$

2005.5.12

以上の4×4行列表示を座標表示、ベクトル表示と呼びます。

一般のgeneratorは、スピンの自由度を含み、$L^{\mu\nu}$を(183)式として、

(191) $$M^{\mu\nu} = L^{\mu\nu} + S^{\mu\nu}$$

と表わされますが、スピン$\frac{1}{2}$の場合、

(192) $$S^{\mu\nu} = \Sigma^{\mu\nu} \equiv \frac{i}{4}[\gamma^\mu, \gamma^\nu]$$

となります。(スピン1の場合、$S^{\mu\nu}$は$L^{\mu\nu}$と同型になるので、ベクトル表示と呼ぶ)。

(192)式の$\Sigma^{\mu\nu}$が交換関係(179)を満たすことは、反交換関係(114)式だけを使って証明できます。表示を(115)のカイラル表示に決めればもっと簡単で

(193) $$\Sigma^{\mu\nu} = \frac{i}{4}\left\{\begin{pmatrix}0 & \sigma_+^\mu \\ \sigma_-^\mu & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & \sigma_+^\nu \\ \sigma_-^\nu & 0\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}0 & \sigma_+^\nu \\ \sigma_-^\nu & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & \sigma_+^\mu \\ \sigma_-^\mu & 0\end{pmatrix}\right\}$$
$$= \frac{i}{4}\begin{pmatrix}\sigma_+^\mu\sigma_-^\nu - \sigma_+^\nu\sigma_-^\mu & 0 \\ 0 & \sigma_-^\mu\sigma_+^\nu - \sigma_-^\nu\sigma_+^\mu\end{pmatrix}$$

から、

(194) $$\Sigma^{ij} = \frac{i}{4}\begin{pmatrix}\sigma^i(-\sigma^j) - \sigma^j(-\sigma^i) & 0 \\ 0 & (-\sigma^i)\sigma^j - (-\sigma^j)\sigma^i\end{pmatrix}$$
$$= \frac{i}{4}\begin{pmatrix}-[\sigma^i, \sigma^j] & 0 \\ 0 & -[\sigma^i, \sigma^j]\end{pmatrix}$$
$$= \frac{i}{4}\begin{pmatrix}-2i\sigma^k & 0 \\ 0 & -2i\sigma^k\end{pmatrix}$$
$$= \frac{\sigma^k}{2}\begin{pmatrix}1 & 0 \\ 0 & 1\end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix}\sigma^k/2 & 0 \\ 0 & \sigma^k/2\end{pmatrix}} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix}\sigma^k & 0 \\ 0 & \sigma^k\end{pmatrix}$$

↑この形の方が誤解しないですね。

が求まるし、boostは、

(195)
$$\Sigma^{0i} = \frac{i}{4}\begin{pmatrix} \sigma^0(-\sigma^i) - \sigma^i\sigma^0 & 0 \\ 0 & (\sigma^0)\sigma^i - (-\sigma^i)\sigma^0 \end{pmatrix}$$
$$= \frac{i}{4}\begin{pmatrix} -\sigma^i - \sigma^i & 0 \\ 0 & \sigma^i + \sigma^i \end{pmatrix}$$
$$= -\frac{i}{2}\begin{pmatrix} \sigma^i & 0 \\ 0 & -\sigma^i \end{pmatrix}$$

(194), (195) はそれぞれ回転とboostの(generatorの)スピノール表示です。3軸の回りの(φの)回転は、

(196)
$$\begin{cases} e^{-i\phi J^3} = e^{-i\phi\Sigma^{12}} = e^{-i\phi\frac{1}{2}\begin{pmatrix}\sigma^3 & 0 \\ 0 & \sigma^3\end{pmatrix}} = \begin{pmatrix} e^{-i\frac{\phi}{2}\sigma^3} & 0 \\ 0 & e^{-i\frac{\phi}{2}\sigma^3} \end{pmatrix} \\ e^{-i\frac{\phi}{2}\sigma^3} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}\left(-i\frac{\phi}{2}\right)^n(\sigma^3)^n \end{cases}$$
$$= \sum_{m=0}^{\infty}\left\{\frac{1}{(2m)!}\left(-i\frac{\phi}{2}\right)^{2m}(\sigma^3)^{2m} + \frac{1}{(2m+1)!}\left(-i\frac{\phi}{2}\right)^{2m+1}(\sigma^3)^{2m+1}\right\}$$
$$= \sum_{m=0}^{\infty}\left\{\frac{1}{(2m)!}\left(-i\frac{\phi}{2}\right)^{2m}\begin{pmatrix}1 & 0 \\ 0 & 1\end{pmatrix} + \frac{1}{(2m+1)!}\left(-i\frac{\phi}{2}\right)^{2m+1}\begin{pmatrix}1 & 0 \\ 0 & -1\end{pmatrix}\right\}$$
$$= \begin{pmatrix} \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}\left(-i\frac{\phi}{2}\right)^n & 0 \\ 0 & \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}\left(i\frac{\phi}{2}\right)^n \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} e^{-i\frac{\phi}{2}} & 0 \\ 0 & e^{i\frac{\phi}{2}} \end{pmatrix}$$

同様に2軸の回りのθの回転は

(197)
$$\begin{cases} e^{-i\theta J^2} = e^{-i\theta\Sigma^{31}} = e^{-i\theta\frac{1}{2}\begin{pmatrix}\sigma^2 & 0 \\ 0 & \sigma^2\end{pmatrix}} = \begin{pmatrix} e^{-i\frac{\theta}{2}\sigma^2} & 0 \\ 0 & e^{-i\frac{\theta}{2}\sigma^2} \end{pmatrix} \\ e^{-i\frac{\theta}{2}\sigma^2} = e^{-i\frac{\theta}{2}\begin{pmatrix}0 & -i \\ i & 0\end{pmatrix}} = e^{\frac{\theta}{2}\begin{pmatrix}0 & -1 \\ 1 & 0\end{pmatrix}} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}\left(\frac{\theta}{2}\right)^n\begin{pmatrix}0 & -1 \\ 1 & 0\end{pmatrix}^n \end{cases}$$
$$= \sum_{m=0}^{\infty}\left\{\frac{1}{(2m)!}\left(-\left(\frac{\theta}{2}\right)^2\right)^m\begin{pmatrix}1 & 0 \\ 0 & 1\end{pmatrix} + \left(\frac{\theta}{2}\right)\frac{1}{(2m+1)!}\left(-\left(\frac{\theta}{2}\right)^2\right)^m\begin{pmatrix}0 & -1 \\ 1 & 0\end{pmatrix}\right\}$$
$$= \begin{pmatrix} \cos\frac{\theta}{2} & -\sin\frac{\theta}{2} \\ \sin\frac{\theta}{2} & \cos\frac{\theta}{2} \end{pmatrix}$$

最後に3軸方向の rapidity η の boost は

$$
(198)\begin{cases}
e^{-i\eta K^3} = e^{-i\eta \Sigma^{03}} = e^{-i\eta(-\frac{i}{2})\begin{pmatrix}\sigma^3 & 0 \\ 0 & -\sigma^3\end{pmatrix}} = e^{\frac{\eta}{2}\begin{pmatrix}-\sigma^3 & 0 \\ 0 & \sigma^3\end{pmatrix}} = \begin{pmatrix} e^{-\frac{\eta}{2}\sigma^3} & 0 \\ 0 & e^{\frac{\eta}{2}\sigma^3}\end{pmatrix} \\
e^{-\frac{\eta}{2}\sigma^3} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}\left(-\frac{\eta}{2}\right)^n (\sigma^3)^n \\
\quad = \sum_{m=0}^{\infty}\left\{ \frac{1}{(2m)!}\left(-\frac{\eta}{2}\right)^{2m}\begin{pmatrix}1 & 0 \\ 0 & 1\end{pmatrix} + \left(-\frac{\eta}{2}\right)\frac{1}{(2m+1)!}\left(-\frac{\eta}{2}\right)^{2m}\begin{pmatrix}1 & 0 \\ 0 & -1\end{pmatrix}\right\} \\
\quad = \begin{pmatrix} \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}\left(-\frac{\eta}{2}\right)^n & 0 \\ 0 & \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}\left(\frac{\eta}{2}\right)^n \end{pmatrix} \\
\quad = \begin{pmatrix} e^{-\frac{\eta}{2}} & 0 \\ 0 & e^{\frac{\eta}{2}} \end{pmatrix} \\
e^{\frac{\eta}{2}\sigma^3} = \begin{pmatrix} e^{\frac{\eta}{2}} & 0 \\ 0 & e^{-\frac{\eta}{2}} \end{pmatrix}
\end{cases}
$$

重心系 $p^\mu = (m, 0, 0, 0)$ で3軸方向に偏極しているDirac粒子のスピノール [(138)式で $E=m$, $|p|=0$, $\lambda=+$]

$$
(199)\quad u(p, \lambda=+) = \begin{pmatrix} u(p,+)_- \\ u(p,+)_+ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{m}\,\chi_+ \\ \sqrt{m}\,\chi_+ \end{pmatrix} = \sqrt{m}\begin{pmatrix}1\\0\\1\\0\end{pmatrix}
$$

をまず3軸方向に boost し(ヘリシティーを変えない boost)、次に2軸の回りに θ 回転、最後に3軸の回りに ϕ 回転させてみます。

$$
(200)\quad u(p, \lambda=+) = e^{-i\phi J^3} e^{-i\theta J^2} e^{-i\eta K^3}\sqrt{m}\begin{pmatrix}1\\0\\1\\0\end{pmatrix}
$$

(201)
$$u(p,+) = \sqrt{m}\left(\begin{array}{cc|cc} e^{-i\frac{\phi}{2}} & & & \\ & e^{i\frac{\phi}{2}} & \multicolumn{2}{c}{0} \\ \hline & & e^{-i\frac{\phi}{2}} & \\ \multicolumn{2}{c|}{0} & & e^{i\frac{\phi}{2}} \end{array}\right)\left(\begin{array}{cc|cc} \cos\frac{\theta}{2} & -\sin\frac{\theta}{2} & \multicolumn{2}{c}{0} \\ \sin\frac{\theta}{2} & \cos\frac{\theta}{2} & & \\ \hline \multicolumn{2}{c|}{0} & \cos\frac{\theta}{2} & -\sin\frac{\theta}{2} \\ & & \sin\frac{\theta}{2} & \cos\frac{\theta}{2} \end{array}\right)\left(\begin{array}{cc|cc} e^{-\frac{\eta}{2}} & & & \\ & e^{\frac{\eta}{2}} & \multicolumn{2}{c}{0} \\ \hline & & e^{\frac{\eta}{2}} & \\ \multicolumn{2}{c|}{0} & & e^{-\frac{\eta}{2}} \end{array}\right)\begin{pmatrix}1\\0\\1\\0\end{pmatrix}$$

$$= \sqrt{m}\begin{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{-i\frac{\phi}{2}} & 0 \\ 0 & e^{i\frac{\phi}{2}} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \cos\frac{\theta}{2} & -\sin\frac{\theta}{2} \\ \sin\frac{\theta}{2} & \cos\frac{\theta}{2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} e^{-\frac{\eta}{2}} & 0 \\ 0 & e^{\frac{\eta}{2}} \end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} e^{-i\frac{\phi}{2}} & 0 \\ 0 & e^{i\frac{\phi}{2}} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \cos\frac{\theta}{2} & -\sin\frac{\theta}{2} \\ \sin\frac{\theta}{2} & \cos\frac{\theta}{2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} e^{\frac{\eta}{2}} & 0 \\ 0 & e^{-\frac{\eta}{2}} \end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} \end{pmatrix}$$

$$= \sqrt{m}\begin{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{-i\frac{\phi}{2}} & 0 \\ 0 & e^{i\frac{\phi}{2}} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \cos\frac{\theta}{2} & -\sin\frac{\theta}{2} \\ \sin\frac{\theta}{2} & \cos\frac{\theta}{2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} e^{-\frac{\eta}{2}} \\ 0 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} e^{-i\frac{\phi}{2}} & 0 \\ 0 & e^{i\frac{\phi}{2}} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \cos\frac{\theta}{2} & -\sin\frac{\theta}{2} \\ \sin\frac{\theta}{2} & \cos\frac{\theta}{2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} e^{\frac{\eta}{2}} \\ 0 \end{pmatrix} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \sqrt{m}\, e^{-\frac{\eta}{2}} \begin{pmatrix} e^{-i\frac{\phi}{2}} & 0 \\ 0 & e^{i\frac{\phi}{2}} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \cos\frac{\theta}{2} \\ \sin\frac{\theta}{2} \end{pmatrix} \\ \sqrt{m}\, e^{\frac{\eta}{2}} \begin{pmatrix} e^{-i\frac{\phi}{2}} & 0 \\ 0 & e^{i\frac{\phi}{2}} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \cos\frac{\theta}{2} \\ \sin\frac{\theta}{2} \end{pmatrix} \end{pmatrix}$$

$$= e^{-i\frac{\phi}{2}} \underbrace{\begin{pmatrix} \sqrt{m e^{-\eta}} \begin{pmatrix} \cos\frac{\theta}{2} \\ \sin\frac{\theta}{2}\, e^{i\phi} \end{pmatrix} \\ \sqrt{m e^{\eta}} \begin{pmatrix} \cos\frac{\theta}{2} \\ \sin\frac{\theta}{2}\, e^{i\phi} \end{pmatrix} \end{pmatrix}}_{\text{HELAS}}$$

ここで

(202)
$$\begin{cases} m e^{-\eta} = m(\cosh\eta - \sinh\eta) = E - |p| \\ m e^{\eta} = m(\cosh\eta + \sinh\eta) = E + |p| \end{cases}$$

を使うと，HELASの $u(p,+)$ の表式 (138) が位相 $e^{-i\frac{\phi}{2}}$ を除いて再現されることが分かります。スピノールのLorentz変換の練習でした。//

Dirac粒子の propagator を求めます。表式 (163) をコピーして

(203)=(163)
$$\begin{cases} \psi(x) = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3 2E} \sum_\lambda \left\{ a_{k,\lambda} u(k,\lambda) e^{-ikx} + b^\dagger_{k,\lambda} v(k,\lambda) e^{ikx} \right\} \\ \bar{\psi}(x) = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3 2E} \sum_\lambda \left\{ a^\dagger_{k,\lambda} \bar{u}(k,\lambda) e^{ikx} + b_{k,\lambda} \bar{v}(k,\lambda) e^{-ikx} \right\} \end{cases}$$

反交換関係 (164) を用いると $i, j = 1, 2, 3, 4$ をスピノールの足として

(204)
$$\begin{cases} \langle 0 | \psi_i(x) \bar{\psi}_j(y) | 0 \rangle = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3 2E} \sum_\lambda u_i(k,\lambda) \bar{u}_j(k,\lambda) e^{-ik(x-y)} \\ \langle 0 | \bar{\psi}_j(y) \psi_i(x) | 0 \rangle = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3 2E} \sum_\lambda v_i(k,\lambda) \bar{v}_j(k,\lambda) e^{-ik(y-x)} \end{cases}$$

ここで free な Dirac 波動関数の和則 (158), (159) を

(205)
$$\begin{cases} \sum_\lambda u_i(p,\lambda) \bar{u}_j(p,\lambda) = (m + \not{p})_{ij} \\ \sum_\lambda v_i(p,\lambda) \bar{v}_j(p,\lambda) = (-m + \not{p})_{ij} \end{cases}$$

と書くと、Feynman の propagator が

(206)
$$\begin{aligned} S_F(x-y)_{ij} &= \langle 0 | T \psi_i(x) \bar{\psi}_j(y) | 0 \rangle \\ &\equiv \theta(x^0 - y^0) \langle 0 | \psi_i(x) \bar{\psi}_j(y) | 0 \rangle \\ &\quad - \theta(y^0 - x^0) \langle 0 | \bar{\psi}_j(y) \psi_i(x) | 0 \rangle \\ &= \theta(x^0 - y^0) \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3 2E} (m + \not{k})_{ij} e^{-ik(x-y)} \\ &\quad + \theta(y^0 - x^0) \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3 2E} (m - \not{k})_{ij} e^{-ik(y-x)} \\ &= \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{(m + \not{k})_{ij}}{\underline{k^2 - m^2 + i\varepsilon}} e^{-ik(x-y)} \end{aligned}$$

が導かれる。p.48の(56)''式と同様、$\theta(y^0-x^0)$項で

(207) $$(m+(-E\gamma^0)-\mathbf{k}\cdot\boldsymbol{\gamma})d^3\mathbf{k} = (m-E\gamma^0+\mathbf{k}'\cdot\boldsymbol{\gamma})d^3(-\mathbf{k}')$$
$$= (-m+E\gamma^0-\mathbf{k}'\cdot\boldsymbol{\gamma})d^3\mathbf{k}'$$
$$= (-m+\not{k})d^3k$$

に注意して下さい。(206)の表式は、ファインマン propagator が

(207) $$x \longleftarrow y \;=\; \theta(x^0-y^0)\; x \overset{\text{粒子}}{\longleftarrow} y \;+\; \theta(y^0-x^0)\; y \underset{\overleftarrow{\ \ }\ \text{反粒子}}{\longrightarrow} x$$

の和であることを表わしています。

ここまでの準備で、Dirac粒子を含む理論の散乱振幅を、摂動論で求めることができます。その前にp.42の(45)式が間違っていたのでここで修正しておきます。

(208)=(45)$_{\text{正}}$ $$S = T e^{-i\int H_I t} \equiv \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}\,T\prod_{k=1}^{n}\left[\int_{-\infty}^{\infty}[-iH_I(t_k)]dt_k\right]$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty}\left[\int_{-\infty}^{\infty}[-iH_I(t_n)]dt_n\right]\left[\int_{-\infty}^{t_n}[-iH_I(t_{n-1})]dt_{n-1}\right]$$
$$\cdots\left[\int_{-\infty}^{t_3}[-iH_I(t_2)]dt_2\right]\left[\int_{-\infty}^{t_2}[-iH_I(t_1)]dt_1\right]$$

注意点は、時間積分の下限は全て$-\infty$であること、$t_n>t_{n-1}>\cdots>t_2>t_1$の順を決めてしまったら、$\frac{1}{n!}$の因子がなくなることです。[T積は$n!$個の項の和です。]

2005.5.12

QED

(209) $$\mathcal{L}_{QED} = \overline{\psi}(i\not{D} - m)\psi - \frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + \text{gauge fix term}$$
$$= \overline{\psi}(i\gamma_\mu(\partial^\mu + ieQA^\mu) - m)\psi - \frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + \cdots$$
$$= \left[\overline{\psi}(i\not{\partial} - m)\psi - \frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + \cdots\right] - eQA_\mu\overline{\psi}\gamma^\mu\psi$$
$$= \mathcal{L}_0 + \mathcal{L}_I$$

ここで D^μ は共変微分

(210) $$D^\mu = \partial^\mu + ieQA^\mu$$

私の convention は $e = \sqrt{4\pi\alpha}$ が陽子の電荷(正)，Q が e を単位とした粒子の電荷です。 $Q=-1$ (e, μ, τ)，$Q=\frac{2}{3}(u,c,t)$，$Q=-\frac{1}{3}(d,s,b)$.

QEDのゲージ変換（xに依存する位相の変換）

(211) $$\psi(x) \longrightarrow \psi'(x) = e^{ieQ\theta(x)}\psi(x)$$

で (209) が不変であるためには，

(212) $$D^\mu \longrightarrow D^{\mu\prime} = e^{ieQ\theta(x)}D^\mu e^{-ieQ\theta(x)}$$
$$= e^{ieQ\theta(x)}(\partial^\mu + ieQA^\mu)e^{-ieQ\theta(x)}$$
$$= \partial^\mu - ieQ\partial^\mu\theta(x) + ieQA^\mu$$
$$= \partial^\mu + ieQ(A^\mu - \partial^\mu\theta(x))$$
$$= \partial^\mu + ieQA'^\mu$$

が必要で，

2005. 5. 12

ゲージボソン場は

(213) $A_\mu(x) \to A'_\mu(x) = A_\mu(x) - \cancel{i}\,\partial_\mu\theta(x)$

に従って変換しなければならない。$F_{\mu\nu}$ は

(214) $F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu \to F'_{\mu\nu} = \partial_\mu A'_\nu - \partial_\nu A'_\mu$

$$= \partial_\mu(A_\nu - i\partial_\nu\theta) - \partial_\nu(A_\mu - i\partial_\mu\theta)$$

$$= \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu - i(\partial_\mu\partial_\nu - \partial_\nu\partial_\mu)\theta$$

$$= \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu = F_{\mu\nu}$$

で不変。従って $\mathcal{L}_{QED}$ (209) [の … を除いた部分] はゲージ変換 (211) + (213) で不変。特に光の質量項

(215) $\mathcal{L}_{photon\ mass} = -\frac{m^2}{2}A^\mu A_\mu$

は (213) のもとで不変でないので禁止される。

量子化するためには、$A^\mu(x)$ の4つの自由度の内2つの横波成分だけを量子化しなければならないので工夫(ゲージ固定)が必要ですが、ここでは光子の Feynman propagator (98)

(215) $D_F^{\mu\nu}(x-y) = \langle 0|T A^\mu(x) A^\nu(y)|0\rangle$

$$= \int d^4k \frac{i}{k^2 + i\varepsilon} \sum_\lambda \varepsilon^\mu(k,\lambda)\varepsilon^\nu(k,\lambda)^* e^{-i(x-y)}$$

$$= \int d^4k \frac{i}{k^2 + i\varepsilon}(-g^{\mu\nu} + \underset{\uparrow\ k^\mu \text{ 又は } k^\nu}{\cdots})e^{-i(x-y)}$$

を使って tree level の散乱振幅を計算する。最初は

(216) $e^-(k_1,\lambda_1) + e^+(k_2,\lambda_2) \longrightarrow \mu^-(k_3,\lambda_3) + \mu^+(k_4,\lambda_4)$

を計算してみよう。$|i\rangle$ と $|f\rangle$ は

(217)
$$\begin{cases} |i\rangle = a^\dagger_{k_1,\lambda_1} b^\dagger_{k_2,\lambda_2}|0\rangle = a^\dagger_{e,k_1,\lambda_1} b^\dagger_{e,k_2,\lambda_2}|0\rangle \\ |f\rangle = a^\dagger_{k_3,\lambda_3} b^\dagger_{k_4,\lambda_4}|0\rangle = a^\dagger_{\mu,k_3,\lambda_3} b^\dagger_{\mu,k_4,\lambda_4}|0\rangle \end{cases}$$

(218)
$$\begin{cases} \mathcal{L}_{I,e} = -eQ_e\overline{\psi}_e\gamma^\mu\psi_e A_\mu = -eQ_e A_\alpha(x)\overline{\psi}_e(x)\gamma^\alpha\psi_e(x) \\ \mathcal{L}_{I,\mu} = -eQ_\mu\overline{\psi}_\mu\gamma^\mu\psi_\mu A_\mu = -eQ_\mu A_\beta(x)\overline{\psi}_\mu(x)\gamma^\beta\psi_\mu(x) \end{cases}$$

2次の振幅は

(219)
$$iT_{fi} = \langle 0|b_{\mu,k_4,\lambda_4}a_{\mu,k_3,\lambda_3}T\left[i\int d^4x\,\mathcal{L}_{I,\mu}(x)\right]\left[i\int d^4y\,\mathcal{L}_{I,e}(y)\right]a^\dagger_{e,k_1,\lambda_1}b^\dagger_{e,k_2,\lambda_2}|0\rangle$$

$$= \langle 0|b_{\mu,k_4,\lambda_4}a_{\mu,k_3,\lambda_3}T\left[(-ieQ_\mu)\overbrace{A_\alpha(x)\overline{\psi}_\mu(x)\gamma^\alpha\psi_\mu(x)}^{\int d^4x}\right]\left[(-ieQ_e)\overbrace{A_\beta(y)\overline{\psi}_e(y)\gamma^\beta\psi_e(y)}^{\int d^4y}\right]a^\dagger_{e,k_1,\lambda_1}b^\dagger_{e,k_2,\lambda_2}|0\rangle$$

$$= (-ieQ_e)(-ieQ_\mu)\int d^4x\int d^4y\;\overline{u}(k_3,\lambda_3)\gamma^\alpha v(k_4,\lambda_4)e^{+ix(k_3+k_4)}$$
$$\langle 0|TA_\alpha(x)A_\beta(y)|0\rangle\,\overline{v}(k_2,\lambda_2)\gamma^\beta u(k_1,\lambda_1)e^{-iy(k_1+k_2)}$$

$$= (-ieQ_e)(-ieQ_\mu)\int d^4x\int d^4y\;\overline{u}(k_3,\lambda_3)\gamma^\alpha v(k_4,\lambda_4)e^{ix(k_3+k_4)}$$
$$\int\frac{d^4k}{(2\pi)^4}\frac{ie^{-ik(x-y)}}{k^2+i\epsilon}(-g_{\alpha\beta}+\cdots)\,\overline{v}(k_2,\lambda_2)\gamma^\beta u(k_1,\lambda_1)e^{-iy(k_1+k_2)}$$

p.49の(69)式と同じように、$\int d^4x \int d^4y$を実行して $(2\pi)^4\delta^4(k-k_3-k_4)(2\pi)^4\delta^4(k-k_1-k_2)$

を求め、$\int d^4k$を実行すると

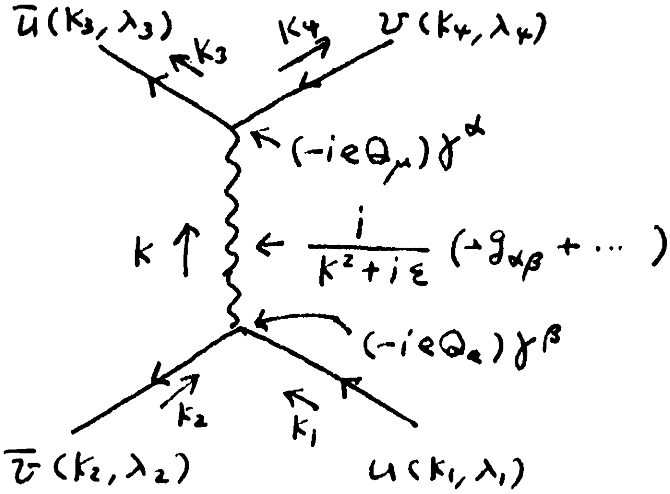
(220) $$iT_{fi} = (-ieQ_e)(-ieQ_\mu)\,\bar{u}(k_3,\lambda_3)\gamma^\alpha v(k_4,\lambda_4)$$
$$\times \frac{i}{k^2+i\varepsilon}(-g_{\alpha\beta}+\cdots)\,\bar{v}(k_2,\lambda_2)\gamma^\beta u(k_1,\lambda_1)\;(2\pi)^4\delta^4(k_1+k_2-k_3-k_4)$$
$$\equiv iM_{fi}\;(2\pi)^4\delta^4(k_1+k_2-k_3-k_4)$$

となり、全運動量保存を因子化した振幅

(221) $$M_{fi} = \frac{1}{i}\,\bar{u}(k_3,\lambda_3)(-ieQ_\mu\gamma^\alpha)\,v(k_4,\lambda_4)$$
$$\times \frac{i}{k^2+i\varepsilon}(-g_{\alpha\beta}+\cdots)\,\bar{v}(k_2,\lambda_2)(-ieQ_e\gamma^\beta)\,u(k_1,\lambda_1)$$

上式は Feynman 図

(222) iM_{fi} =



$k=k_1+k_2=k_3+k_4$

i因子をまとめると、

(223) $$M = -e^2Q_eQ_\mu\,\bar{u}(k_3,\lambda_3)\gamma^\alpha v(k_4,\lambda_4)\,\frac{-g_{\alpha\beta}+\cdots}{k^2+i\varepsilon}\,\bar{v}(k_2,\lambda_2)\gamma^\beta u(k_1,\lambda_1)$$

$k=k_1+k_2=k_3+k_4$

2005・5・12

光子 propagator のスピン和項 $(-g_{\alpha\beta}+\cdots)$ の … は k_α 又は k_β を持つ。
その寄与は消える。

(224) $$k_\alpha \bar{u}(k_3,\lambda_3)\gamma^\alpha v(k_4,\lambda_4) = \bar{u}(k_3,\lambda_3)(\not{k}_3+\not{k}_4)v(k_4,\lambda_4)$$
$$= \bar{u}(k_3,\lambda_3)[(\not{k}_3 - m_\mu) + (\not{k}_4 + m_\mu)]v(k_4,\lambda_4)$$
$$= 0$$

(225) $$k_\beta \bar{v}(k_2,\lambda_2)\gamma^\beta u(k_1,\lambda_1) = \bar{v}(k_2,\lambda_2)(\not{k}_1+\not{k}_2)u(k_1,\lambda_1)$$
$$= \bar{v}(k_2,\lambda_2)[(\not{k}_1 + m_e) + (\not{k}_2 - m_e)]u(k_1,\lambda_1)$$
$$= 0$$

ここで Dirac 方程式 (131)

(226) $$\begin{cases} (\not{p}-m)u(p,\lambda) = \bar{u}(p,\lambda)(\not{p}-m) = 0 \\ (\not{p}+m)v(p,\lambda) = \bar{v}(p,\lambda)(\not{p}+m) = 0 \end{cases}$$

を用いた。最終的に

(227) $$M = \frac{e^2 Q_e Q_\mu}{s}\bar{u}(k_3,\lambda_3)\gamma^\alpha v(k_4,\lambda_4)\cdot\bar{v}(k_2,\lambda_2)\gamma_\alpha u(k_1,\lambda_1) \quad ; s=(k_1+k_2)^2 = (k_3+k_4)^2$$

を得る。ここで

(228) $$m_e = 0 \quad , \quad m_\mu = m$$

として、e^+e^- の重心系.

2005. 5.12

(229) $k_1^\mu = \frac{\sqrt{s}}{2}(1, 0, 0, 1)$ $\qquad$ $k_3^\mu = \frac{\sqrt{s}}{2}(1, \beta\sin\theta, 0, \beta\cos\theta)$

$k_2^\mu = \frac{\sqrt{s}}{2}(1, 0, 0, -1)$ $\qquad$ $k_4^\mu = \frac{\sqrt{s}}{2}(1, -\beta\sin\theta, 0, -\beta\cos\theta)$

$\beta = \sqrt{1-4m^2/s}$, で 振幅 (227) を求めてみます。helicity に依存するので

(230) $$\mathcal{M}^{\lambda_3\lambda_4}_{\lambda_1\lambda_2} = \frac{e^2 Q_e Q_\mu}{s} g_{\alpha\beta} J^\alpha_{\lambda_3\lambda_4} J^\beta_{\lambda_1\lambda_2}$$

と置いて、カレント $J^\alpha_{\lambda_3\lambda_4}$, $J^\beta_{\lambda_1\lambda_2}$ を求めます。 $k_1^2 = k_2^2 = m_e^2 = 0$ なので

(231) $$\begin{aligned} J^\beta_{\lambda_1\lambda_2} &= \bar{v}(k_2,\lambda_2)\begin{pmatrix} 0 & \sigma_+^\beta \\ \sigma_-^\beta & 0 \end{pmatrix} u(k_1,\lambda_1) \\ &= (v(k_2,\lambda_2)_+^\dagger, v(k_2,\lambda_2)_-^\dagger)\begin{pmatrix} 0 & \sigma_+^\beta \\ \sigma_-^\beta & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u(k_1,\lambda_1)_- \\ u(k_1,\lambda_1)_+ \end{pmatrix} \\ &= v(k_2,\lambda_2)_+^\dagger \sigma_+^\beta u(k_1,\lambda_1)_+ + v(k_2,\lambda_2)_-^\dagger \sigma_-^\beta u(k_1,\lambda_1)_- \end{aligned}$$

ここで (138) と (151) をコピーしておきます。

(232) $$\begin{cases} u(p,\lambda)_\pm = \sqrt{E \pm \lambda|p|}\, \chi_\lambda(\vec{p}) & \xrightarrow{m\to 0} \delta_{\lambda,\pm}\sqrt{2E}\, \chi_\pm(\vec{p}) \\ v(p,\lambda)_\pm = \pm\lambda\sqrt{E \mp \lambda|p|}\, \chi_{-\lambda}(\vec{p}) & \xrightarrow{m\to 0} -\delta_{\lambda,\mp}\sqrt{2E}\, \chi_\pm(\vec{p}) \end{cases}$$

(233) $$\begin{aligned} J^\beta_{+-} = J^\beta_{\lambda_1\lambda_2}(\lambda_1=+, \lambda_2=-) &= v(k_2,-)_+^\dagger \sigma_+^\beta u(k_1,+)_+ \\ &= -2E\, \chi_+^\dagger(\vec{k}_2)\, \sigma_+^\beta\, \chi_+(\vec{k}_1) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} J^\beta_{-+} = J^\beta_{\lambda_1\lambda_2}(\lambda_1=-, \lambda_2=+) &= v(k_2,+)_-^\dagger \sigma_-^\mu u(k_1,-)_- \\ &= -2E\, \chi_-^\dagger(\vec{k}_2)\, \sigma_-^\beta\, \chi_-(\vec{k}_1) \end{aligned}$$

ここで、(142), (145) で $\vec{k}_1 : (\theta,\phi) = (0,0)$; $\vec{k}_2 : (\theta,\phi) = (\pi, 0)$ とすると

(234) $\chi_+(\vec{k_1}) = \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$ $\qquad$ $\chi_+(\vec{k_2}) = \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$

$\chi_-(\vec{k_1}) = \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$ $\qquad$ $\chi_-(\vec{k_2}) = \begin{pmatrix}-1\\0\end{pmatrix}$

(233) に代入すると

(235) $J^{\beta}_{+-} = -2E\,(0,1)\left(1, \vec{\sigma}\right)\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} = -\sqrt{s}\,(0,1,i,0)$

$J^{\beta}_{-+} = -2E\,(-1,0)\left(1, -\vec{\sigma}\right)\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} = \sqrt{s}\,(0,-1,i,0)$
$= -\sqrt{s}\,(0,1,-i,0)$

(236) $J^{\beta}_{\lambda,-\lambda} = -\sqrt{s}\,(0,1,\lambda i,0)$

一方 μ のカレントは $m \neq 0$ を keep して

(237) $J^{\alpha}_{\lambda_3\lambda_4} = \bar{u}(k_3,\lambda_3)\begin{pmatrix}0 & \sigma_+^{\alpha}\\ \sigma_-^{\alpha} & 0\end{pmatrix} v(k_4,\lambda_4)$

$= u(k_3,\lambda_3)_+^{\dagger}\,\sigma_+^{\alpha}\,v(k_4,\lambda_4)_+ + u(k_3,\lambda_3)_-^{\dagger}\,\sigma_-^{\alpha}\,v(k_4,\lambda_4)_-$

$= \lambda_4 E\Big\{\sqrt{1+\lambda_3\beta}\sqrt{1-\lambda_4\beta}\,\chi^{\dagger}_{\lambda_3}(\vec{k_3})\sigma_+^{\alpha}\chi_{-\lambda_4}(\vec{k_4})$

$-\sqrt{1-\lambda_3\beta}\sqrt{1+\lambda_4\beta}\,\chi^{\dagger}_{\lambda_3}(\vec{k_3})\sigma_-^{\alpha}\chi_{-\lambda_4}(\vec{k_4})\Big\}$

(238)
$J^{\alpha}_{\sigma,\sigma} = \sigma E\sqrt{1-\beta^2}\left\{\chi^{\dagger}_{\sigma}(\vec{k_3})\sigma_+^{\alpha}\chi_{-\sigma}(\vec{k_4}) - \chi^{\dagger}_{\sigma}(\vec{k_3})\sigma_-^{\alpha}\chi_{-\sigma}(\vec{k_4})\right\}$

$= \sigma E\sqrt{1-\beta^2}\left\{0,\ 2\chi^{\dagger}_{\sigma}(\vec{k_3})\vec{\sigma}\chi_{-\sigma}(\vec{k_4})\right\}$

$J^{\alpha}_{+,-} = -E\left\{(1+\beta)\chi^{\dagger}_{+}(\vec{k_3})\sigma_+^{\alpha}\chi_{+}(\vec{k_4}) - (1-\beta)\chi^{\dagger}_{+}(\vec{k_3})\sigma_-^{\alpha}\chi_{+}(\vec{k_4})\right\}$

$J^{\alpha}_{-,+} = E\left\{(1-\beta)\chi^{\dagger}_{-}(\vec{k_3})\sigma_+^{\alpha}\chi_{-}(\vec{k_4}) - (1+\beta)\chi^{\dagger}_{-}(\vec{k_3})\sigma_-^{\alpha}\chi_{-}(\vec{k_4})\right\}$

ここで $\vec{k_3} : (\theta, \phi) = (\theta, 0)$; $\vec{k_4} : (\theta, \phi) = (\pi-\theta, \pi)$ とすると、(142), (145) より

$$(239) \quad \chi_+(\vec{k_3}) = \begin{pmatrix} \cos\frac{\theta}{2} \\ \sin\frac{\theta}{2} \end{pmatrix} \qquad \chi_+(\vec{k_4}) = \begin{pmatrix} \sin\frac{\theta}{2} \\ -\cos\frac{\theta}{2} \end{pmatrix}$$

$$\chi_-(\vec{k_3}) = \begin{pmatrix} -\sin\frac{\theta}{2} \\ \cos\frac{\theta}{2} \end{pmatrix} \qquad \chi_-(\vec{k_4}) = \begin{pmatrix} +\cos\frac{\theta}{2} \\ \sin\frac{\theta}{2} \end{pmatrix}$$

これらを (238) に代入すると、

$$(240) \quad J^\alpha_{+,+} = E\sqrt{1-\beta^2}\left\{0,\ 2\chi_+^\dagger(\vec{k_3})\vec{\sigma}\chi_-(\vec{k_4})\right\}$$

$$= E\cdot\frac{m}{E}\cdot 2\left\{0,\ (\cos\tfrac{\theta}{2}, \sin\tfrac{\theta}{2})\vec{\sigma}\begin{pmatrix} +\cos\frac{\theta}{2} \\ \sin\frac{\theta}{2} \end{pmatrix}\right\}$$

$$= 2m\left[0,\ \sin\theta,\ 0,\ \cos\theta\right]$$

$$J^\alpha_{-,-} = -2m\left[0,\ \chi_-^\dagger(\vec{k_3})\vec{\sigma}\chi_+(\vec{k_4})\right]$$

$$= -2m\left[0,\ (-\sin\tfrac{\theta}{2}, \cos\tfrac{\theta}{2})\vec{\sigma}\begin{pmatrix} \sin\frac{\theta}{2} \\ -\cos\frac{\theta}{2} \end{pmatrix}\right]$$

$$= +2m\left[0, -\sin\theta,\ 0, -\cos\theta\right]$$

$$J^\alpha_{+,-} = -E\left\{(1+\beta)(\cos\tfrac{\theta}{2}, \sin\tfrac{\theta}{2})\sigma_+^\alpha\begin{pmatrix} \sin\frac{\theta}{2} \\ -\cos\frac{\theta}{2} \end{pmatrix} - (1-\beta)(\cos\tfrac{\theta}{2}, \sin\tfrac{\theta}{2})\sigma_-^\alpha\begin{pmatrix} \sin\frac{\theta}{2} \\ -\cos\frac{\theta}{2} \end{pmatrix}\right\}$$

$$= -E(1+\beta)\left[0, -\cos\theta,\ i,\ \sin\theta\right] + E(1-\beta)\left[0, \cos\theta, -i, -\sin\theta\right]$$

$$= 2E\left[0, \cos\theta, -i, -\sin\theta\right]$$

$$J^\alpha_{-,+} = E\left\{(1-\beta)(-\sin\tfrac{\theta}{2}, \cos\tfrac{\theta}{2})\sigma_+^\alpha\begin{pmatrix} \cos\frac{\theta}{2} \\ \sin\frac{\theta}{2} \end{pmatrix} - (1+\beta)(-\sin\tfrac{\theta}{2}, \cos\tfrac{\theta}{2})\sigma_-^\alpha\begin{pmatrix} \cos\frac{\theta}{2} \\ \sin\frac{\theta}{2} \end{pmatrix}\right\}$$

$$= E(1-\beta)\left[0, \cos\theta,\ i, -\sin\theta\right] - E(1+\beta)\left[0, -\cos\theta, -i, \sin\theta\right]$$

$$= E(1-\beta)\left[0, \cos\theta,\ i, -\sin\theta\right] + E(1+\beta)\left[0, \cos\theta,\ i, -\sin\theta\right]$$

$$= 2E\left[0, \cos\theta,\ i, -\sin\theta\right]$$

(236) と (240) を (230) に代入すると全ての helicity 振幅が得られる。

(241) $$M^{\sigma,\sigma}_{\lambda,-\lambda} = \frac{e^2 Q_e Q_\mu}{s} g_{\alpha\beta}\ 2m[0, \sigma\sin\theta, 0, \sigma\cos\theta]\cdot[0, 1, \lambda i, 0](-\sqrt{s})$$
$$= \frac{e^2 Q_e Q_\mu}{s}(-2m\sqrt{s})[0 - \sigma\sin\theta - 0 - 0]$$
$$= e^2 Q_e Q_\mu \frac{2m}{\sqrt{s}}\sin\theta\cdot\sigma$$

$$M^{\sigma,-\sigma}_{\lambda,-\lambda} = \frac{e^2 Q_e Q_\mu}{s} g_{\alpha\beta}\ \sqrt{s}[0, \cos\theta, -\sigma i, -\sin\theta]\cdot[0, 1, \lambda i, 0](-\sqrt{s})$$
$$= \frac{e^2 Q_e Q_\mu}{s}(-s)[0 - \cos\theta - \sigma\lambda - 0]$$
$$= e^2 Q_e Q_\mu(\cos\theta + \sigma\lambda)$$

断面積は

(242) $$d\sigma^{LL}_{LR} = d\sigma^{RR}_{LR} = d\sigma^{LL}_{RL} = d\sigma^{RR}_{RL} = \frac{1}{2s}\left|e^2 Q_e Q_\mu \frac{2m}{\sqrt{s}}\sin\theta\right|^2 \frac{\beta}{8\pi}\frac{d\cos\theta}{2}$$
$$= \frac{e^4 Q_e^2 Q_\mu^2}{32\pi s}\frac{4m^2}{s}\sin^2\theta\cdot\beta\, d\cos\theta$$

$$d\sigma^{LR}_{LR} = d\sigma^{RL}_{RL} = \frac{1}{2s}\left|e^2 Q_e Q_\mu(\cos\theta + 1)\right|^2 \frac{\beta}{8\pi}\frac{d\cos\theta}{2}$$
$$= \frac{e^4 Q_e^2 Q_\mu^2}{32\pi s}(1+\cos\theta)^2\beta\, d\cos\theta$$

$$d\sigma^{RL}_{LR} = d\sigma^{LR}_{RL} = \frac{1}{2s}\left|e^2 Q_e Q_\mu(\cos\theta - 1)\right|^2 \frac{\beta}{8\pi}\frac{d\cos\theta}{2}$$
$$= \frac{e^4 Q_e^2 Q_\mu^2}{32\pi s}(1-\cos\theta)^2\beta\, d\cos\theta$$

e^+e^- のスピンを平均、$\mu^+\mu^-$ のスピンを足すと、

(243) $$\frac{d\sigma}{d\cos\theta} = \frac{(4\pi\alpha)^2 Q_e^2 Q_\mu^2}{32\pi s}\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\left\{(1-\beta^2)\sin^2\theta\times 4 + (1+\cos\theta)^2\times 2 + (1-\cos\theta)^2\times 2\right\}\beta$$
$$= \frac{\pi\alpha^2 Q_e^2 Q_\mu^2}{2s}\left\{\left(1+\frac{4m^2}{s}\right) + \left(1-\frac{4m^2}{s}\right)\cos^2\theta\right\}\beta \qquad ;\ Q_e = Q_\mu = 1$$

LHCでの quark, gluon 散乱との比較のために計算しておいた方が良いと思われるQEDの2→2過程は、次の通りです。

(244a) $e^+e^- \to \mu^+\mu^-$ $(m_\mu \neq 0)$ $\Leftrightarrow$ $q\bar{q} \to Q\bar{Q}$

(244b) $\gamma\gamma \to \mu^+\mu^-$ $(m_\mu \neq 0)$ $\Leftrightarrow$ $gg \to Q\bar{Q}$

(244c) $e^-e^- \to e^-e^-$ $(m_e = 0)$ $\Leftrightarrow$ $qq \to qq$

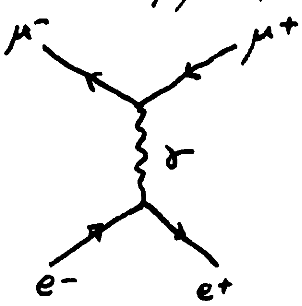
(244d) $e^-\gamma \to e^-\gamma$ $(m_e = 0)$ $\Leftrightarrow$ $qg \to qg$

(244e) none $\Leftrightarrow$ $gg \to gg$

一応、(244a)−(244e)の全ての過程についてヘリシティー振幅を求めようと思いますが、今日は時間切れですので、次ページから、QCDの紹介をさせて下さい。

(244a)の $e^+e^- \to \mu^+\mu^-$ の振幅は(241)式'にまとまっていますが、覚えるべきキーポイントは次の点です。

(245) $e^+e^- \to \mu^+\mu^-$ 等 s-channel の vector boson 交換過程では



$m=0$ 極限で、$\sigma_{e^-} = -\sigma_{e^+}$, $\sigma_{\mu^-} = -\sigma_{\mu^+}$ が残り、重心系で e^- と μ^- の角度を θ としたときに

$\sigma_{e^-} = \sigma_{\mu^-}$ のとき $|M| \sim 1+\cos\theta$
$e_{e^-} = -\sigma_{\mu^-}$ のとき $|M| \sim 1-\cos\theta$

QCD

残った時間で、簡単にQCDの紹介をします。Lagrangian密度は

(244) $$\mathcal{L}_{QCD} = \bar{\psi}_i (i \not{D}_{ij} - m\delta_{ij}) \psi_j - \frac{1}{4} F^a_{\mu\nu} F^{a\mu\nu} + \text{gauge fix terms}$$

と表わすことができ（quark 1ケだけを書きました）、QEDの(209)式と見かけはそっくりです。ここで

(245) $$\begin{cases} i = 1, 2, 3 \text{ (又は red, blue, green) は SU(3)の基本表現の自由度} \\ a = 1, 2, 3, \cdots, 8 \text{ は SU(3)の adjoint 表現の自由度} \end{cases}$$

です。quark field $\psi_j(x)$ は、SU(3)空間の3次元縦ベクトルととることができて

(246) $$\psi_j(x) = \begin{pmatrix} \psi_1(x) \\ \psi_2(x) \\ \psi_3(x) \end{pmatrix}$$

SU(3)のゲージ変換は

(247) $$\psi_j(x) \to \psi_j'(x) = \left[e^{igT^a\theta^a(x)}\right]_{jk} \psi_k(x) \equiv U(x)_{jk} \psi_k(x)$$

の様に、3×3の Unitary で determinant が 1 の行列 $U(x)_{jk}$ で表わされます。

(248) $$\begin{cases} U(x)^\dagger U(x) = 1 & \cdots \text{unitary な 3×3 行列} \\ \det U(x) = 1 & \cdots \text{special (?) と呼んで、SU(3)と書きます.} \end{cases}$$

SU(3)群の要素 $U(x)$ は、Hermite で traceless な 8ケの generator で生成されます。

(249) $$\begin{cases} (T^a)^\dagger = T^a & \Leftarrow U^\dagger U = e^{-ig(T^a)^\dagger\theta^a(x)} e^{igT^a\theta^a(x)} = 1 \\ \mathrm{tr}(T^a) = 0 & \Leftarrow \det U = e^{ig\,\mathrm{tr}(T^a)\theta^a(x)} = e^0 = 1 \end{cases}$$

(249)を満たすcomplexな3×3行列は $3\times3\times2-3\times3-1=8$ ヶあり、次の様に選ぶことができます。

(250) $T^1=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}0&1&0\\1&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$, $T^2=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}0&-i&0\\i&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$, $T^3=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}1&0&0\\0&-1&0\\0&0&0\end{pmatrix}$,

$T^4=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&1\\0&1&0\end{pmatrix}$, $T^5=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&-i\\0&i&0\end{pmatrix}$,

$T^6=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}0&0&1\\0&0&0\\1&0&0\end{pmatrix}$, $T^7=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}0&0&i\\0&0&0\\-i&0&0\end{pmatrix}$, $T^8=\frac{1}{2\sqrt{3}}\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&-2\end{pmatrix}$.

ここで、T^1, T^2, T^3 の2×2成分はSU(2)のgenerator $\frac{\sigma^1}{2}, \frac{\sigma^2}{2}, \frac{\sigma^3}{2}$ で、T^4, T^5 は $(j,k)=(2,3)$ 成分が $\frac{\sigma^1}{2}, \frac{\sigma^2}{2}$、$T^6$ と T^7 は $(j,k)=(3,1)$ 成分、T^8 は残りのdiagonalなtraceless matrixです。規格化は

(251) $$\mathrm{tr}(T^aT^b)=T_F\,\delta^{ab}\quad;\quad T_F=\frac{1}{2}$$

です。diagonalなgeneratorの数（「中性」カレントの数）をランクといい、SU(3)は T^3 と T^8 だけがdiagonalなので、rank = 2 です。変換U(x)が群を作る、

(252) $$U_1(x)\cdot U_2(x)=U_3(x)\qquad \text{が矢張りSU(3)変換である。}$$

ことは、generatorの交換関係（又は反交換関係）が閉じることと等価で

(253) $$[T^a, T^b]=i f^{abc}T^c$$

をSU(3)代数(algebra)と呼びます。$e^Ae^B=e^{A+B+\frac{1}{2}[A,B]+\cdots}$ だからです。

$\mathcal{L}_{QCD}$ (244) がゲージ変換 (247) で不変であるためには、共変微分が

$$(254)\quad D_\mu \to D_\mu' = U(x) D_\mu U(x)^\dagger$$

と変換する必要があります。8つのゲージ場(グルオン)を導入して

$$(255)\quad D_\mu = \partial_\mu + igT^a A^a_\mu(x)$$

$$\to \partial_\mu + igT^a A^a_\mu(x)'$$

$$= U(x) D_\mu U^\dagger(x)$$

$$= U(x)(\partial_\mu + igT^a A^a_\mu(x)) U^\dagger(x)$$

$$= U(x)(\partial_\mu U^\dagger(x)) + \underbrace{U(x)U^\dagger(x)}_{=1}\partial_\mu$$

$$+ igA^a_\mu U(x)[T^a, U^\dagger(x)] + igA^a_\mu \underbrace{U(x)U^\dagger(x)}_{=1} T^a$$

$$= \partial_\mu + igT^a A^a_\mu + U(x)\left[(\partial_\mu U^\dagger(x)) + igA^a_\mu [T^a, U^\dagger(x)]\right]$$

ここで

$$(256)\quad \partial_\mu U^\dagger(x) = \partial_\mu e^{-igT^a\theta^a(x)} = \partial_\mu\left[1 - igT^a\theta^a(x) + \cdots\right] = -igT^a\partial_\mu\theta^a(x) + \cdots$$

$$[T^a, U^\dagger(x)] = [T^a, 1 - igT^b\theta^b(x) + \cdots] = -ig[T^a, T^b]\theta^b(x) + \cdots$$

$$= gf^{abc}\theta^b(x)T^c + \cdots$$

代入すると

$$(257)\quad A^a_\mu(x) \to A^a_\mu(x)' = A^a_\mu(x) - \partial_\mu\theta^a(x) + gf^{cba}\theta^b(x)A^c_\mu(x)$$

$$= A^a_\mu(x) - \partial_\mu\theta^a(x) - gf^{abc}\theta^b(x)A^c_\mu(x)$$

グルオンの kinetic part は上の変換で不変でなければならない。

共変微分を使うと、簡単にゲージ不変なグルオンのkinetic partが求まります。

(258) $[D_\mu, D_\nu] \to [D'_\mu, D'_\nu] = U(x)[D_\mu, D_\nu]U^\dagger(x)$

なので

(259) $tr\{[D_\mu, D_\nu][D^\mu, D^\nu]\} \to tr\{U(x)[D_\mu, D_\nu][D^\mu, D^\nu]U^\dagger(x)\}$

$$= tr\{[D_\mu, D_\nu][D^\mu, D^\nu]\}$$

がゲージ不変、且つLorentz不変であることに注目します。

(260)
$$\begin{aligned}
[D_\mu, D_\nu] &= [\partial_\mu + igT^b A^b_\mu, \partial_\nu + igT^c A^c_\nu] \\
&= igT^c(\partial_\mu A^c_\nu - \partial_\nu A^c_\mu) - g^2[T^b, T^c]A^b_\mu A^c_\nu \\
&= igT^a(\partial_\mu A^a_\nu - \partial_\nu A^a_\mu) - ig^2 f^{abc} T^a A^b_\mu A^c_\nu \\
&= igT^a[\underline{\partial_\mu A^a_\nu - \partial_\nu A^a_\mu - gf^{abc}A^b_\mu A^c_\nu}] \\
&\equiv igT^a F^a_{\mu\nu}
\end{aligned}$$

(261)
$$\begin{aligned}
tr\{[D_\mu, D_\nu][D^\mu, D^\nu]\} &= tr\{[igT^a F^a_{\mu\nu}][igT^b F^{b\mu\nu}]\} \\
&= -g^2 tr(T^a T^b) F^a_{\mu\nu} F^{b\mu\nu} \\
&= -g^2 \frac{\delta^{ab}}{2} F^a_{\mu\nu} F^{b\mu\nu} \\
&= -\frac{g^2}{2} F^a_{\mu\nu} F^{a\mu\nu}
\end{aligned}$$

従って"free part"が正しく規格化されたkinetic partは

(262) $\mathcal{L}_{gluon} = \frac{1}{2g^2} tr\{[D_\mu, D_\nu][D^\mu, D^\nu]\} = -\frac{1}{4} F^a_{\mu\nu} F^{a\mu\nu}$ ///

QCD for Collider Physics V

2005. 5. 18

まずは前回の反省から。

p.71 で自由Dirac場のHamiltonian (171) が場の量子論の前提（最低エネルギー状態を「真空」としたときに、正エネルギーの粒子、反粒子が場の演算子によって生成される）を満たす(172)式になるためには、反交換関係 (170) を量子化条件として課する必要があることを見ました。そのときに、ゼロ点振動項が負になることを指摘しましたが、ボソン場の例をこのノートに載せていませんでした。

ここで、粒子と反粒子が異る複素スカラー場のHamiltonianをもとめ、交換関係によって場の量子化ができること、ゼロ点振動項の符号が正になることを見ます。

Lagrangianは（密度を$\mathcal{L}$, $\mathcal{H}$と表わし、空間積分したものをL, Hとします）:

$$(263)\quad \mathcal{L} = (\partial_\mu \phi^*)(\partial^\mu \phi) - m^2 \phi^* \phi$$

これは実スカラー場 ϕ_1 と ϕ_2 $(\phi=(\phi_1+i\phi_2)/\sqrt{2},\ \phi^*=(\phi_1-i\phi_2)/\sqrt{2})$ の Lagrangian

$$(264)\quad \mathcal{L} = \frac{1}{2}\left[(\partial_\mu \phi_1)^2 + (\partial_\mu \phi_2)^2 - m^2(\phi_1^2+\phi_2^2)\right]$$

と等可です。ϕ, ϕ^* を独立な場として Hamiltonian (26) をもとめると、

$$
\begin{aligned}
(265)\quad \mathcal{H} &= \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \partial^0 \phi}\partial^0\phi + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \partial^0 \phi^*}\partial^0\phi^* - \mathcal{L} \\
&= (\partial_0 \phi^*)(\partial^0 \phi) + (\partial_0 \phi)(\partial^0 \phi^*) - \mathcal{L} \\
&= 2(\partial_0 \phi^*)(\partial_0 \phi) - \left[(\partial_0 \phi^*)(\partial_0 \phi) - (\partial_i \phi^*)(\partial_i \phi) - m^2 \phi^* \phi\right] \\
&= (\partial_0 \phi^*)(\partial_0 \phi) + (\partial_i \phi^*)(\partial_i \phi) + m^2 \phi^* \phi
\end{aligned}
$$

ここで、3行目で微分の添え字を下つきりそろえて、$(\frac{\partial}{\partial t}, \nabla)$ にしました。部分積分をすると、

(266) $$\mathcal{H} = \underbrace{\partial_0(\phi^*\partial_0\phi) + \partial_i(\phi^*\partial_i\phi)}_{\to 0} - \phi^*\partial_0\partial_0\phi - \phi^*\partial_i\partial_i\phi + m^2\phi^*\phi$$
$$= \phi^*(-\partial_0\partial_0 - \partial_i\partial_i + m^2)\phi$$
$$= \phi^*\left[\left(i\frac{\partial}{\partial t}\right)^2 + (-i\nabla)^2 + m^2\right]\phi$$

この最後の式は Hamiltonian らしく見えると思います。[ちなみに、この式は、場のエネルギーが、時間振動，空間振動，質量の和の様に読めます。Dirac場のエネルギーの表示 (165) では時間振動の項が顕わでありませんね。] 量子化された場の表式 (52) を用いて H を計算します。

(267) $$H = \int \mathcal{H}\, d^3x$$
$$= \int d^3x \left\{ \phi^*(x)\left[-\left(\frac{\partial}{\partial t}\right)^2 - \left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right)^2 + m^2\right] \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3 2E}\left[a_{\mathbf{k}} e^{-ikx} + b_{\mathbf{k}}^\dagger e^{ikx}\right]_{k^0=E} \right\}$$
$$= \int d^3x \int \frac{d^3k'}{(2\pi)^3 2E'}\left[a_{\mathbf{k}'}^\dagger e^{ik'x} + b_{\mathbf{k}'} e^{-ik'x}\right]_{k^{0\prime}=E'} \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3 2E}\underbrace{(E^2+\mathbf{k}^2+m^2)}_{=2E^2}\left[a_{\mathbf{k}} e^{-ikx} + b_{\mathbf{k}}^\dagger e^{ikx}\right]_{k^0=E}$$
$$= \int d^3x \int \frac{d^3k'}{(2\pi)^3 2E'} \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3 2E}\, 2E^2 \left[a_{\mathbf{k}'}^\dagger a_{\mathbf{k}} e^{+i(k'-k)x} + b_{\mathbf{k}'} b_{\mathbf{k}}^\dagger e^{i(k-k')x} + a_{\mathbf{k}'}^\dagger b_{\mathbf{k}}^\dagger e^{i(k'+k)x} + b_{\mathbf{k}'} a_{\mathbf{k}} e^{-i(k+k')x}\right]_{k^0=E,\, k'^0=E'}$$
$$= \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3 2E} \int \frac{d^3k'}{(2\pi)^3 2E'}\, 2E^2 \left\{ (a_{\mathbf{k}'}^\dagger a_{\mathbf{k}} + b_{\mathbf{k}'} b_{\mathbf{k}}^\dagger)(2\pi)^3\delta^3(\mathbf{k}-\mathbf{k}') \right.$$
$$\left. + (a_{\mathbf{k}'}^\dagger b_{\mathbf{k}}^\dagger e^{i(E+E')t} + b_{\mathbf{k}'} a_{\mathbf{k}} e^{-i(E+E')t})(2\pi)^3\delta^3(\mathbf{k}+\mathbf{k}') \right\}$$
$$= \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3}\frac{1}{2}\left\{ a_{\mathbf{k}}^\dagger a_{\mathbf{k}} + b_{\mathbf{k}} b_{\mathbf{k}}^\dagger + a_{-\mathbf{k}}^\dagger b_{\mathbf{k}}^\dagger e^{2iEt} + b_{-\mathbf{k}} a_{\mathbf{k}} e^{-2iEt} \right\}$$

後の2項は顕わな時間依存性をもつので消えるはずですが、一般に

(268) $$\int_{-\infty}^{\infty} dx\, f(x)g(-x) = \int_{-\infty}^{\infty} dx\, \frac{1}{2}\left[f(x)g(-x) + f(-x)g(x)\right] = 0$$

でゼロになります (x を $\mathbf{k}$ と読みかえて下さい)。f と g を交換できなくてもOKです。

Dirac粒子のHamiltonianの計算中、p.70の(168)式で、時間依存項の係数がゼロであることを示しましたが、これは全くの徒労だったわけです。こちらを先にやれば気がついたはずでした。ごめんなさい。さて結果は

(269) $$H = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{1}{2} \left[a^\dagger_k a_k + b_k b^\dagger_k \right]$$

となり、これがDirac粒子に対する表式(169)に対応します。通常のHの見かけにするためには、生成消滅演算子の規格化をもとにもどして

(270) $$\begin{cases} a_k = \sqrt{2E}\,\hat{a}_k \quad , \quad b_k = \sqrt{2E}\,\hat{b}_k \\ [\hat{a}_k, \hat{a}^\dagger_{k'}] = [\hat{b}_k, \hat{b}^\dagger_{k'}] = (2\pi)^3 \delta^3(k-k') \end{cases}$$

(271) $$H = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} E_k \left\{ \hat{a}^\dagger_k \hat{a}_k + \hat{b}^\dagger_k \hat{b}_k + \underbrace{(2\pi)^3 \delta^3(0)}_{+\infty} \right\}$$

となります。スカラーボソンの量子化は交換関係で良いこと、ゼロ点振動項が正の∞であることを記憶しておいて下さい。正確な議論はこの∞項を正則化(有限化)しておかないとできませんが、上のボソンのゼロ点振動項と、p.71(172)のフェルミオン場のゼロ点振動項が次の場合に相殺します。

(272) $\begin{cases} \text{ボソンとフェルミオンの質量が等しい。} \\ \text{(172)式のフェルミオンのヘリシティー}(\lambda)\text{一つに対し、複素スカラー場一つが対応する。} \end{cases}$

これは超対称性の帰結ですが、(172)式(271)式相方で $\int d^3k\, E_k\, \delta^3(0)$ があたかも有限量であるかの様に取り扱って良いことを示すので覚えやすいですね。

2005. 5. 18

超対称な標準模型では、この相殺は

(273) $\begin{cases} \text{質量ゼロでカイラリティーが定まったフェルミ粒子（とその反粒子）} \\ \text{質量ゼロでスピン以外の量子数が全て同じ複素スカラー粒子（とその反粒子）} \end{cases}$

の間で成立します。p.64 (139) で学んだように、質量ゼロで粒子のヘリシティーはカイラリティーと一致しますから、フェルミオンの Hamiltonian (172) でヘリシティーの和 $\sum_\lambda$ が存在しないわけです。反粒子のヘリシティーはカイラリティーと逆符号 (152) ですから、たとえばカイラリティーが左巻き(L)のフェルミオンの Hamiltonian は

(274) $$H = \int \frac{d^3\mathbb{k}}{(2\pi)^3} |\mathbb{k}| \left\{ \hat{a}^{+}_{\mathbb{k},L} \hat{a}_{\mathbb{k},L} + \hat{b}^{+}_{\mathbb{k},R} \hat{b}_{\mathbb{k},R} - (2\pi)^3 \delta^3(0) \right\}$$

となって複素スカラー場の Hamiltonian (271) ($E_{\mathbb{k}} = |\mathbb{k}|$) とつり合うわけです。

超対称な標準模型に言及したので、もう一組のゼロ点エネルギーの相殺もここで説明します。この相殺は

(275) $\begin{cases} \text{質量ゼロで粒子と反粒子の区別がないフェルミ粒子（ゲージーノ）} \\ \text{質量ゼロで粒子と反粒子の区別がないベクトル粒子（ゲージボソン）} \end{cases}$

粒子と反粒子の区別がないと

(276) $$a_{\mathbb{k},\lambda} = b_{\mathbb{k},\lambda} \quad , \quad a^{+}_{\mathbb{k},\lambda} = b^{+}_{\mathbb{k},\lambda}$$

となるわけですが、フェルミオンの Hamiltonian (274) は次の様になります。

$$(277)\quad H_{ゲージノ} = \int \frac{d^3 \mathbb{k}}{(2\pi)^3} |\mathbb{k}| \left\{ \hat{a}^{\dagger}_{\mathbb{k},L} a_{\mathbb{k},L} + a^{\dagger}_{\mathbb{k},R} a_{\mathbb{k},R} - (2\pi)^3 \delta^3(0) \right\}$$

つまり、粒子のエネルギーと反粒子のエネルギーの和(274)ではなくて、ヘリシティー左巻きの粒子のエネルギーと右巻き粒子のエネルギーの和になるわけです。(274)と(277)を較べれば、この2種類の質量ゼロフェルミオンには本質的な違いがないことがわかります。粒子と反粒子の区別は「内部」対称性の保存電荷によるわけですから、ローレンツ変換で変換される「スピノール」としては全く同じものです。実際、「内部」対称性が自発的に破れる標準模型ではこの区別が全く無くなってしまうことが起ります。MSSM(最小超対称性標準模型)では、左巻きの中性ヒッグスフェルミオン(中性ヒグシーノ)が2個、弱アイソスピンが$+\frac{1}{2}$のもの($\tilde{H}^0_d$)と$-\frac{1}{2}$のもの($\tilde{H}^0_u$)があります。それぞれ、弱アイソスピンが逆の反粒子をもつ「カイラル」フェルミオンなのですが、$SU(2)_L \times U(1)_Y \to U(1)_{EM}$、の対称性の破れが起きると、弱アイソスピンの値による粒子・反粒子の区別は絶対ではなくなります。「絶対」を維持する荷電は電荷(Q)だけなので、電荷ゼロの中性ヒッグシーノの粒子と反粒子の区別は便宜的なものになってしまいます。こうして、本来粒子と反粒子の区別がある(カイラルな)2個の中性ヒッグシーノと、本来その区別が無い(実の)ゲージノ($\tilde{W}^3$と$\tilde{B}$)が混合して、4個のニュートラリーノになるわけです。粒子と反粒子の区別の無いフェルミオンのことをマヨラナフェルミオンと呼びます。質量がゼロの場合、カイラルフェルミオンとマヨラナフェルミオンの区別は内部対称性の

電荷の値がゼロでない（カイラル）か、ゼロである（マヨラナ）かの区別だけで、スピノールとしては全く同じであることを説明しました。電弱対称性が自発的に破れてフェルミオンが質量を持つときに、その質量項が（粒子数－反粒子数）を保存するときはDirac質量、そうでないときはMajorana質量と呼び、それぞれ有限質量のDiracフェルミオン、Majoranaフェルミオンと呼びます。「絶対」の電荷 ~~＝＝＝~~ Q≠0のフェルミオンはQ保存によりDirac質量しかもつことができません。Q=0のフェルミオンはどちらの可能性も、混合することも、可能です。Q=0のフェルミオンがDirac質量を持つためには必ず ~~2組~~ 2個の質量ゼロフェルミオンの組みが必要です。1つめのフェルミオンのL成分を「粒子」、2つめのフェルミオンのR成分を「反粒子」、と名づけ、その上で「粒子数」が保存するように質量項を導入します。一方、2組あれば、同時に、粒子数を保存しないMajorana質量を許すことも可能です。シーソー機構はこの様な混合質量項の例と考えて良いですが、重いMajorana質量項の極限で、質量固有状態はほぼ純粋なMajorana粒子となります。さて、長々とマヨラナ（実）フェルミオンの説明をしましたが、MSSMで(277)の負のゼロ点エネルギーを相殺するのはゲージボソンの効果です。

$$H_{\text{ゲージボソン}} = \int \frac{d^3 \mathbb{k}}{(2\pi)^3} |\mathbb{k}| \left\{ \sum_{\lambda=\pm 1} a^{\dagger}_{\mathbb{k},\lambda} a_{\mathbb{k},\lambda} + (2\pi)^3 \delta^3(0) \right\} \tag{278}$$

λ=+1のゲージボソンを右巻き、λ=−1を左巻きと呼べば(277)式との対応はより明らかですね。 // ここでちょっと長めの脱線を終わります。

2005. 5. 19

さて、真面目な振幅の計算を始めましょう。QCD Lagrangian (244), (255), (260), (262) をもう1度整理します。

(279a) $$\mathcal{L}_{QCD} = \bar{\psi}_i (i \not{D}_{ij} - m\delta_{ij}) \psi_j - \frac{1}{4} F^a_{\mu\nu} F^{a\mu\nu} + \text{gauge fix. terms}$$
$$= \mathcal{L}^0_{QCD} + \mathcal{L}^I_{QCD}$$

(279b) $$\mathcal{L}^0_{QCD} = \bar{\psi}_i (i\not{\partial} - m)\delta_{ij}\psi_j - \frac{1}{4}\sum_{a=1}^{8}(\partial_\mu A^a_\nu - \partial_\nu A^a_\mu)(\partial^\mu A^{a\nu} - \partial^\nu A^{a\mu}) + \text{g.f.t.}$$

(279c) $$\mathcal{L}^I_{QCD} = -g\sum_{a=1}^{8}(\bar{\psi}_i T^a_{ij}\gamma^\mu \psi_j)A^a_\mu$$
$$-\frac{g}{2}\sum_{a,b,c} f^{abc}(\partial^\mu A^{a\nu} - \partial^\nu A^{a\mu})A^b_\mu A^c_\nu$$
$$-\frac{g^2}{4}\sum_{a,b,c,d,e} f^{abc} f^{ade} A^b_\mu A^c_\nu A^{d\mu} A^{e\nu}$$
$$+ \text{ghost term}$$

ここで、とりあえず、gauge fixing terms (ghost terms) はスキップさせて下さい。これらの導出だけのために新しい場の量子化法（経路積分法）を説明するべきか、考え中です。

まず自由場の部分 (279b) からプロパゲータが求まります。クォークのプロパゲータは

(280) $$S_F(x-y)_{ij,\alpha\beta} \equiv \langle 0 | T\, \psi_{i,\alpha}(x)\bar{\psi}_{j,\beta}(y) | 0 \rangle$$
$$= \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4}\frac{i\delta_{ij}}{k^2 - m^2 + i\varepsilon}(\not{k} + m)_{\alpha\beta}$$

$$i \xleftarrow[\;]{\leftarrow k} j$$

ここで $i,j = 1,2,3$ は SU(3) の足、$\alpha,\beta = 1,2,3,4$ はスピノールの足です。[(206)式の i,j はここでは α,β です。(206)式の最後の行で $i\,(=\sqrt{-1})$ が抜けていました。]

グルオンのプロパゲータは 光のプロパゲータ (57)式と同様、[(57)式で $m^2=0$ と置いて下さいね。]

2005. 5. 19

(281) $$D_F(x-y)^{ab}_{\mu\nu} \equiv \langle 0 | T A^a_\mu(x) A^b_\nu(y) | 0 \rangle$$

a, μ ~~~~~~~~ b, ν
$\leftarrow k$

$$= \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{i\delta^{ab}}{k^2+i\varepsilon} \sum_{\lambda=\pm1} \varepsilon_\mu(k,\lambda)\varepsilon^*_\nu(k,\lambda)$$

$$= \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{i\delta^{ab}}{k^2+i\varepsilon} \left(-g_{\mu\nu} + \text{gauge fix terms}\right)$$

質量ゼロのベクトルボソンの偏極ベクトル和は光子の場合と全く同じです。(280)と(281)は、カラー自由度の項、δ_{ij} と δ^{ab} を除けば電子のプロパゲータ(206)、光のプロパゲータ(57)と全く同じです。相互作用項が3項ある、(279c)、のが全然な違いになります。

Feynman 則をためてみましょう。

(282) $$\langle 0 | i\mathcal{L}^I_{QCD} | q_j(k_1,\lambda_1)\bar{q}_i(k_2,\lambda_2) g^a(k_3,\lambda_3) \rangle$$

$$= \langle 0 | i\mathcal{L}^I_{QCD}(x)\ a^\dagger_{j,k_1,\lambda_1}\ b^\dagger_{i,k_2,\lambda_2}\ a^\dagger_{a,k_3,\lambda_3} | 0 \rangle$$

から、4運動量保存項、$(2\pi)^4\delta^4(k_1+k_2+k_3)$、と外線の波動関数を除いた部分：

(283) $$\langle 0 | i\mathcal{L}^I_{QCD}(x) | q_j(k_1,\lambda_1)\bar{q}_i(k_2,\lambda_2) g^a(k_3,\lambda_3) \rangle = \bar{v}(k_2\lambda_2)$$

$$= (\Gamma^{a\mu}_{ij})_{\alpha\beta}\ u(k_1,\lambda_1)_\beta\ \bar{v}(k_2,\lambda_2)_\alpha\ \varepsilon_\mu(k_3,\lambda_3)\ (2\pi)^4\delta^4(k_1+k_2+k_3)$$

$$= \bar{v}(k_2,\lambda_2)\ \Gamma^{a\mu}_{ij}\ u(k_1,\lambda_1)\ \varepsilon_\mu(k_3,\lambda_3)\ (2\pi)^4\delta^4(k_1+k_2+k_3)$$

上式で $(\Gamma^{a\mu}_{ij})_{\alpha\beta}$、その行列表示 $\Gamma^{a\mu}_{ij}$、を Feynman 則と呼びます。Feynman 則は外線粒子が in state $|\ \rangle$ にあるか out state $\langle\ |$ にあるかに依存しませんが、私は常に全ての外線粒子を in state $|\ \rangle$ に置いて計算します。e^{-ikx} 項が選ばれるわけです。

ここで、クォーク場とグルオン場の自由場展開を書いておきましょう。

(284) $$\psi_j(x) = \int \frac{d^3\mathbb{k}}{(2\pi)^3 2E} \sum_\lambda \left\{ a_{j,\mathbb{k},\lambda}\, u(k,\lambda) e^{-ikx} + b^\dagger_{j,\mathbb{k},\lambda}\, v(k,\lambda) e^{ikx} \right\}$$

$$\overline{\psi}_j(x) = \int \frac{d^3\mathbb{k}}{(2\pi)^3 2E} \sum_\lambda \left\{ a^\dagger_{j,\mathbb{k},\lambda}\, \overline{u}(k,\lambda) e^{ikx} + b_{j,\mathbb{k},\lambda}\, \overline{v}(k,\lambda) e^{-ikx} \right\}$$

(285) $$A^a_\mu(x) = \int \frac{d^3\mathbb{k}}{(2\pi)^3 2E} \sum_\lambda \left\{ a_{a,\mathbb{k},\lambda}\, \varepsilon_\mu(k,\lambda) e^{-ikx} + a^\dagger_{a,\mathbb{k},\lambda}\, \varepsilon_\nu(k,\lambda)^* e^{ikx} \right\}$$

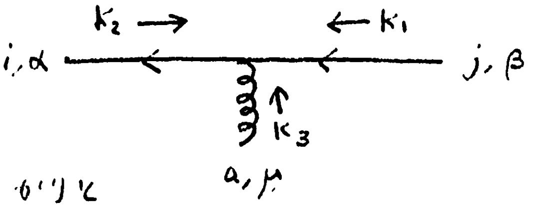
(284)と(285)を(283)に代入して(反)交換関係、

(286a) $$\{ a_{i,\mathbb{k},\lambda},\, a^\dagger_{j,\mathbb{k}',\lambda'} \} = \{ b_{i,\mathbb{k},\lambda},\, b^\dagger_{j,\mathbb{k}',\lambda'} \} = \delta_{ij} (2\pi)^3 2E\, \delta^3(\mathbb{k}-\mathbb{k}')$$

(286b) $$[a_{a,\mathbb{k},\lambda},\, a^\dagger_{b,\mathbb{k}',\lambda'}] = \delta_{ab} (2\pi)^3 2E\, \delta^3(\mathbb{k}-\mathbb{k}')$$

を用いると、Feynman則 $\Gamma^{a\mu}_{ij}$ が求まります。

(287) $$\left(\Gamma^{a\mu}_{ij}\right)_{\alpha\beta} = -ig\, T^a_{ij} (\gamma^\mu)_{\alpha\beta}$$



と求まりましたか？右図との対応をしっかりと納得して下さい。αとβの順序、iとjの順序とクォーク数の流れ(矢印の向き)との関係が重要です。($(T^a)^T \neq T^a$, $(\gamma^\mu)^T \neq \gamma^\mu$ を思い出して下さい)。矢印の向きと逆向きに式を書くと、カラー(3×3)とスピノール(4×4)共に、行列演算のルールになる、と覚えるのが良いと思います。さて、3グルオン、4グルオン結合も同様に求めてみましょう。QEDに無い項なので、少しだけていねいにやってみます。

定義はそれぞれ

(288) $\langle 0 | i\mathcal{L}^{I}_{QCD}(x) | g^{a}(k_1,\lambda_1)\, g^{b}(k_2,\lambda_2)\, g^{c}(k_3,\lambda_3) \rangle$

$$= \langle 0 | i\mathcal{L}^{I}_{QCD}(x)\; a^{\dagger}_{a,k_1,\lambda_1}\; a^{\dagger}_{b,k_2,\lambda_2}\; a^{\dagger}_{c,k_3,\lambda_3}\; |0\rangle$$

$$\equiv \Gamma^{abc}_{\mu\nu\rho}\; \varepsilon^{\mu}(k_1,\lambda_1)\, \varepsilon^{\nu}(k_2,\lambda_2)\, \varepsilon^{\rho}(k_3,\lambda_3)\; (2\pi)^4 \delta^4(k_1+k_2+k_3)$$

(289) $\langle 0 | i\mathcal{L}^{I}_{QCD}(x) | g^{a}(k_1,\lambda_1)\, g^{b}(k_2,\lambda_2)\, g^{c}(k_3,\lambda_3)\, g^{d}(k_4,\lambda_4) \rangle$

$$= \langle 0 | i\mathcal{L}^{I}_{QCD}(x)\; a^{\dagger}_{a,k_1,\lambda_1}\; a^{\dagger}_{b,k_2,\lambda_2}\; a^{\dagger}_{c,k_3,\lambda_3}\; a^{\dagger}_{d,k_4,\lambda_4}\; |0\rangle$$

$$\equiv \Gamma^{abcd}_{\mu\nu\rho\sigma}\; \varepsilon^{\mu}(k_1,\lambda_1)\, \varepsilon^{\nu}(k_2,\lambda_2)\, \varepsilon^{\rho}(k_3,\lambda_3)\, \varepsilon^{\sigma}(k_4,\lambda_4)\, (2\pi)^4 \delta^4(k_1+k_2+k_3+k_4)$$

となります。(279c)式の2行目が寄与しますが、repeated index が区別できるように

(290) $$\mathcal{L}^{I}_{QCD} = -\frac{g}{2} \sum_{a',b',c'} f^{a'b'c'} (\partial^{\alpha} A^{a'\beta} - \partial^{\beta} A^{a'\alpha}) A^{b'}_{\alpha} A^{c'}_{\beta}$$

$(a',b',c'=1,2,3\ ;\ \alpha,\beta=0,1,2,3)$ としておいてから (288) を評価しましょう。

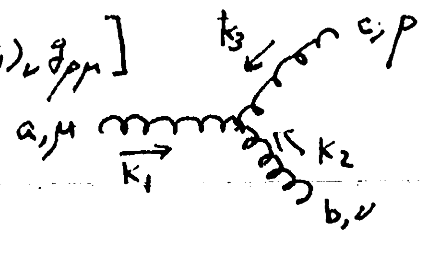
(291) $$\Gamma^{abc}_{\mu\nu\rho} = -i\frac{g}{2} f^{a'b'c'} \Big\{ \delta^{aa'}\delta^{bb'}\delta^{cc'} [(-ik_1^{\alpha}) g_{\mu}{}^{\beta} - (-ik_1^{\beta}) g_{\mu}{}^{\alpha}] g_{\alpha\nu} g_{\beta\rho}$$
$$+ \delta^{aa'}\delta^{bc'}\delta^{cb'} [(-ik_1^{\alpha}) g_{\mu}{}^{\beta} - (-ik_1^{\beta}) g_{\mu}{}^{\alpha}] g_{\alpha\rho} g_{\beta\nu}$$
$$+ \left[\begin{pmatrix} a & b & c \\ \mu & \nu & \rho \\ k_1 & k_2 & k_3 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} b & c & a \\ \nu & \rho & \mu \\ k_2 & k_3 & k_1 \end{pmatrix} \right] + \left[\begin{pmatrix} b & c & a \\ \nu & \rho & \mu \\ k_2 & k_3 & k_1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} c & a & b \\ \rho & \mu & \nu \\ k_3 & k_1 & k_2 \end{pmatrix} \right] \Big\}$$

$$= -\frac{g}{2} \left\{ f^{abc} (k_{1\nu} g_{\mu\rho} - k_{1\rho} g_{\mu\nu}) + f^{acb} (k_{1\rho} g_{\mu\nu} - k_{1\nu} g_{\mu\rho}) + \text{cyclic} \right\}$$

$$= g \left\{ f^{abc} (k_{1\rho} g_{\mu\nu} - k_{1\nu} g_{\rho\mu}) + \text{cyclic} \right\}$$

$$= g \left\{ f^{abc} (k_{1\rho} g_{\mu\nu} - k_{1\nu} g_{\rho\mu}) + f^{bca} (k_{2\mu} g_{\nu\rho} - k_{2\rho} g_{\mu\nu}) + f^{cab} (k_{3\nu} g_{\rho\mu} - k_{3\mu} g_{\nu\rho}) \right\}$$

$$= g f^{abc} \left[(k_1 - k_2)_{\rho} g_{\mu\nu} + (k_2 - k_3)_{\mu} g_{\nu\rho} + (k_3 - k_1)_{\nu} g_{\rho\mu} \right]$$



最後に4点結合ですが、(290)同様 repeated index を label替えして

$$(292)\quad \mathcal{L}^{I}_{QCD} = -\frac{g^2}{4}\sum_{a',b',c',d',e} f^{a'b'e} f^{c'd'e} A^{a'}_{\alpha} A^{b'}_{\beta} A^{c'\alpha} A^{d'\beta}$$

としておいてから(289)を計算します。(289)もちょっと工夫して

$$(293)\quad \langle 0|\, i\mathcal{L}^{I}_{QCD}(x)\; a^{\dagger}_{a_1,k_1,\lambda_1}\, a^{\dagger}_{a_2,k_2,\lambda_2}\, a^{\dagger}_{a_3,k_3,\lambda_3}\, a^{\dagger}_{a_4,k_4,\lambda_4}\, |0\rangle$$

$$\equiv \Gamma^{a_1a_2a_3a_4}_{\mu_1\mu_2\mu_3\mu_4}\, \varepsilon^{\mu_1}(k_1,\lambda_1)\, \varepsilon^{\mu_2}(k_2,\lambda_2)\, \varepsilon^{\mu_3}(k_3,\lambda_3)\, \varepsilon^{\mu_4}(k_4,\lambda_4)\, (2\pi)^4 \delta^4(k_1+k_2+k_3+k_4)$$

としておきます。そうすると(1,2,3,4)でラベル替えできるからです。

$$(294)\quad \Gamma^{a_1a_2a_3a_4}_{\mu_1\mu_2\mu_3\mu_4} = -i\frac{g^2}{4} f^{a'b'e} f^{c'd'e}\left\{\delta^{a'a_1}\delta^{b'a_2}\delta^{c'a_3}\delta^{d'a_4}\, g_{\alpha\mu_1} g_{\beta\mu_2} g^{\alpha}{}_{\mu_3} g^{\beta}{}_{\mu_4} + (4!-1)\text{通り}\right\}$$

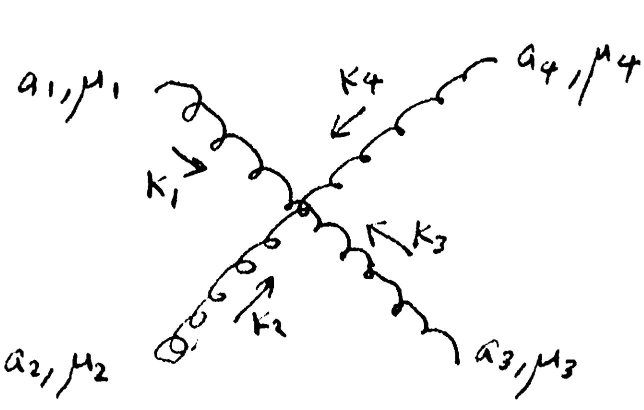
$$= -i\frac{g^2}{4}\left\{ f^{a_1a_2b} f^{a_3a_4b}\, g_{\mu_1\mu_3} g_{\mu_2\mu_4} \times \underbrace{4}_{(12)(34)+(34)(12)+(21)(43)+(43)(21)} + (3!-1)\text{通り}\right\}$$

← カラーの足
← ローレンツの足

$$= -ig^2\left\{ f^{a_1a_2b} f^{a_3a_4b}\left(g_{\mu_1\mu_3} g_{\mu_2\mu_4} - g_{\mu_1\mu_4} g_{\mu_2\mu_3}\right) + f^{a_1a_3b} f^{a_4a_2b}\left(g_{\mu_1\mu_4} g_{\mu_2\mu_3} - g_{\mu_1\mu_2} g_{\mu_3\mu_4}\right) + f^{a_1a_4b} f^{a_2a_3b}\left(g_{\mu_1\mu_2} g_{\mu_3\mu_4} - g_{\mu_1\mu_3} g_{\mu_2\mu_4}\right)\right\}$$

{(1 2)(3 4), (1 2)(4 3)}
{(1 3)(4 2), (1 3)(2 4)}
{(1 4)(2 3), (1 4)(3 2)}

$\boxed{a'=a_1,\ \alpha=\mu_1}$ 固定



上の式は $a'=a_1$, $\alpha=\mu_1$ を固定すると全く同じ項が4個あること、あとは残りの5通りです。//

ここまでの準備で，p.90 (224a)-(224e) の全 process の振幅が計算できます。

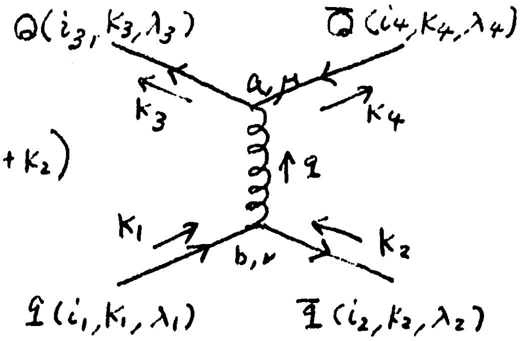
必要な Feynman 則は (280), (281), (287), (291), (294) です。まず

(295) $M^{\lambda_3\lambda_4\, i_3 i_4}_{\lambda_1\lambda_2\, i_1 i_2} \equiv M\left(q_{i_1}(k_1,\lambda_1) + \bar{q}_{i_2}(k_2,\lambda_2) \longrightarrow Q_{i_3}(k_3,\lambda_3) + \bar{Q}_{i_4}(k_4,\lambda_4) \right)$

(296) $iM = \bar{u}(k_3,\lambda_3)(-igT^a_{i_3 i_4})\gamma^\mu v(k_4,\lambda_4)$

$\times \dfrac{i}{q^2+i\varepsilon}(-g_{\mu\nu}+\cdots)\delta^{ab} \qquad (q=k_1+k_2)$

$\times \bar{v}(k_2,\lambda_2)(-igT^b_{i_2 i_1})\gamma^\nu u(k_1,\lambda_1)$



(297) $\begin{cases} M = g^2 T^a_{i_3 i_4} T^a_{i_2 i_1} \hat{M}^{\lambda_3\lambda_4}_{\lambda_1\lambda_2} \\ \hat{M}^{\lambda_3\lambda_4}_{\lambda_1\lambda_2} = \bar{u}(k_3,\lambda_3)\gamma^\mu v(k_4,\lambda_4)\cdot \bar{v}(k_2,\lambda_2)\gamma_\mu u(k_1,\lambda_1)\cdot \dfrac{1}{s} \end{cases} \qquad [s=q^2]$

ここで $\hat{M}$ は QEDの場合の振幅 (227) と完全に同じです。ちなみに，QEDの

γ-exchange 項を加えると，

(298) $M \equiv M^{\lambda_3\lambda_4\, i_3 i_4}_{\lambda_1\lambda_2\, i_1 i_2} = \left(g^2 T^a_{i_2 i_1} T^a_{i_3 i_4} + e^2 Q_q Q_Q \delta_{i_1 i_2}\delta_{i_3 i_4} \right) \hat{M}^{\lambda_3\lambda_4}_{\lambda_1\lambda_2}$

となります。$\sum_{a=1}^{8}$ は省略しています。断面積は，スピンとカラー相方の平均・和をとります。

(299) $d\sigma = \dfrac{1}{2s} \overline{\sum_{i_1 i_2 i_3 i_4}} \overline{\sum_{\lambda_1\lambda_2\lambda_3\lambda_4}} \left| M^{\lambda_3\lambda_4\, i_3 i_4}_{\lambda_1\lambda_2\, i_1 i_2} \right|^2 d\Phi_2$

$= C\, \dfrac{1}{2s} \overline{\sum_{\lambda_1\lambda_2\lambda_3\lambda_4}} \left| \hat{M}^{\lambda_3\lambda_4}_{\lambda_1\lambda_2} \right|^2 d\Phi_2$

$\equiv C\, d\hat{\sigma}$

とおくと，$d\hat{\sigma}$ は QED と全く同じ（但し $|e^2 Q_q Q_Q|^2$ が C の中に含まれる）。

$\hat{M}$，$d\hat{\sigma}$ は p.89, (241), (242), (243) から明らか。C をカラー因子と呼ぶ。(298) の場合

2005. 5. 19

(300) $$C = \sum_{i_1 i_2 i_3 i_4} \left| g^2 T^a_{i_2 i_1} T^a_{i_3 i_4} + e^2 Q_q Q_Q \delta_{i_1 i_2} \delta_{i_3 i_4} \right|^2$$

$$= \frac{1}{N} \cdot \frac{1}{N} \sum_{i_1 i_2 i_3 i_4} \left\{ g^4 T^a_{i_2 i_1} T^a_{i_3 i_4} T^b_{i_1 i_2} T^b_{i_4 i_3} \right. \qquad \leftarrow (T^a_{ij})^* = T^a_{ji}$$

$$+ g^2 e^2 Q_q Q_Q \, T^a_{i_2 i_1} T^a_{i_3 i_4} \delta_{i_1 i_2} \delta_{i_3 i_4} \times 2$$

$$\left. + e^4 Q_q^2 Q_Q^2 \, \delta_{i_1 i_2} \delta_{i_3 i_4} \delta_{i_1 i_2} \delta_{i_3 i_4} \right\}$$

ここで カラーの自由度の数は SU(N) のNを用い、あとで N=3 とおく。これにより、カラーフローで重要な $N \to \infty$ limit がとれることがメリットです。

(301) $$C = \frac{1}{N^2} \left\{ g^4 \underbrace{tr(T^a T^b)}_{T_F \delta^{ab}} \underbrace{tr(T^a T^b)}_{T_F \delta^{ab}} + 2 g^2 e^2 Q_q Q_Q \underbrace{tr(T^a)}_{\to 0} \underbrace{tr(T^b)}_{\to 0} + e^4 Q_q^2 Q_Q^2 \underbrace{\delta_{i_1 i_1}}_{\to N} \underbrace{\delta_{i_3 i_3}}_{\to N} \right\}$$

干渉項が消えるのは、グルオンがカラー $\underline{8}$，光がカラー $\underline{1}$ で直交しているためです。

(302) $$C = \frac{1}{N^2} \left\{ g^4 T_F \delta^{ab} T_F \delta^{ab} + e^4 Q_q^2 Q_Q^2 \, N \cdot N \right\}$$

$$= T_F^2 \frac{N^2 - 1}{N^2} g^4 + e^4 Q_q^2 Q_Q^2$$

$$= \frac{2}{9} g^4 + e^4 Q_q^2 Q_Q^2$$

上の例で、$N \to \infty$ のとき g^4 項は $T_F^2 g^4 = \frac{1}{4} g^4$ であり、Nと共に大きくならない項であることがわかります。ついでに、$q\bar{q} \to Q\bar{Q}$ で s-channel に γ, Z が交換されるときのカラー因子が 1 であることもわかりました。Zの寄与は結合が $\lambda_1, \lambda_3, \lambda_4$ に依存するので計算しません。干渉しないので、無視しても（Zの resonance 上以外）良いでしょう。(243)式を参考に、pure QCD の場合（(302)で $e^4 \to 0$）の断面積を書くと

2005. 5. 19

(303) $$\frac{d\sigma}{d\cos\theta} = \frac{2}{9}\cdot\frac{\pi\alpha_s^2}{2s}\left\{\left(1+\frac{4m^2}{s}\right)+\left(1-\frac{4m^2}{s}\right)\cos^2\theta\right\}\beta$$

(304) $$\alpha_s = \frac{g^2}{4\pi}$$

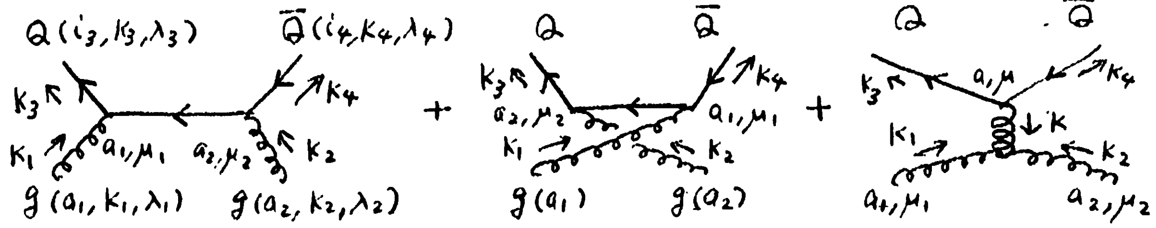
$m \to 0$ limit で

(305) $$\frac{d\sigma}{d\cos\theta} = \frac{2}{9}\cdot\frac{\pi\alpha_s^2}{2s}\left(1+\cos^2\theta\right)$$

次に $gg \to Q\bar{Q}$ を計算します.

(306) $$M^{\lambda_3\lambda_4 i_3 i_4}_{\lambda_1\lambda_2 a_1 a_2} \equiv M\left(g^{a_1}(k_1,\lambda_1)+g^{a_2}(k_2,\lambda_2) \to Q_{i_3}(k_3,\lambda_3)+\bar{Q}_{i_4}(k_4,\lambda_4)\right)$$

(307) $iM =$



$$= \bar{u}(k_3,\lambda_3)\Big\{(-igT^{a_1}_{i_3 i}\gamma^{\mu_1})\frac{i(\not{k}_3-\not{k}_1+m)}{(k_3-k_1)^2-m^2}(-igT^{a_2}_{i i_4}\gamma^{\mu_2})$$

$$+(-igT^{a_2}_{i_3 i}\gamma^{\mu_2})\frac{i(\not{k}_1-\not{k}_4+m)}{(k_1-k_4)^2-m^2}(-igT^{a_1}_{i i_4}\gamma^{\mu_1})$$

$$+(-igT^{a}_{i_3 i_4}\gamma^{\mu})\frac{-i}{k^2}(gf^{a_1a_2a})\left[(k_1-k_2)_\mu g_{\mu_1\mu_2}+(k_2-k)_{\mu_1}g_{\mu\mu_2}+(k-k_1)_{\mu_2}g_{\mu\mu_1}\right]\Big\}$$

$$\times v(k_4,\lambda_4)\,\varepsilon^{\mu_1}(k_1,\lambda_1)\,\varepsilon^{\mu_2}(k_2,\lambda_2)$$

(308) $$M = g^2\bar{u}(k_3,\lambda_3)\Big\{-(T^{a_1}T^{a_2})_{i_3i_4}\frac{\gamma^{\mu_1}(\not{k}_3-\not{k}_1+m)\gamma^{\mu_2}}{t-m^2}-(T^{a_2}T^{a_1})_{i_3i_4}\frac{\gamma^{\mu_2}(\not{k}_1-\not{k}_4+m)\gamma^{\mu_1}}{u-m^2}$$

$$+if^{a_1a_2a}T^a_{i_3i_4}\frac{\gamma^\mu}{s}\left[(k_1-k_2)_\mu g_{\mu_1\mu_2}+2k_{3\mu_1}g_{\mu\mu_2}-2k_{1\mu_2}g_{\mu\mu_1}\right]\Big\}$$

$$\times v(k_4,\lambda_4)\,\varepsilon^{\mu_1}(k_1,\lambda_1)\,\varepsilon^{\mu_2}(k_2,\lambda_2)$$

上で、運動方程式

$$(309)\quad k_{1\mu_1}\varepsilon^{\mu_1}(k_1,\lambda_1)=k_{2\mu_2}\varepsilon^{\mu_2}(k_2,\lambda_2)=0$$

を使いました。カラー因子を整理するため、

$$(310)\quad if^{a_1a_2a}T^a=[T^{a_1},T^{a_2}]$$

$$T^{a_1}T^{a_2}=\frac{1}{2}\left([T^{a_1},T^{a_2}]+\{T^{a_1},T^{a_2}\}\right)$$

$$T^{a_2}T^{a_1}=\frac{1}{2}\left(\{T^{a_1},T^{a_2}\}-[T^{a_1},T^{a_2}]\right)$$

を使うと

$$(311)\quad M=g^2\left\{\frac{1}{2}\{T^{a_1},T^{a_2}\}_{i_3i_4}\hat{M}^{\lambda_3\lambda_4}_{\lambda_1\lambda_2}+\frac{1}{2}[T^{a_1},T^{a_2}]_{i_3i_4}\hat{N}^{\lambda_3\lambda_4}_{\lambda_1\lambda_2}\right\}$$

$\hat{M}^{\lambda_3\lambda_4}_{\lambda_1\lambda_2}$ はQEDの $\gamma\gamma\to\mu^+\mu^-$ と同じ項、$\hat{N}^{\lambda_3\lambda_4}_{\lambda_1\lambda_2}$ がQCD固有項です。

2つのカラー因子は、a_1, a_2 について対称、反対称なので干渉しない。

$$(312)\quad \overline{\sum}|M|^2=g^4\left\{C_+\sum_{\lambda_i}|\hat{M}^{\lambda_3\lambda_4}_{\lambda_1\lambda_2}|^2+C_-\sum_{\lambda_i}|\hat{N}^{\lambda_3\lambda_4}_{\lambda_1\lambda_2}|^2\right\}$$

それぞれのカラー因子は

$$(313)\quad C_+=\frac{1}{(N^2-1)^2}\frac{1}{4}\sum\{T^{a_1},T^{a_2}\}_{i_3i_4}\{T^{a_2},T^{a_1}\}_{i_4i_3}$$

$$=\frac{1}{4(N^2-1)^2}\mathrm{Tr}\left[(T^{a_1}T^{a_2}+T^{a_2}T^{a_1})(T^{a_2}T^{a_1}+T^{a_1}T^{a_2})\right]$$

$$=\frac{1}{2(N^2-1)^2}\mathrm{Tr}\left[T^{a_1}T^{a_1}T^{a_2}T^{a_2}+T^{a_1}T^{a_2}T^{a_1}T^{a_2}\right]$$

このトレースの計算のため、SU(N)のgeneratorのFierz則を使います。

$$(314)\quad \sum_a T^a_{ij}T^a_{k\ell}=T_F\left(\delta_{i\ell}\delta_{kj}-\frac{1}{N}\delta_{ij}\delta_{k\ell}\right)$$

SU(2) なら、$T_F = 2$ で σ^i の Fierz 則です。一般の N の証明は、

(315) $\sum_a T^a_{ij} T^a_{k\ell} = A\,\delta_{i\ell}\delta_{kj} + B\,\delta_{ij}\delta_{k\ell}$

とおいて、両辺に $\delta_{ij}\delta_{k\ell}$ をかけて i,j,k,ℓ の和、$\delta_{i\ell}\delta_{kj}$ をかけて和。

(316a) $\times\,\delta_{ij}\delta_{k\ell} \Rightarrow \quad tr(T^a)\,tr(T^a) = 0 = AN + BN^2$

(316b) $\times\,\delta_{i\ell}\delta_{kj} \Rightarrow \quad tr(T^a T^a) = T_F(N^2-1) = AN^2 + BN$

(314) から、δ_{jk} をかけて j,k の和をとって

(317) $(T^a T^a)_{i\ell} = T_F \frac{N^2-1}{N}\,\delta_{i\ell} \equiv C_F\,\delta_{i\ell} \qquad \left(C_F = T_F \frac{N^2-1}{N} = \frac{4}{3} \right)$

(314) と (317) を使って (313) が計算できます。

(318)
$$
\begin{aligned}
C_+ &= \frac{1}{2(N^2-1)^2}\left\{ T^{a_1}_{ij} T^{a_1}_{jk} T^{a_2}_{k\ell} T^{a_2}_{\ell i} + T^{a_1}_{ij} T^{a_2}_{jk} T^{a_1}_{k\ell} T^{a_2}_{\ell i} \right\} \\
&= \frac{1}{2(N^2-1)^2}\left\{ C_F\,\delta_{ik}\,C_F\,\delta_{ki} + T_F^2\left(\delta_{i\ell}\delta_{kj} - \frac{1}{N}\delta_{ij}\delta_{k\ell}\right)\left(\delta_{ji}\delta_{\ell k} - \frac{1}{N}\delta_{jk}\delta_{\ell i}\right) \right\} \\
&= \frac{1}{2(N^2-1)^2}\left\{ C_F^2 N + T_F^2\left(N - \frac{1}{N} N\cdot N \times 2 + \frac{1}{N^2} N \right) \right\} \\
&= \frac{1}{2(N^2-1)^2}\left\{ T_F^2 \frac{(N^2-1)^2}{N} + T_F^2\left(-N + \frac{1}{N} \right) \right\} \\
&= \frac{T_F^2}{2N}\,\frac{N^2-2}{N^2-1} \\
&= \frac{7}{192}
\end{aligned}
$$

どこかで計算まちがいしたような気がします。C_- の方は

(319)
$$
\begin{aligned}
C_- &= \frac{1}{(N^2-1)^2}\,\frac{1}{4}\,\mathrm{Tr}\left[(T^{a_1}T^{a_2} - T^{a_2}T^{a_1})(T^{a_2}T^{a_1} - T^{a_1}T^{a_2}) \right] \\
&= \frac{1}{2(N^2-1)^2}\,\mathrm{Tr}\left[T^{a_1}T^{a_1}T^{a_2}T^{a_2} - T^{a_1}T^{a_2}T^{a_1}T^{a_2} \right]
\end{aligned}
$$

(320) $$C_- = \frac{1}{2(N^2-1)^2}\left\{T_F^2\,\frac{(N^2-1)^2}{N} + T_F^2\,\frac{N^2-1}{N}\right\}$$

$$= \frac{T_F^2\,N}{2(N^2-1)}$$

$$= \frac{3}{64} \quad \left(=\frac{9}{192}\right)$$

QED-like項とQCD固有項のカラー因子の比は、$N^2-1-1=7$ と $N^2-1+1=9$ です。

まずQED-like項

(321) $$\hat{M}^{\lambda_3\lambda_4}_{\lambda_1\lambda_2} = \bar{u}(k_3,\lambda_3)\left\{\frac{\gamma^{\mu_1}(\not k_3-\not k_1+m)\gamma^{\mu_2}}{2k_1k_3} + \frac{\gamma^{\mu_2}(\not k_1-\not k_4+m)\gamma^{\mu_1}}{2k_1k_4}\right\}v(k_4,\lambda_4)$$
$$\times\,\varepsilon_{\mu_1}(k_1,\lambda_1)\,\varepsilon_{\mu_2}(k_2,\lambda_2)$$

ゲージ不変性のテスト：$\varepsilon_{\mu_1}\to k_{1\mu_1}$ でゼロ

(322) $$\bar{u}(k_3,\lambda_3)\left\{\frac{\not k_1(\not k_3-\not k_1+m)\gamma^{\mu_2}}{2k_1k_3} + \frac{\gamma^{\mu_2}(\not k_1-\not k_4+m)\not k_1}{2k_1k_4}\right\}v(k_4,\lambda_4)$$

$$= \bar{u}(k_3,\lambda_3)\left\{\frac{[(2k_1k_3)-\not k_3\not k_1+m\not k_1]\gamma^{\mu_2}}{2k_1k_3} + \frac{\gamma^{\mu_2}[-(2k_4k_1)+\not k_1\not k_4+\not k_1 m]}{2k_1k_4}\right\}v$$

$$= \bar{u}(k_3,\lambda_3)\left\{\underbrace{\gamma^{\mu_2} - \frac{\overset{0\leftarrow}{(\not k_3-m)}\not k_1\gamma^{\mu_2}}{2k_1k_3} - \gamma^{\mu_2}}_{\to 0} + \frac{\gamma^{\mu_2}\not k_1\overset{\to 0}{(\not k_4+m)}}{2k_1k_4}\right\}v(k_4,\lambda_4)$$

$$= 0 \qquad ; \quad \bar{u}(k_3)(\not k_3-m) = (\not k_4+m)v(k_4) = 0$$

テストOKなので(321)の計算をすすめます。

(323) $$\hat{M}^{\lambda_3\lambda_4}_{\lambda_1\lambda_2} = \bar{u}(k_3,\lambda_3)\left\{\frac{[2k_3^{\mu_1}-\overset{0\leftarrow}{(\not k_3-m)}\gamma^{\mu_1}-\gamma^{\mu_1}\not k_1]\gamma^{\mu_2}}{2k_1k_3} + \frac{\gamma^{\mu_2}[\not k_1\gamma^{\mu_1}+\gamma^{\mu_1}\overset{\to 0}{(\not k_4+m)}-2k_4^{\mu_1}]}{2k_1k_4}\right\}$$
$$\times\, v(k_4,\lambda_4)\,\varepsilon_{\mu_1}(k_1,\lambda_1)\,\varepsilon_{\mu_2}(k_2,\lambda_2)$$

$$= \bar{u}(k_3,\lambda_3)\left\{\left(\frac{k_3^{\mu_1}}{k_1k_3}-\frac{k_4^{\mu_1}}{k_1k_4}\right)\gamma^{\mu_2} - \frac{\gamma^{\mu_1}\not k_1\gamma^{\mu_2}}{2k_1k_3} + \frac{\gamma^{\mu_2}\not k_1\gamma^{\mu_1}}{2k_1k_4}\right\}v(k_4,\lambda_4)\,\varepsilon_{\mu_1}(k_1\lambda_1)\,\varepsilon_{\mu_2}(k_2\lambda_2)$$

ここで 次の公式を使う。[証明は右からγ^σをかけて trace, $\gamma^\sigma\gamma_5$をかけて trace]

(324) $\gamma^\mu\gamma^\nu\gamma^\rho = g^{\mu\nu}\gamma^\rho - g^{\mu\rho}\gamma^\nu + g^{\nu\rho}\gamma^\mu + i\varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma}\gamma_5\gamma_\sigma$

(325) $-\gamma^{\mu_1}\not{k}_1\gamma^{\mu_2} = -\underbrace{k_1^{\mu_1}}_{\to 0}\gamma^{\mu_2} + g^{\mu_1\mu_2}\not{k}_1 - k_1^{\mu_2}\gamma^{\mu_1} - i\varepsilon^{\mu_1\alpha\mu_2\beta}\gamma_5\gamma_\beta k_{1\alpha}$

$\gamma^{\mu_2}\not{k}_1\gamma^{\mu_1} = k_1^{\mu_2}\gamma^{\mu_1} - g^{\mu_1\mu_2}\not{k}_1 + \underbrace{k_1^{\mu_1}}_{\to 0}\gamma^{\mu_2} + i\varepsilon^{\mu_2\alpha\mu_1\beta}\gamma_5\gamma_\beta k_{1\alpha}$

(326) $\hat{M}^{\lambda_3\lambda_4}_{\lambda_1\lambda_2} = \bar{u}(k_3,\lambda_3)\left\{\left(\frac{k_3^{\mu_1}}{k_1k_3} - \frac{k_4^{\mu_1}}{k_1k_4}\right)\gamma^{\mu_2} - \left(\frac{k_1^{\mu_2}}{2k_1k_3} - \frac{k_1^{\mu_2}}{2k_1k_4}\right)\gamma^{\mu_1} + g^{\mu_1\mu_2}\left(\frac{\not{k}_1}{2k_1k_3} - \frac{\not{k}_1}{2k_1k_4}\right)\right.$

$\left. - i\varepsilon^{\alpha\mu_1\mu_2\beta}\gamma_\beta\gamma_5 k_{1\alpha}\left(\frac{1}{2k_1k_3} + \frac{1}{2k_1k_4}\right)\right\} v(k_4,\lambda_4)\varepsilon_{\mu_1}(k_1,\lambda_1)\varepsilon_{\mu_2}(k_2,\lambda_2)$

ここで p.87 (237) の $J^\mu_{\lambda_3\lambda_4}$ と、$\gamma^\mu\gamma_5$ カレントの $J^{5\mu}_{\lambda_3\lambda_4}$ を導入する。

(327a) $J^\mu_{\lambda_3\lambda_4} \equiv \bar{u}(k_3,\lambda_3)\gamma^\mu v(k_4,\lambda_4)$

$= u(k_3,\lambda_3)_+^\dagger \sigma_+^\mu v(k_4,\lambda_4)_+ + u(k_3,\lambda_3)_-^\dagger \sigma_-^\mu v(k_4,\lambda_4)_-$

(327b) $J^{5\mu}_{\lambda_3\lambda_4} \equiv \bar{u}(k_3,\lambda_3)\gamma^\mu\gamma_5 v(k_4,\lambda_4)$

$= u(k_3,\lambda_3)_+^\dagger \sigma_+^\mu v(k_4,\lambda_4)_+ - u(k_3,\lambda_3)_-^\dagger \sigma_-^\mu v(k_4,\lambda_4)_-$

(240) は次の2式にまとまる。

(328) $\begin{cases} J^\mu_{\sigma,\sigma} = \sigma\, 2m\,[0, \sin\theta, 0, \cos\theta] \\ J^\mu_{\sigma,-\sigma} = 2E\,[0, \cos\theta, -\sigma i, -\sin\theta] \end{cases}$

$\gamma^\mu\gamma_5$ カレントの方は、(238)式で σ_-^α を $-\sigma_-^\alpha$ におきかえるので、

(329) $\begin{cases} J^{5\mu}_{\sigma,\sigma} = 2m\,[1, 0, 0, 0] \\ J^{5\mu}_{\sigma,-\sigma} = \sigma\, 2E\beta\,[0, \cos\theta, -\sigma i, -\sin\theta] \end{cases}$

カレント (327a), (327b) を使って振幅 (326) を整理すると.

$$(330)\quad \hat{M}^{\lambda_3\lambda_4}_{\lambda_1\lambda_2} = \left(\frac{k_3\cdot\varepsilon_1}{k_1\cdot k_3} - \frac{k_4\cdot\varepsilon_1}{k_1\cdot k_4}\right) J\cdot\varepsilon_2 - \left(\frac{1}{2k_1k_3} - \frac{1}{2k_1k_4}\right)\underbrace{(k_1\cdot\varepsilon_2)}_{\to 0}(J\cdot\varepsilon_1)$$
$$+\left(\frac{1}{2k_1k_3} - \frac{1}{2k_1k_4}\right)(k_1\cdot J)(\varepsilon_1\cdot\varepsilon_2)$$
$$-i\,\varepsilon_{\alpha\mu_1\mu_2\beta}\, k_1^{\alpha}\varepsilon^{\mu_1}\varepsilon^{\mu_2}J^{5\beta}\left(\frac{1}{2k_1k_3} + \frac{1}{2k_1k_4}\right)$$

重心系で振幅を計算しよう。

$$(331)\quad \begin{aligned} k_1^{\mu} &= E(1,0,0,1) \\ k_2^{\mu} &= E(1,0,0,-1) \\ k_3^{\mu} &= E(1,\beta\sin\theta,0,\beta\cos\theta) \qquad & k_1\cdot k_3 &= E^2(1-\beta\cos\theta) \\ k_4^{\mu} &= E(1,-\beta\sin\theta,0,-\beta\cos\theta) \qquad & k_1\cdot k_4 &= E^2(1+\beta\cos\theta) \end{aligned}$$

$\varepsilon_1^{\mu}(k_1,\lambda_1)$ は (58) 式だが, $\varepsilon_2^{\mu}(k_2,\lambda_2)$ は極座標の不定性があるので

一般の向きのヘリシティーベクトル (106) から定義する:

$$(332)\quad \epsilon^{\mu}(\mathbb{k},\lambda=\pm) = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\mp\varepsilon^{\mu}(\mathbb{k},x) - i\,\varepsilon^{\mu}(\mathbb{k},y)\right)$$
$$= \frac{1}{\sqrt{2}}\left(0,\ \mp\cos\theta\cos\phi + i\sin\phi,\ \mp\cos\theta\sin\phi - i\cos\phi,\ \pm\sin\theta\right)$$

$$(333a)\quad \varepsilon_1^{\mu}(k_1,\lambda_1) = \frac{1}{\sqrt{2}}(0,\ -\lambda_1,\ -i,\ 0) \qquad \Leftarrow\ \theta=0,\ \phi=0$$

$$(333b)\quad \varepsilon_2^{\mu}(k_2,\lambda_2) = \frac{1}{\sqrt{2}}(0,\ \lambda_2,\ -i,\ 0) \qquad \Leftarrow\ \theta=\pi,\ \phi=0\ [\text{convention}]$$

従って

$$(334)\quad \left\{\begin{aligned} k_3\cdot\varepsilon_1 &= \frac{E\beta}{\sqrt{2}}\sin\theta\,\lambda_1 \qquad & k_4\cdot\varepsilon_1 &= -\frac{E\beta}{\sqrt{2}}\sin\theta\,\lambda_1 \\ k_1\cdot\varepsilon_2 &= 0 \qquad & \varepsilon_1\cdot\varepsilon_2 &= \frac{1}{2}(\lambda_1\lambda_2+1) = \delta_{\lambda_1\lambda_2} \end{aligned}\right.$$

(335) $(J\cdot\varepsilon_2)^{\sigma,\sigma}_{\lambda_2} = \frac{\sigma 2m}{\sqrt{2}}(0-\lambda_2\sin\theta-0) = -\sqrt{2}\, m\,\sigma\lambda_2\sin\theta$

$(J\cdot\varepsilon_2)^{\sigma,-\sigma}_{\lambda_2} = \frac{2E}{\sqrt{2}}(0-\lambda_2\cos\theta+\sigma-0) = \sqrt{2}\,E\sigma(1-\sigma\lambda_2\cos\theta)$

$(k_1\cdot J)^{\sigma,\sigma} = \sigma\, 2mE\,(0-0-0-\cos\theta) = -2mE\sigma\cos\theta$

$(k_1\cdot J)^{\sigma,-\sigma} = 2E^2(0-0-0-(-\sin\theta)) = 2E^2\sin\theta$

(336) $\left[\frac{1}{i}\varepsilon_{\alpha\mu_1\mu_2\beta}k_1^{\alpha}\varepsilon_1^{\mu_1}\varepsilon_2^{\mu_2}J^{5\beta}\right]^{\sigma,\sigma}_{\lambda_1\lambda_2}$

$$= \frac{1}{i}\cdot E\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}\cdot 2m \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -\lambda_1 & -i & 0 \\ 0 & \lambda_2 & -i & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

$$= \frac{mE}{i}\begin{vmatrix} -\lambda_1 & -i \\ \lambda_2 & -i \end{vmatrix} \quad \leftarrow 符号$$

$$= \frac{mE}{i}(-i)(-\lambda_1-\lambda_2)$$

$$= mE(\lambda_1+\lambda_2) = 2mE\,\lambda_1\delta_{\lambda_1\lambda_2}$$

(337) $\left[\frac{1}{i}\varepsilon_{\alpha\mu_1\mu_2\beta}k_1^{\alpha}\varepsilon_1^{\mu_1}\varepsilon_2^{\mu_2}J^{5\beta}\right]^{\sigma,-\sigma}_{\lambda_1\lambda_2}$

$$= \frac{1}{i}E\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}\cdot 2E\beta\sigma \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -\lambda_1 & -i & 0 \\ 0 & \lambda_2 & -i & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\sigma i & -\sin\theta \end{vmatrix}$$

$$= \frac{E^2\beta\sigma}{i}(-\sin\theta)\begin{vmatrix} -\lambda_1 & -i \\ \lambda_2 & -i \end{vmatrix}$$

$$= -E^2\beta\sigma(\lambda_1+\lambda_2)$$

$$= -2E^2\beta\sigma\,\lambda_1\delta_{\lambda_1\lambda_2}$$

(330) を計算する準備ができたと思います。

2005. 5. 19

$$(338)\quad \hat{M}^{\sigma\sigma}_{\lambda\lambda} = \left(\frac{1}{k_1 k_3} + \frac{1}{k_1 k_4}\right)\frac{E\beta}{\cancel{\sqrt{2}}}\sin\theta\,\cancel{\lambda}\,(-\cancel{\sqrt{2}}\,m\sigma\cancel{\lambda}\sin\theta)$$

$$+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{k_1 k_3} - \frac{1}{k_1 k_4}\right)(-2mE\sigma)\cos\theta\,\delta_{\lambda\lambda} \qquad +\cancel{2}mE\lambda\delta_{\lambda\lambda}\frac{1}{\cancel{2}}\left(\frac{1}{k_1k_3}+\frac{1}{k_1k_4}\right)$$

$$=\left(\frac{1}{k_1 k_3} + \frac{1}{k_1 k_4}\right)(-mE\beta\sigma\sin^2\theta + mE\lambda)$$

$$-\left(\frac{1}{k_1 k_3} - \frac{1}{k_1 k_4}\right) mE\sigma\cos\theta$$

$$= mE\left[\left(\frac{1}{k_1{+}k_3} + \frac{1}{k_1 k_4}\right)(\lambda - \sigma\beta\sin^2\theta) - \left(\frac{1}{k_1\cdot k_3} - \frac{1}{k_1\cdot k_4}\right)\sigma\cos\theta\right]$$

$$(339)\quad \hat{M}^{\sigma,-\sigma}_{\lambda\lambda} = \left(\frac{1}{k_1\cdot k_3} + \frac{1}{k_1\cdot k_4}\right)\frac{E\beta}{\cancel{\sqrt{2}}}\sin\theta\,\lambda\cdot\cancel{\sqrt{2}}\,E\sigma\,(1-\sigma\lambda\cos\theta)$$

$$-\frac{1}{\cancel{2}}\left(\frac{1}{k_1\cdot k_3} - \frac{1}{k_1\cdot k_4}\right)\cdot\cancel{2}E^2\sin\theta\cdot\delta_{\lambda\lambda}$$

$$+\frac{1}{\cancel{2}}\left(\frac{1}{k_1\cdot k_3} + \frac{1}{k_1\cdot k_4}\right)(-\cancel{2}E^2\beta\sigma\lambda\,\delta_{\lambda\lambda})$$

$$=\left(\frac{1}{k_1\cdot k_3} + \frac{1}{k_1\cdot k_4}\right)E^2\beta\sigma\lambda\,(-1+\sin\theta-\sigma\lambda\sin\theta\cos\theta)$$

$$-\left(\frac{1}{k_1\cdot k_3} - \frac{1}{k_1\cdot k_4}\right)E^2\sin\theta$$

$$=\frac{1}{(k_1\cdot k_3)(k_1\cdot k_4)}\left\{2E^4\beta\sigma\lambda(-1+\sin\theta-\sigma\lambda\sin\theta\cos\theta) - 2E^4\beta\cos\theta\sin\theta\right\}$$

2005. 5. 20

前ページまでの計算のまちがいをみつけるのには、少し休んでから やり直す必要があるので、ここではカラー因子について、少し大切なことを学びます。(311)式では $g^a + g^b \to Q_i + \overline{Q}_j$ について

$$(\quad)\quad M_{ij}^{QCD} = \frac{1}{2}\{T^a, T^b\}_{ij}\, A + \frac{1}{2}[T^a, T^b]_{ij}\, B$$

の二つを独立なカラー因子として選びました。これは、s-channel のカラー量子数が $\underline{1}$ の振幅をA、$\underline{8}$ の振幅をBとするためです。

実際、s-channel に EW ボソン (~~スピン1なるZ, Z~~, スピン0なるH, A)

↳ C.N.Yang の定理により、スピン1のボソンは同種の質量ゼロスピン1粒子の対とは結合しない。(なりうる、カラー1の $g^a g^a$)

が交換される振幅は

$$(\quad)\quad M_{ij}^{EW} = \delta_{ij}\,\delta^{ab}\, C$$

となるので、カラー $\underline{1}$ のA振幅だけがCと干渉します。カラーの和だけを考えると

$$(\quad)\quad \Sigma|M^{QCD} + M^{EW}|^2 = \Sigma|M^{QCD}|^2 + \Sigma\, 2\mathrm{Re}\, M^{QCD} M^{EW*} + \Sigma|M^{EW}|^2$$

$$= \frac{1}{2}\mathrm{tr}(T^aT^bT^bT^a + T^aT^bT^aT^b)|A|^2 + \frac{1}{2}\mathrm{tr}(T^aT^bT^bT^a - T^aT^bT^aT^b)|B|^2$$

$$+ \mathrm{tr}(T^aT^b)\delta^{ab}\, 2\mathrm{Re}(AC^*) + \delta_{ii}\delta^{aa}|C|^2$$

$$= T_F^2 \frac{(N^2-1)(N^2-2)}{N}|A|^2 + T_F^2 N(N^2-1)|B|^2 + T_F(N^2-1)\, 2\mathrm{Re}(AC^*) + N(N^2-1)|C|^2$$

$$= \frac{14}{3}|A|^2 + 6|B|^2 + 8\,\mathrm{Re}(AC^*) + 24|C|^2$$

一方、$|A|^2$ と $|B|^2$ は α_s^2、AC^* は $\alpha_s\alpha_w$、$|C|^2$ は α_w^2 ですから、

AC^* 項の評価はしたいものですし、そのために上のベースをとりました。

2005. 5. 24

QCD for Collider Physics VI

前回の講義（V）で $gg\to Q\bar{Q}$ の計算を完了できなかったことと、(268)式のエラーが深刻なものだったので、今回は次週の講義（6月3日、4日）を待たず、誤りを正す解説と、計算の完成までのノートを公開します。今まで、講義の前日にノートを用意していたことの無理が出てしまったのだと反省しています。少しずつ準備を早めるよう努力していきますので、ご容赦ください。

まず、前回の講義中に(268)式の誤りと、(266)式の疑問点を指摘して下さった藤井宏次さんに感謝します。$f(x)\,g(-x)$ の積分を対称積分に変えたところまでは良かったのですが、答えがゼロになるはずだと思い込んでいたので、「対称関数の対称積分がゼロ」というデタラメの式を書いてしまいました。ごめんなさい。どうぞこのような誤り（結果に向けて推論をねじ曲げる誤り）をまねしないで下さいね。反省です。

さて、初めに、このエラーの原因　(266)式で Hamiltonian 密度の全微分項（特に時間微分の項、$\partial_0(\phi^*\partial_0\phi)$）を落としたことです。エネルギー保存の式

$$(340)\qquad \dot{H} = \int d^3x\, \dot{\mathcal{H}} = \int d^3x\, \nabla\cdot\vec{j}(x) = 0$$

を思い出して下さい。保存カレント（$\partial_\mu j^\mu = \dot{j}^0 - \nabla\cdot\mathbf{j} = 0$）は p.40 (25) 式です。

(266)式の第一項，$\partial_0(\phi^\dagger\partial_0\phi)$，は $\int d^3x$ 積分をしても表面項にならず，従って消えません。Lagrangian の全微分項は運動方程式を変えないので（運動方程式は始点と終点を変えない経路の変分をゼロにすること，式(5)を思い出して下さい），全微分項を捨てることが許されますが，Hamiltonian は $L(q,\dot{q})$，$\mathcal{L}(\phi,\partial_\mu\phi)$ から導かなければなりません。又，エネルギー，運動量保存則を導く並進変換は，全空間に適用されます。

というわけで，正しい Hamiltonian (265) を出発点として，計算をやり直します。

(341) $H=\int d^3x\,\mathcal{H}$

$$
\begin{aligned}
&=\int d^3x\int\frac{d^3k'}{(2\pi)^3 2E'}\int\frac{d^3k}{(2\pi)^3 2E}\Big\{iE'(a^\dagger_{\mathbf{k}'}e^{ik'x}-b_{\mathbf{k}'}e^{-ik'x})(-iE)(a_{\mathbf{k}}e^{-ikx}-b^\dagger_{\mathbf{k}}e^{ikx})\\
&\qquad+(-i\mathbf{k}')(a^\dagger_{\mathbf{k}'}e^{ik'x}-b_{\mathbf{k}'}e^{-ik'x})(i\mathbf{k})(a_{\mathbf{k}}e^{-ikx}-b^\dagger_{\mathbf{k}}e^{ikx})\\
&\qquad+m^2(a^\dagger_{\mathbf{k}'}e^{ik'x}+b_{\mathbf{k}'}e^{-ik'x})(a_{\mathbf{k}}e^{-ikx}+b^\dagger_{\mathbf{k}}e^{ikx})\Big\}\\
&=\int d^3x\int\frac{d^3k'}{(2\pi)^3 2E'}\int\frac{d^3k}{(2\pi)^3 2E}\Big\{(EE'+\mathbf{k}\cdot\mathbf{k}')\big[a^\dagger_{\mathbf{k}'}a_{\mathbf{k}}e^{i(k'-k)x}+b_{\mathbf{k}'}b^\dagger_{\mathbf{k}}e^{-i(k'-k)x}\\
&\qquad\qquad-a^\dagger_{\mathbf{k}'}b^\dagger_{\mathbf{k}}e^{i(k'+k)x}-b_{\mathbf{k}'}a_{\mathbf{k}}e^{-i(k'+k)x}\big]\\
&\qquad+m^2\big[a^\dagger_{\mathbf{k}'}a_{\mathbf{k}}e^{i(k'-k)x}+b_{\mathbf{k}'}b^\dagger_{\mathbf{k}}e^{-i(k'-k)x}+a^\dagger_{\mathbf{k}'}b^\dagger_{\mathbf{k}}e^{i(k'+k)x}+b_{\mathbf{k}'}a_{\mathbf{k}}e^{-i(k'+k)x}\big]\Big\}\\
&=\int\frac{d^3k'}{(2\pi)^3 2E'}\int\frac{d^3k}{(2\pi)^3 2E}\Big\{(2\pi)^3\delta^3(\mathbf{k}-\mathbf{k}')\big[(EE'+\mathbf{k}\cdot\mathbf{k}'+m^2)(a^\dagger_{\mathbf{k}'}a_{\mathbf{k}}e^{i(E'-E)t}+b_{\mathbf{k}'}b^\dagger_{\mathbf{k}}e^{-i(E'-E)t})\big]\\
&\qquad+(2\pi)^3\delta^3(\mathbf{k}+\mathbf{k}')\big[(-EE'-\mathbf{k}\cdot\mathbf{k}'+m^2)(a^\dagger_{\mathbf{k}'}b^\dagger_{\mathbf{k}}e^{i(E'+E)t}+b_{\mathbf{k}'}a_{\mathbf{k}}e^{-i(E'+E)t})\big]\Big\}\\
&=\int\frac{d^3k}{(2\pi)^3 2E}\Big\{\frac{1}{2E}\Big\{\underbrace{(E^2+\mathbf{k}\cdot\mathbf{k}+m^2)}_{\to 2E^2}\big[a^\dagger_{\mathbf{k}}a_{\mathbf{k}}+b_{\mathbf{k}}b^\dagger_{\mathbf{k}}\big]+\underbrace{(-E^2+\mathbf{k}\cdot\mathbf{k}+m^2)}_{\to 0}\big[a^\dagger_{-\mathbf{k}}b^\dagger_{\mathbf{k}}e^{2iEt}+b_{-\mathbf{k}}a_{\mathbf{k}}e^{-2iEt}\big]\Big\}\\
&=\int\frac{d^3k}{(2\pi)^3}\,\frac{1}{2}\big[a^\dagger_{\mathbf{k}}a_{\mathbf{k}}+b_{\mathbf{k}}b^\dagger_{\mathbf{k}}\big]
\end{aligned}
$$

これで(267)式の自由複素スカラー場のHamiltonianが、今度は正しく導出されました。

ここでもう一度、少しだけ、自由Dirac場のHamiltonianの導出、p.69〜p.71, (165)-(172), の反省をさせて下さい。この導出では(168)式[再掲]:

(168) = (341)
$$\begin{cases} u(\mathbb{k},\lambda')^{+}u(\mathbb{k},\lambda) = 2E\,\delta_{\lambda\lambda'} & v(\mathbb{k},\lambda')^{+}v(\mathbb{k},\lambda) = 2E\,\delta_{\lambda\lambda'} \\ u(-\mathbb{k},\lambda')^{+}v(\mathbb{k},\lambda) = 0 & v(-\mathbb{k},\lambda')^{+}u(\mathbb{k},\lambda) = 0 \end{cases}$$

が本質的でした。この内、上段の2式は波動関数の規格なので問題ないのですが、下段の2式は、その証明のために私の特別な表示を使ってしまったので、一般的に成立するべき関係式なのかどうかが、講義中に判断できませんでした。ここで、下段の2式が運動方程式(162)式[再掲]

(162) = (342)
$$\begin{cases} (\not{p}-m)\,u(p,\lambda) = \overline{u}(p,\lambda)(\not{p}-m) = 0 \\ (\not{p}+m)\,v(p,\lambda) = \overline{v}(p,\lambda)(\not{p}+m) = 0 \end{cases} \qquad \left(\begin{array}{l} p^{\mu} = (E, \mathbb{P}) \\ E = \sqrt{\mathbb{P}^2+m^2} \end{array}\right)$$

の帰結であることを、従って表示には依存しないことを、示します。

まず、(166)の2番目の表式にもどって、$a^{+}b^{+}$項とba項がそれぞれ

(343)
$$a^{+}_{\mathbb{k}',\lambda'}\,b^{+}_{\mathbb{k},\lambda}\,\overline{u}(\mathbb{k}',\lambda')(-\gamma^{i}k^{i}+m)\,v(\mathbb{k},\lambda)\;e^{i(k'+k)x}$$
$$+\,b_{\mathbb{k}',\lambda'}\,a_{\mathbb{k},\lambda}\,\overline{v}(\mathbb{k}',\lambda')(\gamma^{i}k^{i}+m)\,u(\mathbb{k},\lambda)\;e^{-i(k+k')x}$$

となることを確認してください。$\int d^3x$ を実施すると $(2\pi)^3\delta^3(\mathbb{k}+\mathbb{k}')$ となり、

更に $\int d^3k'$ 積分をすると、

(344) $$a^{+}_{-\mathbb{k},\lambda'}\, b^{+}_{\mathbb{k},\lambda}\ \underbrace{\bar{u}(-\mathbb{k},\lambda')(-\gamma^i k^i+m)\, v(\mathbb{k},\lambda)}\, e^{2iEt}$$
$$+\, b_{-\mathbb{k},\lambda'}\, a_{\mathbb{k},\lambda}\ \underbrace{\bar{v}(-\mathbb{k},\lambda')(\gamma^i k^i+m)\, u(\mathbb{k},\lambda)}\, e^{-2iEt}$$

となります。上の式で 〰〰 線の部分は、運動方程式 (162)=(342) を用いるとゼロとなります。

(345a) $$\bar{u}(-\mathbb{k},\lambda')(-\gamma^i k^i+m)\, v(\mathbb{k},\lambda)$$
$$= \frac{1}{2}\left\{\bar{u}(-\mathbb{k},\lambda')\left[-\gamma^0 E+\gamma^i(-k^i)+m+\gamma^0 E-\gamma^i k^i+m\right] v(\mathbb{k},\lambda)\right\}$$
$$= 0$$

(345b) $$\bar{v}(-\mathbb{k},\lambda')(\gamma^i k^i+m)\, u(\mathbb{k},\lambda)$$
$$= \frac{1}{2}\left\{\bar{v}(-\mathbb{k},\lambda')\left[\gamma^0 E-\gamma^i(-k^i)+m-\gamma^0 E+\gamma^i k^i+m\right] u(\mathbb{k},\lambda)\right\}$$
$$= 0$$

これにより、不用項は運動方程式によってゼロとなることが示されました。(168)=(341) の下段の等式は、従って、表示によらずに成立します。 //

さて、まだ反省は終わっていませんでしたね。$gg \to Q\bar{Q}$ のカラー1重項部分（要するに $\gamma\gamma \to t\bar{t}$ と同じ部分）が全くできなかったのでした。

チェックしたところ、p.111〜p.113 は全てOKでした。p.114 にエラーが2ヶ所ありました。(336)式は determinant の計算で符号のエラー：

(336正) = (346)
$$\left[\frac{1}{i}\varepsilon_{\alpha\mu_1\mu_2\beta}k_1^\alpha\varepsilon_1^{\mu_1}\varepsilon_2^{\mu_2}J^{5\beta}\right]^{\sigma,\sigma}_{\lambda_1\lambda_2} = -2mE\lambda_1\delta_{\lambda_1\lambda_2}$$

次に(337)式では、3行目から4行目に移るときに「$\sin\theta$」を書き忘れ：

(337正) = (347)
$$\left[\frac{1}{i}\varepsilon_{\alpha\mu_1\mu_2\beta}k_1^\alpha\varepsilon_1^{\mu_1}\varepsilon_2^{\mu_2}J^{5\beta}\right]^{\sigma,-\sigma}_{\lambda_1\lambda_2} = -2E^2\sin\theta\,\beta\sigma\lambda_1\delta_{\lambda_1\lambda_2}$$

たったこれだけのミスのために、p.115 の (338) と (339) はデタラメになってしまいました。まず (339) は、(347) のエラーを直すだけで

(339正) = (348)
$$\hat{M}^{\sigma,-\sigma}_{\lambda\lambda} = 0$$

となりOKです。次に (338) は、(346) のエラーを直すと、

(338正) = (349)
$$\hat{M}^{\sigma,\sigma}_{\lambda\lambda} = \left(\frac{1}{k_1\cdot k_3}+\frac{1}{k_1\cdot k_4}\right)(-mE\beta\sigma\sin^2\theta - mE\lambda) - \left(\frac{1}{k_1\cdot k_3}-\frac{1}{k_1\cdot k_4}\right)mE\sigma\cos\theta$$
$$= -\frac{mE}{(k_1\cdot k_3)(k_1\cdot k_4)}\left[2E^2(\lambda+\sigma\beta\sin^2\theta) + 2E^2\beta\sigma\cos^2\theta\right]$$
$$= -\frac{2mE^3}{(k_1\cdot k_3)(k_1\cdot k_4)}\lambda\left[1+\lambda\sigma\beta\right]$$

振幅 (349) が Higgs resonance の寄与（$gg \to H \to t\bar{t}$）と干渉する重要な振幅ですが、グルオンのヘリシティー（λ）とトップのヘリシティー（σ）が同じ時に大きく（$M \sim 1+\beta$）、逆の時に小さく（$M \sim 1-\beta$）なります。

この入射グルオンヘリシティー(λ)と終クォークヘリシティー(σ)の相関は、偏極陽子衝突ができないかぎりLHCでは役に立ちませんが、光子リニアコライダーの物理では強力な武器となります。浅川恵理さんとの論文

(350) E.Asakawa, K.H, EPJC31, 351−364 (2003)

を参考にして下さい。[注：この論文のTable 1の振幅は、この講義で求めた振幅と、overall符号がずれています。これは多分、−z方向に進む光子の偏極ベクトルの位相を、(333b)の$\phi=0$でなく、$\phi=\pi$ととったためだと思います。overall位相は決して物理に反映しませんが、異る位相conventionの式を不用意に混同するとエラーを導きます。振幅間の位相を問題にするときは、必ず、全ての振幅を同じ位相conventionで計算しなければいけません。]

LHCの物理としては、ヘリシティーが等しいグルオンは、質量ゼロのクォーク対を生成できない、というルールとして重要です。このため、$gg\to b\bar{b}$のチャンネルでは、$gg\to H\to b\bar{b}$の振幅との干渉はほとんど見えないと思います。あくまでも重いHiggs, $gg\to H, A\to t\bar{t}$等で、効果が現れるのだろうと思います。

カラー1重項では

さて、Higgsとは干渉しない、$\lambda_1 \neq \lambda_2$ の振幅も計算しておきましょう。

この場合は (330) 式の第一項以外は消えてしまうので

$$(351)\quad \hat{M}^{\sigma\sigma}_{\lambda,-\lambda} = \left(\frac{k_3\cdot\varepsilon_1(\lambda)}{k_1\cdot k_3} - \frac{k_4\cdot\varepsilon_1(\lambda)}{k_1\cdot k_4}\right)(J\cdot\varepsilon_2)^{\sigma,\sigma}_{-\lambda} \qquad \leftarrow (330)$$

$$= \frac{E\beta}{\sqrt{2}}\sin\theta\,\lambda\left(\frac{1}{k_1\cdot k_3} + \frac{1}{k_1\cdot k_4}\right)(-\sqrt{2}m\sigma(-\lambda)\sin\theta) \qquad \leftarrow (334, 335)$$

$$= \sigma m E\beta\sin^2\theta\left(\frac{1}{k_1\cdot k_3} + \frac{1}{k_1\cdot k_4}\right)$$

$$= \sigma\frac{2mE^3\beta}{(k_1\cdot k_3)(k_1\cdot k_4)}\sin^2\theta$$

$$(352)\quad \hat{M}^{\sigma,-\sigma}_{\lambda,-\lambda} = \left(\frac{k_3\cdot\varepsilon_1(\lambda)}{k_1\cdot k_3} - \frac{k_4\cdot\varepsilon_1(\lambda)}{k_1\cdot k_4}\right)(J\cdot\varepsilon_2)^{\sigma,-\sigma}_{-\lambda}$$

$$= \frac{E\beta}{\sqrt{2}}\sin\theta\,\lambda\left(\frac{1}{k_1\cdot k_3} + \frac{1}{k_1\cdot k_4}\right)\sqrt{2}E\sigma(1+\sigma\lambda\cos\theta)$$

$$= \sigma\lambda E^2\beta\sin\theta(1+\sigma\lambda\cos\theta)\left(\frac{1}{k_1\cdot k_3} + \frac{1}{k_1\cdot k_4}\right)$$

$$= \sigma\lambda\frac{2E^4\beta}{(k_1\cdot k_3)(k_1\cdot k_4)}\sin\theta(1+\sigma\lambda\cos\theta)$$

$E \gg m$ では (352) のヘリシティー振幅だけが残り。

$$(353)\quad \hat{M}^{\sigma,-\sigma}_{\lambda,-\sigma} = \sigma\lambda\cdot 2\beta\frac{\sin\theta(1+\sigma\lambda\cos\theta)}{1-\beta^2\cos^2\theta}$$

$$\xrightarrow{\beta\to 1} \sigma\lambda\cdot 2\frac{1+\sigma\lambda\cos\theta}{\sin\theta}$$

前方 ($\cos\theta \sim 1$) では $\sigma = \lambda$ の振幅（入射グルオンのヘリシティーと、生成クォーク、又は反クォークのヘリシティーがそろう振幅）が大となります。 //

次に(311)、(312)式のQCD固有(カラー8重)項 $\hat{N}^{\lambda_3\lambda_4}_{\lambda_1\lambda_2}$ を計算します。

$$(354)\quad \hat{N}^{\lambda_3\lambda_4}_{\lambda_1\lambda_2} = \bar{u}(k_3,\lambda_3)\left\{ \frac{\gamma^{\mu_1}(\not{k}_3-\not{k}_1+m)\gamma^{\mu_2}}{2k_1k_3} - \frac{\gamma^{\mu_2}(\not{k}_1-\not{k}_4+m)\gamma^{\mu_1}}{2k_1k_4} \right.$$
$$\left. - 2\gamma^{\mu}\frac{1}{s}\left[(k_1-k_2)_{\mu}g^{\mu_1\mu_2}+2k_2^{\mu_1}g_{\mu}^{\mu_2}-2k_1^{\mu_2}g_{\mu}^{\mu_1}\right]\right\} v(k_4,\lambda_4)$$
$$\times\, \varepsilon_{\mu_1}(k_1,\lambda_1)\,\varepsilon_{\mu_2}(k_2\lambda_2)$$

(322)式と全く同じように、ゲージ不変性のテスト：$\varepsilon_{\mu_1}\rightarrow k_{1\mu_1}$ をします。

$$(355)\quad \bar{u}(k_3,\lambda_3)\left\{ \frac{\not{k}_1(\not{k}_3-\not{k}_1+m)\gamma^{\mu_2}}{2k_1k_3} - \frac{\gamma^{\mu_2}(\not{k}_1-\not{k}_4+m)\not{k}_1}{2k_1k_4} \right.$$
$$\left. - \frac{2}{s}\left[(\not{k}_1-\not{k}_2)k_1^{\mu_2}+2k_1\cdot k_2\gamma^{\mu_2}-2k_1^{\mu_2}\not{k}_1\right]\right\} v(k_4,\lambda_4)\,\varepsilon_{\mu_2}(k_2,\lambda_2)$$
$$= \bar{u}(k_3,\lambda_3)\left\{ \frac{[(2k_1k_3)-\not{k}_3\not{k}_1+m\not{k}_1]\gamma^{\mu_2}}{2k_1k_3} - \frac{\gamma^{\mu_2}[-(2k_4k_1)+\not{k}_1\not{k}_4+\not{k}_1m]}{2k_1k_4} \right.$$
$$\left. - \frac{2}{s}\left[(\not{k}_1-\not{k}_2-2\not{k}_1)k_1^{\mu_2}+s\gamma^{\mu_2}\right]\right\} v(k_4,\lambda_4)\,\varepsilon_{\mu_2}(k_2,\lambda_2)$$
$$= \bar{u}(k_3,\lambda_3)\left\{ \gamma^{\mu_2} - \frac{\overbrace{(\not{k}_3-m)}^{0}\not{k}_1\gamma^{\mu_2}}{2k_1k_3} + \gamma^{\mu_2} - \frac{\gamma^{\mu_2}\not{k}_1\overbrace{(\not{k}_4+m)}^{0}}{2k_1k_4} \right.$$
$$\left. - \frac{2}{s}(-\not{k}_1-\not{k}_2)k_1^{\mu_2} - 2\gamma^{\mu_2}\right\} v(k_4,\lambda_4)\,\varepsilon_{\mu_2}(k_2,\lambda_2)$$

ごめんなさい。またまたエラーですね。[すっかり自信喪失です。]

★ ★ ★

見つけました。とてもとてもひどいエラーでした。QCD Lagrangian (279)がゲージ不変じゃなかった。これって、学生だったら丸坊主です。平身低頭。

(279c)式の内、第2行の ggg 結合だけ、サインが間違っています。

(260)式の

$$(356)\quad F^a_{\mu\nu} = \partial_\mu A^a_\nu - \partial_\nu A^a_\mu - g f^{abc} A^b_\mu A^c_\nu$$

を思い起こせば

$$(357)\quad -\frac{1}{4} F^a_{\mu\nu} F^{a\mu\nu} = -\frac{1}{4}(\partial_\mu A^a_\nu - \partial_\nu A^a_\mu - g f^{abc} A^b_\mu A^c_\nu)(\partial^\mu A^{a\nu} - \partial^\nu A^{a\mu} - g f^{ab'c'} A^{b'\mu} A^{c'\nu})$$

$$= -\frac{1}{4}(\partial_\mu A^a_\nu - \partial_\nu A^a_\mu)(\partial^\mu A^{a\nu} - \partial^\nu A^{a\mu})$$

$$+ \frac{g}{2} f^{abc} (\partial^\mu A^{a\nu} - \partial^\nu A^{a\mu}) A^b_\mu A^c_\nu$$

$$- \frac{g^2}{4} f^{abc} f^{ab'c'} A^b_\mu A^c_\nu A^{b'\mu} A^{c'\nu}$$

のように交差項(ggg結合)だけ符号が違うのがあたりまえなのに、

何でまちがえたのか分かりません。申し訳ございませんでした。

結果、(290)式のサイン、(291)式のファインマン則のサインが誤りで、

振幅(307)と(308)で $f^{a_1a_2a}$ を $-f^{a_1a_2a}$ と置き換えなければ

なりません。その結果(354)式の $\frac{?}{?}\gamma^\mu$ 項の符号がマイナスになります。

(355)式で γ^{μ_2} 項は相殺し、残りは

$$(358)\quad (355) \xrightarrow{\text{エラー訂正後}} \bar{u}(k_3,\lambda_3)\left\{ \frac{2}{s}(\not{k}_1 + \not{k}_2) k_1^{\mu_2} \right\} v(k_4,\lambda_4)\, \varepsilon_{\mu_2}(k_2,\lambda_2)$$

$$= \bar{u}(k_3,\lambda_3)(\not{k}_3 + \not{k}_4) v(k_4,\lambda_4) \frac{2}{s} k_1^{\mu_2} \varepsilon_{\mu_2}$$

$$= \bar{u}(k_3,\lambda_3)\left[\underbrace{(\not{k}_3 - m)}_{0} + \underbrace{(\not{k}_4 + m)}_{0} \right] v(k_4,\lambda_4) \frac{2}{s} k_1 \cdot \varepsilon_2$$

$$= 0$$

私の特殊な Light cone ゲージでは [p.60, (106)-(108)参] $k_1 \cdot \varepsilon_2 = 0$ (334) ですが、これは 2グルオン衝突の重心系でしか成立しないので、運動方程式を使うことが必要です。エラーを整理すると、

(359) p.101 (279c) 3グルオン結合の符号が逆 [$\mathcal{L}_{QCD}$]

p.104 (290),(291) 〃 [ファインマン規則]

p.108 (307),(308) 〃 [$f^{a_1 a_2 a} \to f^{a_1 a_2 a} \times (-1)$]

p.124 (354),(355) 〃 [$\frac{2}{5}\gamma^\mu \to \frac{2}{5}\gamma^\mu \times (-1)$]

となります。エラーばかりで本当に申し分けなく思いますけれど、散乱振幅で

(360) $\varepsilon^\mu(k, \lambda) \longrightarrow k^\mu$

の置き換えをした時のゲージ不変性のテストがいかに重要かを理解していただければ不幸中の幸いです。過去、私は、このテストをせずに計算結果を発表したことは無いと思います。外線にゲージボソンが無いときは、わざわざ光子やグルオンを放出させてテストしました。

それにしてもひどいエラーでした。目が悪くなったのかな～～と言って頭が悪くなったのを隠そうと思います。//

(354) 式にもどります。エラーを訂正して

$$(361)\ \hat{N}^{\lambda_3\lambda_4}_{\lambda_1\lambda_2} = \bar{u}(k_3,\lambda_3)\left\{\frac{\gamma^{\mu_1}(\not{k}_3-\not{k}_1+m)\gamma^{\mu_2}}{2k_1k_3} - \frac{\gamma^{\mu_2}(\not{k}_1-\not{k}_4+m)\gamma^{\mu_1}}{2k_1k_4}\right.$$
$$\left. - \gamma^{\mu}\frac{2}{s}\left[(k_1-k_2)_{\mu}g^{\mu_1\mu_2} + 2k_2^{\mu_1}g_{\mu}^{\mu_2} - 2k_1^{\mu_2}g_{\mu}^{\mu_1}\right]\right\} v(k_4,\lambda_4)$$
$$\times\ \varepsilon_{\mu_1}(k_1,\lambda_1)\,\varepsilon_{\mu_2}(k_2,\lambda_2)$$

$$= \bar{u}(k_3,\lambda_3)\left\{\left(\frac{k_3^{\mu_1}}{k_1\cdot k_3} + \frac{k_4^{\mu_1}}{k_1k_4}\right)\gamma^{\mu_2} - \frac{\gamma^{\mu_1}\not{k}_1\gamma^{\mu_2}}{2k_1k_3} - \frac{\gamma^{\mu_2}\not{k}_1\gamma^{\mu_1}}{2k_1k_4}\right.$$
$$\left. - \frac{2}{s}\left[(\not{k}_1-\not{k}_2)g^{\mu_1\mu_2} + 2k_2^{\mu_1}\gamma^{\mu_2} - 2k_1^{\mu_2}\gamma^{\mu_1}\right]\right\} v(k_4,\lambda_4)\,\varepsilon_{\mu_1}(k_1,\lambda_1)\varepsilon_{\mu_2}(k_2,\lambda_2)$$

ここで、(324)、(325) 式と、 $k_2\cdot\varepsilon_1 = k_1\cdot\varepsilon_2 = k_1\cdot\varepsilon_1 = k_2\cdot\varepsilon_2 = 0$ を使ってまとめると、

$$(362)\ \hat{N}^{\lambda_3\lambda_4}_{\lambda_1\lambda_2} = \bar{u}(k_3,\lambda_3)\left\{\left(\frac{k_3^{\mu_1}}{k_1k_3} + \frac{k_4^{\mu_1}}{k_1\cdot k_4}\right)\gamma^{\mu_2} + g^{\mu_1\mu_2}\left(\frac{\not{k}_1}{2k_1k_3} + \frac{\not{k}_1}{2k_1k_4}\right) - i\varepsilon^{\alpha\mu_1\mu_2\beta}\gamma_\beta\gamma_5 k_{1\alpha}\left(\frac{1}{2k_1k_3} - \frac{1}{2k_1k_4}\right)\right.$$
$$\left. - \frac{2}{s}(\not{k}_1-\not{k}_2)g^{\mu_1\mu_2}\right\} v(k_3,k_4)\ \varepsilon_{\mu_1}(k_1,\lambda_1)\,\varepsilon_{\mu_2}(k_2,\lambda_2)$$

$$= \left(\frac{k_3\cdot\varepsilon_1}{k_1\cdot k_3} + \frac{k_4\cdot\varepsilon_1}{k_1\cdot k_4}\right)J\cdot\varepsilon_2 + \left(\frac{1}{2k_1k_3} + \frac{1}{2k_1k_4}\right)(k_1\cdot J)(\varepsilon_1\cdot\varepsilon_2)$$
$$- \frac{2}{s}(k_1-k_2)\cdot J\,(\varepsilon_1\cdot\varepsilon_2) - i\,\varepsilon_{\alpha\mu_1\mu_2\beta}\,k_1^{\alpha}\varepsilon_1^{\mu_1}\varepsilon_2^{\mu_2}J^{5\beta}\left(\frac{1}{2k_1k_3} - \frac{1}{2k_1k_4}\right)$$

ここで $(k_1+k_2)\cdot J = 0 \ \Rightarrow\ (k_1-k_2)\cdot J = (2k_1-k_1-k_2)\cdot J = 2k_1\cdot J$ を用いて

$$(363)\ \hat{N}^{\lambda_3\lambda_4}_{\lambda_1\lambda_2} = \left(\frac{1}{2k_1k_3} + \frac{1}{2k_1k_4} - \frac{4}{s}\right)(k_1\cdot J)(\varepsilon_1\cdot\varepsilon_2)$$
$$+ \left(\frac{1}{k_1k_3} - \frac{1}{k_1k_4}\right)\left[(k_3\cdot\varepsilon_1)(J\cdot\varepsilon_2) + \frac{1}{2i}\varepsilon_{\alpha\mu_1\mu_2\beta}k_1^{\alpha}\varepsilon_1^{\mu_1}\varepsilon_2^{\mu_2}J^{5\beta}\right]$$

上で (334) を使いました。(334) − (337) で全ての項は計算すみなので、

kinematical factor をまず計算します。

(364a) $$\frac{1}{2k_1k_3}+\frac{1}{2k_1k_4}-\frac{4}{s}=\frac{1}{2E^2(1-\beta\cos\theta)}+\frac{1}{2E^2(1+\beta\cos\theta)}-\frac{4}{4E^2}$$

$$=\frac{1}{2E^2}\left(\frac{1}{1-\beta\cos\theta}+\frac{1}{1+\beta\cos\theta}-2\right)$$

$$=\frac{1}{2E^2}\,\frac{1+\cancel{\beta\cos\theta}+1-\cancel{\beta\cos\theta}-2+2\beta^2\cos^2\theta}{(1-\beta^2\cos^2\theta)}\quad=\frac{\beta^2}{E^2}\,\frac{\cos^2\theta}{1-\beta^2\cos^2\theta}$$

(364b) $$\frac{1}{k_1k_3}-\frac{1}{k_1k_4}=\frac{1}{E^2(1-\beta\cos\theta)}-\frac{1}{E^2(1+\beta\cos\theta)}$$

$$=\frac{1}{E^2}\left(\frac{1}{1-\beta\cos\theta}-\frac{1}{1+\beta\cos\theta}\right)$$

$$=\frac{1}{E^2}\,\frac{1+\beta\cos\theta-(1-\beta\cos\theta)}{1-\beta^2\cos^2\theta}\quad=\frac{2\beta}{E^2}\,\frac{\cos\theta}{1-\beta^2\cos^2\theta}$$

(365) $$\hat{N}^{\lambda_3\lambda_4}_{\lambda_1\lambda_2}=\frac{\beta\cos\theta}{E^2(1-\beta^2\cos^2\theta)}\left\{\beta\cos\theta\,(k_1\cdot J)(\varepsilon_1\cdot\varepsilon_2)+2\left[(k_3\cdot\varepsilon_1)(J\cdot\varepsilon_2)+\frac{1}{2i}\varepsilon_{\alpha\mu_1\mu_2\beta}k_1^{\alpha}\varepsilon_1^{\mu_1}\varepsilon_2^{\mu_2}J^{s\beta}\right]\right\}$$

(366) $$\hat{N}^{\sigma\sigma}_{\lambda\lambda}=\frac{\beta\cos\theta}{E^2(1-\beta^2\cos^2\theta)}\left\{\beta\cos\theta(-2mE\sigma\cos\theta)+2\left[\frac{E\beta}{\sqrt{2}}\sin\theta\,\lambda(-\sqrt{2}m\sigma\lambda\sin\theta)-\cancel{X}mE\lambda\right]\right\}$$

$$=\quad〃\quad\left\{-2mE\sigma\beta\cos^2\theta-2mE\sigma\beta\sin^2\theta-\overset{2}{\cancel{*}}mE\lambda\right\}$$

$$=-2mE\,\frac{\beta\cos\theta}{E^2(1-\beta^2\cos^2\theta)}\left\{\sigma\beta+\lambda\right\}$$

$$=-\lambda\,(1+\lambda\sigma\beta)\,\frac{2m\beta\cos\theta}{E(1-\beta^2\cos^2\theta)}$$

カラー一重項の(349)式と似ているが、$\cos\theta$項がスピン1交換を表している。

(367) $$\hat{N}^{\sigma,-\sigma}_{\lambda\lambda}=\frac{\beta\cos\theta}{E^2(1-\beta^2\cos^2\theta)}\left\{\beta\cos\theta\cdot 2E^2\sin\theta+2\cdot\frac{E\beta}{\cancel{\sqrt{2}}}\sin\theta\,\lambda\,\cancel{\sqrt{2}}E\sigma(1-\sigma\lambda\cos\theta)-2E^2\beta\sigma\lambda\sin\theta\right\}$$

$$=\frac{\beta\cos\theta}{E^2(1-\beta^2\cos^2\theta)}\,2E^2\beta\left\{\cos\theta\sin\theta+\lambda\sigma\sin\theta-\sin\theta\cos\theta-\sigma\lambda\sin\theta\right\}$$

$$=0$$

これは(348)式と同じ。同ヘリシティーのグルオンは、異るヘリシティーの$Q\bar{Q}$を生成できない。

$$(368)\quad \hat{N}^{\sigma\sigma}_{\lambda,-\lambda} = \frac{2\beta\cos\theta}{E^2(1-\beta^2\cos^2\theta)}(k_3\cdot\varepsilon_1)_\lambda (J\cdot\varepsilon_2)^{\sigma\sigma}_{-\lambda}$$
$$= \frac{2\beta\cos\theta}{E^2(1-\beta^2\cos^2\theta)}\cdot\frac{E\beta}{\cancel{\sqrt{2}}}\sin\theta\,\lambda\cdot(-\cancel{\sqrt{2}}\,m\sigma(-\lambda)\sin\theta)$$
$$= \sigma\cdot\frac{2m\beta^2}{E}\,\frac{\cos\theta\sin^2\theta}{1-\beta^2\cos^2\theta}$$

$$(369)\quad \hat{N}^{\sigma,-\sigma}_{\lambda,-\lambda} = \frac{2\beta\cos\theta}{E^2(1-\beta^2\cos^2\theta)}\cdot\frac{E\beta}{\cancel{\sqrt{2}}}\sin\theta\,\lambda\cdot\cancel{\sqrt{2}}\,E\sigma(1+\sigma\lambda\cos\theta)$$
$$= \sigma\lambda\cdot 2\beta^2\,\frac{\cos\theta\sin\theta(1+\sigma\lambda\cos\theta)}{1-\beta^2\cos^2\theta}$$

$E \gg m$ 極限では (369) だけが残り

$$(370)\quad \hat{N}^{\sigma,-\sigma}_{\lambda,-\lambda} \xrightarrow{\beta\to 1} \sigma\lambda\cdot 2\cos\theta\cdot\frac{1+\sigma\lambda\cos\theta}{\sin\theta}$$

(366)-(370) をカラー1重項 (QED項) の (348)-(353) と較べると、

全てのヘリシティー振幅について

$$(371)\quad \hat{N}^{\lambda_3\lambda_4}_{\lambda_1\lambda_2} = \hat{M}^{\lambda_3\lambda_4}_{\lambda_1\lambda_2}\times\beta\cos\theta$$

が成立しているようです。これが正しいのかどうか、どういう物理的意味があるのか、すぐには分かりません。正しいかどうかは、数値計算プログラムと比較するのがベストです。

MadGraph を使ってテストしてください。

(372) http://madgraph.hep.uiuc.edu

$\hat{M}^{\lambda_3\lambda_4}_{\lambda_1\lambda_2}$ と $\hat{N}^{\lambda_3\lambda_4}_{\lambda_1\lambda_2}$ の計算がとりあえず完了したので、p.116 で予習したカラー因子の説明をもう一度繰り返します。カラーの自由度も含めた素過程は

$$g^a(k_1,\lambda_1)+g^b(k_2,\lambda_2)\rightarrow Q_i(k_3,\lambda_3)+\bar{Q}_j(k_4,\lambda_4) \tag{373}$$

と表され、振幅は

$$M^{ab}_{ij}(\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3,\lambda_4)=\frac{1}{2}\{T^a,T^b\}_{ij}\hat{M}^{\lambda_3\lambda_4}_{\lambda_1\lambda_2}+\frac{1}{2}[T^a,T^b]_{ij}\hat{N}^{\lambda_3\lambda_4}_{\lambda_1\lambda_2} \tag{374}$$

です。振幅を自乗し、カラーとスピンについて足しあげます。

$$\sum_{\text{color}}\sum_{\text{spin}}\left|M^{ab}_{ij}(\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3,\lambda_4)\right|^2 \tag{375}$$

$$=\sum_{i,j,a,b}\sum_{\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3,\lambda_4}\left|\frac{1}{2}\{T^a,T^b\}_{ij}\hat{M}^{\lambda_3\lambda_4}_{\lambda_1\lambda_2}+\frac{1}{2}[T^a,T^b]_{ij}\hat{N}^{\lambda_3\lambda_4}_{\lambda_1\lambda_2}\right|^2$$

(374)式のカラー因子のベースでは、一方が $a\leftrightarrow b$ で対称，多方が反対称なので、交差項は残りません。従ってこのベースを使うと

$$\sum_{\text{color}}\sum_{\text{spin}}|M|^2=\underbrace{\sum_{i,j,a,b}\left|\frac{1}{2}\{T^a,T^b\}_{ij}\right|^2}\sum_{\lambda_i}\left|\hat{M}^{\lambda_3\lambda_4}_{\lambda_1\lambda_2}\right|^2+\underbrace{\sum_{i,j,a,b}\left|\frac{1}{2}[T^a,T^b]_{ij}\right|^2}\sum_{\lambda_i}\left|\hat{N}^{\lambda_3\lambda_4}_{\lambda_1\lambda_2}\right|^2 \tag{376}$$

$$=\underbrace{\frac{14}{3}}\sum_{\lambda_i}\left|\hat{M}^{\lambda_3\lambda_4}_{\lambda_1\lambda_2}\right|^2+\underbrace{6}\sum_{\lambda_i}\left|\hat{N}^{\lambda_3\lambda_4}_{\lambda_1\lambda_2}\right|^2$$

となります。上の式で $\frac{14}{3}$，6 等の項を、カラー因子と呼びます。

カラーとスピンについて平均した断面積は

(377) $$d\sigma = \underbrace{\frac{1}{2s}}_{\substack{\uparrow \\ \text{flux}}} \cdot \underbrace{\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}}_{\substack{\uparrow \\ \text{グルオンスピンの平均}}} \cdot \underbrace{\frac{1}{8}\cdot\frac{1}{8}}_{\substack{\uparrow \\ \text{グルオンカラーの平均}}} \underbrace{\sum_{color}\sum_{spin}\left|M_{ij}^{ab}(\lambda_1\lambda_2\lambda_3\lambda_4)\right|^2}_{(376)\text{式}} \underbrace{\frac{\beta}{8\pi}\frac{d\cos\theta}{2}}_{\text{2体の phase space}}$$

となります。(319)と(320)式では、カラーの平均項 $(1/(N^2-1))^2$ をかけた因子をカラー因子と呼びましたが、今後は、カラーの和だけを実行した因子、(376)式の $\frac{14}{3}$ や 6 をカラー因子と呼びます。この定義により、カラー因子は、同一の振幅から作られる全ての交差チャンネルで共通になるからです。例えば、

(378) $gg \to q\bar{q}$, $q\bar{q} \to gg$, $gq \to gq$, $g\bar{q} \to g\bar{q}$

のカラー因子は全て共通になります。平均の因子は、gg が $(1/8)^2$, $q\bar{q}$ が $(1/3)^2$, gq と $g\bar{q}$ が $(1/8)(1/3)$ となるわけです。

p.116で説明したように、(374)式のカラーベースのとり方は、EW過程(カラー1重項の $\underset{\text{又は2}}{\text{スピンゼロ}}$ 粒子交換過程)との干渉が $a \leftrightarrow b$ 対称項に限られるので便利です。実際、

(379) $$M_{ij}^{ab}(\lambda_k) = \frac{1}{2}\{T^a, T^b\}_{ij} \hat{M}^{\lambda_3\lambda_4}_{\lambda_1\lambda_2} + \frac{1}{2}[T^a, T^b]_{ij} \hat{N}^{\lambda_3\lambda_4}_{\lambda_1\lambda_2} + \delta_{ij}\delta^{ab} \underbrace{\hat{L}^{\lambda_3\lambda_4}_{\lambda_1\lambda_2}}_{\substack{\uparrow \\ \text{EW振幅}}}$$

とすると、p.116の計算で

2005. 6. 1

(380) $$\sum_{color}\sum_{spin}\left|M_{ij}^{ab}(\lambda_k)\right|^2=\frac{14}{3}\sum_{\lambda_k}\left|\hat{M}^{\lambda_3\lambda_4}_{\lambda_1\lambda_2}\right|^2+8\sum_{\lambda_k}\mathrm{Re}\left[\left(\hat{L}^{\lambda_3\lambda_4}_{\lambda_1\lambda_2}\right)\left(\hat{M}^{\lambda_3\lambda_4}_{\lambda_1\lambda_2}\right)^*\right]$$
$$+6\sum_{\lambda_k}\left|\hat{N}^{\lambda_3\lambda_4}_{\lambda_1\lambda_2}\right|^2+24\sum_{\lambda_k}\left|\hat{L}^{\lambda_3\lambda_4}_{\lambda_1\lambda_2}\right|^2$$

となるわけです。断面積は(377)に代入するだけです。

前回の講義でYangの定理についての質問がありました。

(381) Yang's Theorem：質量ゼロの同種ヴェクトルボソンの対は スピン1を作れない。

この定理により、$Z\to\gamma\gamma$，ggは~~■~~厳密に禁止されます。ボース統計による対称化と角運動量の和の法則との不一致が本質的なので、同種でなければ（$g^{*a}\to g^b+g^c$；f^{abc}項）OKだし、$Z\to\gamma\gamma^*$や$Z\to gg^*$も全く問題ありません。面白い例として、

(382)
- (スピン1) $\to ZZ$ が日笠さんの論文 [PRD35,3366(1987) E D38,1632(1988)]
- $Z\to\Upsilon\Upsilon$，$J/\psi J/\psi$ が私の論文 [PLB570,39(2003)]

にあります。重いヴェクトルボソンの場合、同種粒子であっても、一方が横波、他方が縦波であればOKなのです。残念ながら、私達が計算した$Z\to\Upsilon\Upsilon$や$J/\psi J/\psi$の分岐比は、小さすぎて見えません。//

上の例の様に、カラーのベースを直交するようにとることが便利な場合もあるのですが［この方針で頑張った例としては私の論文、NPB313, 560 (1989) 等があります］、一般的には SU(3) の generator T^a を並べただけのベースを使うことが多いようです。一般に任意の振幅をカラーのベースで展開し、

(383) $$\mathcal{M} = \sum_{i=1}^{n} T^i \hat{M}_i$$

とおくと、カラーの和は

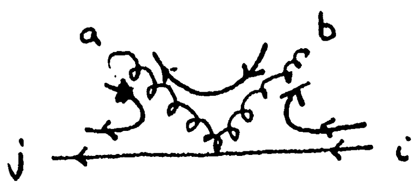
(384) $$\sum_{color}\sum_{spin} |M|^2 = \sum_{color}\sum_{spin} \left|\sum_{i=1}^{n} T^i \hat{M}_i\right|^2$$
$$= \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\left[\sum_{color} T^i (T^j)^*\right]\left[\sum_{spin} M_i (M_j)^*\right]$$

となります。このときの

(385) $$C^{ij} \equiv \sum_{color} T^i (T^j)^*$$

をカラー因子行列と呼び、あらかじめ計算しておくことが多いようです。T^i を generator の積で表わすベースでは、行列 C の対角要素 C^{ii} が large N 極限で leading であるため、カラーの流れをイベント（確率事象）について付与することができます。

(386) 例 $$\sum \left|(T^a T^b)_{ji}\right|^2 = \mathrm{tr}(T^a T^b T^b T^a) \sim (N^2-1)^2$$



非対角要素、C^{ij} $(i \neq j)$ は C^{ii} に較べて $1/N^2$ で小さいようです。

Weightのとり方として、たとえば、QCDの予言(384)を

$$\sum_{\text{color}} \sum_{\text{spin}} |M|^2 = \sum_i \sum_j C^{ij} W_{ij} \tag{387}$$

と置いて、

$$\frac{C^{jj} W_{jj}}{\sum_{i=1}^{n} C^{ii} W_{ii}} = P_j \tag{388}$$

で分配すれば

$$\sum_{j=1}^{n} P_j = 1 \tag{389}$$

なので「正しい」全断面積が得られ、且つ、P_j の確率で、C^{jj} のカラーフローを指定することができます。

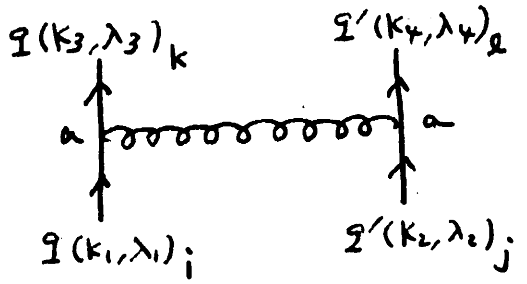
実際のMCでどうしているかは、これから教えていただこうと思っています。

$qq' \to qq'$

(390) $q(k_1,\lambda_1)_i + q'(k_2,\lambda_2)_j \to q(k_3,\lambda_3)_k + q'(k_4,\lambda_4)_l$

の計算をします。$m_q = m_{q'} = 0$ とします。Feynman 図は

(391)



$m_q = m_{q'} = 0$ のヘリシティー保存則より

(392) $\lambda_1 = \lambda_3 = \lambda\ ,\quad \lambda_2 = \lambda_4 = \lambda'$

なので、振幅を

(393) $$M = T^a_{ki} T^a_{lj} \hat{M}_{\lambda\lambda'}$$

とおく。Feynman 則より

(394) $$iM = \bar{u}(k_3,\lambda)(-igT^a_{ki}\gamma^\mu)u(k_1\lambda)\frac{-ig_{\mu\nu}}{(k_1-k_3)^2}$$
$$\bar{u}(k_4,\lambda')(-igT^a_{lj}\gamma^\nu)u(k_2,\lambda')$$

(395) $$\hat{M}_{\lambda\lambda'} = \frac{g^2}{t}\bar{u}(k_3,\lambda)\gamma^\mu u(k_1,\lambda)\ \bar{u}(k_4,\lambda')\gamma_\mu u(k_2,\lambda')$$
$$\equiv \frac{g^2}{t} J^\mu_\lambda \cdot J_{\lambda'\mu}$$

但し $t = (k_1-k_3)^2 = -2k_1k_3$

(396)
$$k_1^\mu = E(1,0,0,1)$$
$$k_2^\mu = E(1,0,0,-1)$$
$$k_3^\mu = E(1,\sin\theta,0,\cos\theta) \qquad [\phi=0]$$
$$k_4^\mu = E(1,-\sin\theta,0,-\cos\theta) \qquad [\phi=\pi]$$

としたときに t-channel のカレントは.

(397a)
$$J_\lambda^\mu(k_1,k_3) = \bar{u}(k_3,\lambda)\gamma^\mu u(k_1,\lambda)$$
$$= \sum_\alpha u(k_3,\lambda)_\alpha^\dagger \sigma_\alpha^\mu u(k_1,\lambda)_\alpha \qquad [\alpha=\pm : \text{chilarity}] \quad \text{p.86(232)}$$
$$= u(k_3,\lambda)_\lambda^\dagger \sigma_\lambda^\mu u(k_1,\lambda)_\lambda \qquad [\lambda=\alpha \text{ rula for } m_q=0]$$
$$= 2E\,\chi_\lambda^\dagger(\vec{k}_3)\sigma_\lambda^\mu \chi_\lambda(\vec{k}_1)$$

(397b)
$$J_{\lambda'}^\mu(k_2,k_4) = \bar{u}(k_4,\lambda')\gamma^\mu u(k_2,\lambda')$$
$$= 2E\,\chi_{\lambda'}^\dagger(\vec{k}_4)\sigma_{\lambda'}^\mu \chi_{\lambda'}(\vec{k}_2)$$

ここで $\chi_\lambda(\vec{k}_1)$ と $\chi_{\lambda'}(\vec{k}_2)$ は p.87(234), $\chi_\lambda(\vec{k}_3)$ と $\chi_{\lambda'}(\vec{k}_4)$ は p.88(239) にあるので.

(398a)
$$J_+^\mu(k_1,k_3) = 2E\,\chi_+(\vec{k}_3)^\dagger\sigma_+^\mu\chi_+(\vec{k}_1) = 2E\left(\cos\tfrac{\theta}{2},\sin\tfrac{\theta}{2}\right)\left[1,\vec{\sigma}\right]\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$$
$$= 2E\left(\cos\tfrac{\theta}{2},\sin\tfrac{\theta}{2}\right)\left[\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\i\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}\right] = 2E\left(\cos\tfrac{\theta}{2},\sin\tfrac{\theta}{2},i\sin\tfrac{\theta}{2},\cos\tfrac{\theta}{2}\right)$$

(398b)
$$J_-^\mu(k_1,k_3) = 2E\left(-\sin\tfrac{\theta}{2},\cos\tfrac{\theta}{2}\right)\left[1,-\vec{\sigma}\right]\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} = 2E\left(\cos\tfrac{\theta}{2},\sin\tfrac{\theta}{2},-i\sin\tfrac{\theta}{2},\cos\tfrac{\theta}{2}\right)$$

(398c)
$$J_+^\mu(k_2,k_4) = 2E\left(\sin\tfrac{\theta}{2},-\cos\tfrac{\theta}{2}\right)\left[1,\vec{\sigma}\right]\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} = 2E\left(-\cos\tfrac{\theta}{2},\sin\tfrac{\theta}{2},-i\sin\tfrac{\theta}{2},\cos\tfrac{\theta}{2}\right)$$

(398d)
$$J_-^\mu(k_2,k_4) = 2E\left(\cos\tfrac{\theta}{2},\sin\tfrac{\theta}{2}\right)\left[1,-\vec{\sigma}\right]\begin{pmatrix}-1\\0\end{pmatrix} = 2E\left(-\cos\tfrac{\theta}{2},\sin\tfrac{\theta}{2},i\sin\tfrac{\theta}{2},\cos\tfrac{\theta}{2}\right)$$

2005. 6. 1

(399a) $J^{\mu}_{\lambda}(k_1, k_3) = 2E\left(\cos\frac{\theta}{2}, \sin\frac{\theta}{2}, \lambda i \sin\frac{\theta}{2}, \cos\frac{\theta}{2}\right)$

(399b) $J^{\mu}_{\lambda'}(k_2, k_4) = -2E\left(\cos\frac{\theta}{2}, -\sin\frac{\theta}{2}, \lambda' i \sin\frac{\theta}{2}, -\cos\frac{\theta}{2}\right)$

振幅 (395) は

(400)
$$\hat{M}_{\lambda\lambda'} = \frac{g^2}{t} J_{\lambda}(k_1, k_3) \cdot J_{\lambda'}(k_2, k_4)$$
$$= g^2\left(-\frac{s}{t}\right)\left(\cos^2\frac{\theta}{2} + \sin^2\frac{\theta}{2} - (-\lambda\lambda')\sin^2\frac{\theta}{2} + \cos^2\frac{\theta}{2}\right)$$
$$= 2g^2\left(-\frac{s}{t}\right)\left[\cos^2\frac{\theta}{2} + \delta_{\lambda\lambda'}\sin^2\frac{\theta}{2}\right]$$
$$= g^2\left(-\frac{s}{t}\right) \times \begin{cases} 2 & \cdots\ \lambda = \lambda' \quad (\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = \lambda_4) \\ 1 + \cos\theta & \cdots\ \lambda = -\lambda' \quad (\lambda_1 = -\lambda_2 = \lambda_3 = -\lambda_4) \end{cases}$$

カラーとスピンの和をとると

(401)
$$\sum_{color}\sum_{spin}|M|^2 = \sum_{k,i,l,j,a,b}(T^a_{ki}T^a_{lj})(T^b_{ik}T^b_{jl})\sum_{\lambda\lambda'}|\hat{M}_{\lambda\lambda'}|^2$$
$$= \underbrace{(t_r(T^aT^b))^2}\ 4g^4\left(\frac{s}{t}\right)^2\left[1 + \left(\frac{1+\cos\theta}{2}\right)^2\right] \times 2$$
$$= \underbrace{T_F^2(N^2-1)}_{2}\ g^4\frac{16}{(1-\cos\theta)^2}\left[1 + \left(\frac{1+\cos\theta}{2}\right)^2\right] \times \underset{\begin{pmatrix}\lambda = \lambda' = \pm \\ \lambda = -\lambda' = \pm\end{pmatrix}}{\overset{\uparrow}{2}}$$

カラーとスピンの平均をした断面積は

(402)
$$d\sigma = \frac{1}{2s}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\underbrace{\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3}}\cdot 2\cdot\frac{32g^4}{(1-\cos\theta)^2}\left[1 + \left(\frac{1+\cos\theta}{2}\right)^2\right]\cdot\frac{1}{8\pi}\cdot\frac{d\cos\theta}{2}$$
$$= \underbrace{\frac{T_F^2(N^2-1)}{N^2}}_{=\frac{2}{9}}\cdot\frac{4\pi\alpha_s^2}{s}\ \frac{1}{(1-\cos\theta)^2}\left[1 + \left(\frac{1+\cos\theta}{2}\right)^2\right]\ d\cos\theta$$

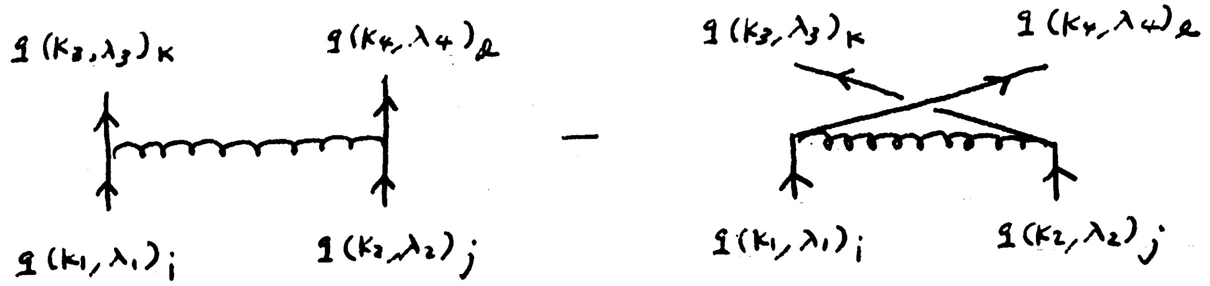
さてこの答えは合っていますか？

$qq \to qq$:

ここで、$q = q'$（同種粒子：$uu \to uu$ など）の場合をやっておきましょう。

(403) $q(k_1, \lambda_1)_i + q(k_2, \lambda_2)_j \longrightarrow q(k_3, \lambda_4)_k + q(k_4, \lambda_4)_l$

となります。Feynman図は

(404) 

で［相対符号の − はフェルミ演算子 $a_{k,\lambda}$, $a^{+}_{k',\lambda'}$ 等の反交換関係の帰結です。納得していない方は、是非 $\langle 0 | a_{k_4} a_{k_3} \overset{T}{\downarrow} \int d^4x \mathcal{L}_I \int d^4y \mathcal{L}_I \; a^{+}_{k_1} a^{+}_{k_2} | 0 \rangle$ を計算して納得してください。］ 振幅は $t = -s\frac{1-\cos\theta}{2}$, $u = -s\frac{1+\cos\theta}{2}$ として

(405)
$$M = T^a_{ki} T^a_{lj} \cdot \frac{g^2}{t} \cdot [\delta_{\lambda_1\lambda} \delta_{\lambda_3\lambda} \delta_{\lambda_2\lambda'} \delta_{\lambda_4\lambda'}] \cdot J_{\lambda}(k_1, k_3) \cdot J_{\lambda'}(k_2, k_4)$$
$$- T^b_{kj} T^b_{li} \cdot \frac{g^2}{u} \cdot [\delta_{\lambda_1\lambda} \delta_{\lambda_4\lambda} \delta_{\lambda_2\lambda'} \delta_{\lambda_3\lambda'}] \cdot J_{\lambda}(k_1, k_4) \cdot J_{\lambda'}(k_2, k_3)$$

まず干渉するのは

(406) $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = \lambda_4 = \lambda = \lambda' = \pm$

のときに限ることを確認して下さい。

(407) $\lambda_1 = -\lambda_2 = \pm$

のときは干渉がないので、(402)式は単に $\cos\theta$ と $-\cos\theta$ の平均になります。(406)のときは、干渉しますが、干渉項のカラー因子は、

$$(408)\quad \sum_{ijkl}\sum_{ab}(T^a_{ki}T^a_{lj})(T^b_{jk}T^b_{il}) = tr(T^aT^bT^aT^b) = -T_F^2\frac{N^2-1}{N} \qquad ;(318)$$

となり，leading term (401)式の $T_F^2(N^2-1)$ に較べて $1/N$ で小さく，且つ符号がマイナスで

QEDの場合（ee→ee等）と較べ，干渉項の符号が逆，大きさが 1/3 と

なることが分かります。一筋縄では行きませんね。(400)に対応する振幅は

$$(409)\quad \hat{M}^{(u)}_{\lambda\lambda'} \equiv \frac{g^2}{u} J_\lambda(k_1,k_4)\cdot J_{\lambda'}(k_2,k_3)$$

$$= g^2\left(-\frac{s}{u}\right)\times\begin{cases} 2 & \cdots\ \lambda_1=\lambda_2\quad(=\lambda_3=\lambda_4) \\ 1-\cos\theta & \cdots\ \lambda_1=-\lambda_2\quad(=\lambda_4=-\lambda_3)\end{cases}$$

カラーとスピンの和をとると，

$$(410)\quad \sum_{color}\sum_{spin}|M|^2 = \sum_{ijkl}\sum_{a,b}\sum_{\lambda_1\lambda_2\lambda_3\lambda_4}\left|T^a_{ki}T^a_{lj}\hat{M}_{\lambda\lambda'} - T^b_{kj}T^b_{li}\hat{M}^{(u)}_{\lambda''\lambda'''}\right|^2$$

$$= T_F^2(N^2-1)\cdot 32g^4\cdot\left\{\frac{4+(1+\cos\theta)^2}{4(1-\cos\theta)^2} + \frac{4+(1-\cos\theta)^2}{4(1+\cos\theta)^2}\right\}$$

$$-\left(-T_F^2\frac{N^2-1}{N}\right)\cdot g^4\frac{s^2}{tu}\cdot 2\cdot 2\times \underset{\uparrow\ \hat{M}\hat{M}^{u}+\hat{M}^{u}\hat{M}}{2}\times \overset{\lambda_1=\lambda_2=\pm}{2}$$

$$= T_F^2(N^2-1)\cdot 32g^4\cdot\left\{\frac{4+(1+\cos\theta)^2}{4(1-\cos\theta)^2} + \frac{4+(1-\cos\theta)^2}{4(1+\cos\theta)^2} - \left(-\frac{1}{N}\right)\frac{2}{1-\cos^2\theta}\right\}$$

一応求まりましたが自信がありません。QEDの場合（ee→ee）は，

$T_F^2(N^2-1)\to 1$，$\left(-\frac{1}{N}\right)\to 1$，$g^4\to e^4$ で良いはずです。

断面積は，同種粒子が2ヶある場合，phase space が半分

になるのですが，

(411) $0 \leq \cos\theta \leq 1$

同種粒子の場合だけ積分範囲を制限するのは面倒なので、

(411) $\int_0^1 d\cos\theta \longrightarrow \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} d\cos\theta$

として「統計因子」$\frac{1}{2}$ を入れることが一般的のようです。

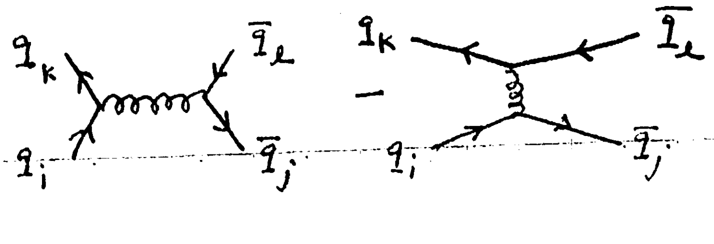
(412)
$$\frac{d\sigma}{d\cos\theta}^{qq\to qq} = \frac{T_F^2 (N^2-1)}{N^2}\cdot\frac{4\pi\alpha_s^2}{s} \times \left\{ \frac{4+(1+\cos\theta)^2}{4(1-\cos\theta)^2} + \frac{4+(1-\cos\theta)^2}{4(1+\cos\theta)^2} - \left(-\frac{1}{N}\right)\frac{2}{1-\cos^2\theta} \right\} \times \underbrace{\frac{1}{2}}_{\leftarrow (411)}$$

この結果が正しいかどうかは、是非、テキストや MadGraph を用いて check し、結果を教えて下さい。エラーがある場合には check してつまとめます。

(372) の MadGraph は振幅の計算を HELAS で実行するので、HELAS 振幅のコードを生成します。HELAS 振幅は私の位相・ゲージコンベンションに従っているので、全てのヘリシティー振幅の値が、符号や複素位相を含めて一致する(はず)です。

★ $qq' \to qq'$ は (402) と同じになります。

★ $q\bar{q} \to q\bar{q}$ は原理的には「消滅過程」の寄与があるのですが、その効果は数値的に極めて小さく、(402) で代用して問題ありません。

(413) 

【練習問題としては良いと思います。】

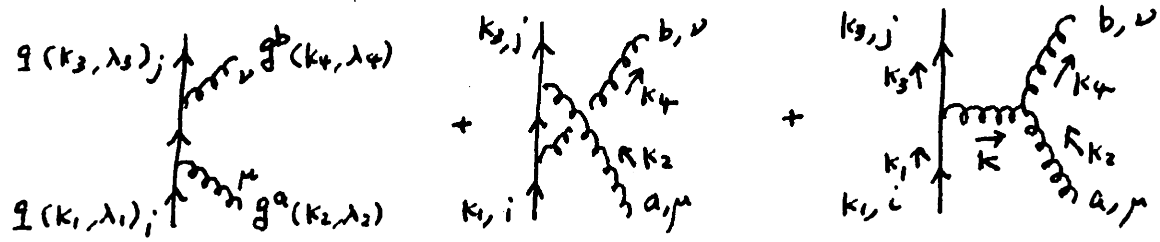
$q g \to q g$

次は $gg \to q\bar{q}$ [p. 108 (307)] の交差過程

(414) $q(k_1,\lambda_1)_i + g^a(k_2,\lambda_2) \longrightarrow q(k_3,\lambda_3)_j + g^b(k_4,\lambda_4)$

の計算をします。$m_q = 0$ です。(308)式で (k_i,λ_i) と波動関数を取り替えると、

(415)



(416)
$$M = g^2 \bar{u}(k_3,\lambda_3)\Big\{-(T^bT^a)_{ji}\frac{\gamma^\nu(\not k_1+\not k_2)\gamma^\mu}{(k_1+k_2)^2} - (T^aT^b)_{ji}\frac{\gamma^\mu(\not k_1-\not k_4)\gamma^\nu}{(k_1-k_4)^2}$$
$$-if^{abc}T^c_{ji}\frac{\gamma_\rho}{(k_1-k_3)^2}\left[(k_2+k_4)^\rho g^{\mu\nu}+(-k_4-k)^\mu g^{\nu\rho}+(k-k_2)^\nu g^{\rho\mu}\right]\Big\}u(k_1,\lambda_1)\varepsilon_\mu(k_2,\lambda_2)\varepsilon^*_\nu(k_4,\lambda_4)$$

せっかくですから、今回は「標準的な」カラーベース

(417) $$M = (T^aT^b)_{ji}\hat{M}_{\mathrm{I}} + (T^bT^a)_{ji}\hat{M}_{\mathrm{II}}$$

を用いることにしましょう。まず

(418) $$if^{abc}T^c_{ji} = [T^a, T^b]_{ji} = (T^aT^b)_{ji} - (T^bT^a)_{ij}$$

(419) $$[\ \ ]^{\mu\nu\rho} = (k_2+k_4)^\rho g^{\mu\nu} - (2k_4^\mu - \overset{\to 0}{k_2^\mu})g^{\nu\rho} + (\overset{\to 0}{k_4^\nu} - 2k_2^\nu)g^{\rho\mu} = (k_2+k_4)^\rho g^{\mu\nu} - 2k_4^\mu g^{\nu\rho} - 2k_2^\nu g^{\rho\mu}$$

(420) $$\hat{M}_{\mathrm{I}} = g^2\bar{u}(k_3,\lambda_3)\left\{\frac{\gamma^\mu(\not k_1-\not k_4)\gamma^\nu}{2k_1k_4} + \frac{\gamma_\rho}{2k_1k_3}\left[(k_2+k_4)^\rho g^{\mu\nu} - 2k_4^\mu g^{\nu\rho} - 2k_2^\nu g^{\rho\mu}\right]\right\}u(k_1,\lambda_1)\varepsilon_\mu(k_2,\lambda_2)\varepsilon^*_\nu(k_4,\lambda_4)$$

(421) $$\hat{M}_{\mathrm{II}} = g^2\bar{u}(k_3,\lambda_3)\left\{-\frac{\gamma^\nu(\not k_1+\not k_2)\gamma^\mu}{2k_1k_2} - \frac{\gamma_\rho}{2k_1k_3}\left[(k_2+k_4)^\rho g^{\mu\nu} - 2k_4^\mu g^{\nu\rho} - 2k_2^\nu g^{\rho\mu}\right]\right\}u(k_1,\lambda_1)\varepsilon_\mu(k_2,\lambda_2)\varepsilon^*_\nu(k_4,\lambda_4)$$

ここで、$\hat{M}_{\mathrm{I}}$ と $\hat{M}_{\mathrm{II}}$ が独立にゲージ不変であることを確認しましょう。

2005.6.2

(422) $\hat{M}_I(\varepsilon_\nu(k_4)\to k_{4\nu}) \to \frac{\gamma^\mu(\not k_1-\not k_4)\not k_4}{2k_1k_4} + \frac{\gamma_\rho}{2k_1k_3}\left[(k_2+k_4)^\rho k_4^\mu - 2k_4^\mu k_4^\rho - 2k_2\cdot k_4\, g^{\rho\mu}\right]$

$$= \frac{\gamma^\mu \not k_1\not k_4}{2k_1k_4} + \frac{\gamma_\rho}{2k_1k_3}\left[(k_2-k_4)^\rho k_4^\mu - (k_2+k_4)^2 g^{\rho\mu}\right]$$

$$= \frac{\gamma^\mu(2k_1k_4 - \not k_4\not k_1)}{2k_1k_4} + \frac{\gamma_\rho}{2k_1k_3}\left[(k_3-k_1)^\rho k_4^\mu - (k_1+k_3)^2 g^{\rho\mu}\right]$$

$$= \gamma^\mu - \frac{\gamma^\mu\not k_4 \overset{\to 0}{\not k_1}}{2k_1k_4} + \frac{\overset{0\leftarrow}{\not k_3} - \overset{\to 0}{\not k_1}}{2k_1k_3}k_4^\mu - \gamma^\mu$$

$$= 0$$

(423) $\hat{M}_{II}(\varepsilon_\mu(k_2)\to k_{2\mu}) \to -\frac{\gamma^\nu(\not k_1+\not k_2)\not k_2}{2k_1k_2} - \frac{\gamma_\rho}{2k_1k_3}\left[(k_2+k_4)^\rho k_2^\nu - 2k_4k_2\, g^{\nu\rho} - 2k_2^\nu k_2^\rho\right]$

$$= -\frac{\gamma^\nu\not k_1\not k_2}{2k_1k_2} - \frac{\gamma_\rho}{2k_1k_3}\left[(k_4-k_2)^\rho k_2^\nu - (k_2+k_4)^2 g^{\nu\rho}\right]$$

$$= -\frac{\gamma^\nu(2k_1k_2 - \not k_2\overset{\to 0}{\not k_1})}{2k_1k_2} - \frac{\overset{\to 0}{\not k_1} - \overset{\leftarrow}{\not k_3}}{2k_1k_3}k_2^\nu + \frac{\gamma^\nu}{2k_1k_3}(k_1+k_3)^2$$

$$= -\gamma^\nu + \gamma^\nu = 0$$

$\hat{M}_I$ と $\hat{M}_{II}$ は $N\to\infty$ で干渉せず [(408)参]、振幅のゲージ不変性は $\frac{1}{N}$ 展開の各オーダーで保証されるためです。安心して $\hat{M}_I$ と $\hat{M}_{II}$ の計算をします。

(424) $\hat{M}_I = g^2\bar{u}(k_3,\lambda_3)\left\{\frac{\gamma^\mu[2k_1^\nu - \gamma^\nu\overset{\to 0}{\not k_1} - \not k_4\gamma^\nu]}{2k_1k_4} + \frac{\gamma_\rho}{2k_2k_4}\left[(k_2+k_4)^\rho g^{\mu\nu} - 2k_4^\mu g^{\nu\rho} - 2k_2^\nu g^{\rho\mu}\right]\right\} v_1\varepsilon_{2\mu}\varepsilon^*_{4\nu}$

$$= g^2\bar{u}_3\left\{-\frac{\gamma^\mu\not k_4\gamma^\nu}{2k_1k_4} + \gamma^\mu\left(\frac{k_1^\nu}{k_1k_4} - \frac{k_2^\nu}{k_2k_4}\right) - \gamma^\nu\frac{k_4^\mu}{k_2k_4} + \frac{\not k_2+\not k_4}{2k_2k_4}g^{\mu\nu}\right\}v_1\varepsilon_{2\mu}\varepsilon^*_{4\nu}$$

(425) $\gamma^\mu\not k_4\gamma^\nu = k_4^\mu\gamma^\nu - \not k_4\, g^{\mu\nu} + k_4^\nu\gamma^\mu + i\varepsilon^{\mu\alpha\nu\beta}\gamma_5\gamma_\beta k_{4\alpha}$ [p.112 (324)]

(426) $\not k_2 + \not k_4 = (\overset{0\leftarrow}{\not k_3} + \not k_4 - \overset{\to 0}{\not k_1}) + \not k_4 = 2\not k_4$ $+\gamma^\mu\left(\frac{k_1^\nu}{k_1k_4} - \frac{k_2^\nu}{k_2k_4}\right)$

(427) $\hat{M}_I = g^2\bar{u}_3\left\{-\left(\frac{1}{2k_1k_4}+\frac{1}{k_2k_4}\right)k_4^\mu\gamma^\nu + \left(\frac{1}{2k_1k_4}+\frac{1}{k_2k_4}\right)\not k_4\, g^{\mu\nu} - \frac{i\varepsilon^{\mu\nu\alpha\beta}k_{4\alpha}\gamma_\beta\gamma_5}{2k_1k_4}\right\}v_1\varepsilon_{2\mu}\varepsilon^*_{4\nu}$

(428) $\hat{M}_{\mathrm{I}} = g^2\left\{\left(\frac{1}{k_2k_4}+\frac{1}{2k_1k_4}\right)[k_4\cdot J\,\varepsilon_2\cdot\varepsilon_4^* - k_4\cdot\varepsilon_2\,J\cdot\varepsilon_4^*] + \left(\frac{k_1\cdot\varepsilon_4^*}{k_1k_4}-\frac{k_2\cdot\varepsilon_4^*}{k_2k_4}\right)J\cdot\varepsilon_2 - i\frac{[\varepsilon_2,\varepsilon_4^*,k_4,J_5]}{2k_1k_4}\right\}$

(429) $(J^\mu,\ J_5^\mu) \equiv \bar{u}(k_3,\lambda_3)\,(\gamma^\mu,\ \gamma^\mu\gamma_5)\,v(k_1,\lambda_1)$

(430) $[a,b,c,d] \equiv \varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma}\,a^\mu b^\nu c^\rho d^\sigma$

全く同様に

(431) $\hat{M}_{\mathrm{II}} = g^2\left\{\left(\frac{1}{2k_3k_4}-\frac{1}{k_2k_4}\right)[k_4\cdot J\,\varepsilon_2\cdot\varepsilon_4^* - k_4\cdot\varepsilon_2\,J\cdot\varepsilon_4^*] + \left(\frac{k_2\cdot\varepsilon_4^*}{k_2k_4}-\frac{k_3\cdot\varepsilon_4^*}{k_3k_4}\right)J\cdot\varepsilon_2 + i\frac{[\varepsilon_2,\varepsilon_4^*,k_4,J_5]}{2k_3k_4}\right\}$

ここで J^μ, J_5^μ は (379a) と同じで

(432) $(\gamma^\mu,\ J_5^\mu)_\lambda = \bar{u}(k_3,\lambda)\,(\gamma^\mu,\ \gamma^\mu\gamma_5)\,u(k_1,\lambda) = (1,\lambda)\,J_\lambda^\mu$; $J_\lambda^\mu = (399a)$

(433) $\varepsilon_2^\mu = \varepsilon(k_2,\lambda_2)^\mu = \frac{1}{\sqrt{2}}\,(0,\ \lambda_2,\ -i,\ 0)$; (333b)

$\varepsilon_4^{\mu *} = \varepsilon(k_4,\lambda_4)^{\mu *} = \frac{1}{\sqrt{2}}\,(0,-\lambda_4\cos\theta,\ i,\ \lambda_4\sin\theta)^*$; (332) $\theta\to\pi-\theta$, $\phi=\pi$

$= \frac{1}{\sqrt{2}}\,(0,-\lambda_4\cos\theta,\ -i,\ \lambda_4\sin\theta)$

$k_1^\mu \sim k_4^\mu$ は (331)。従って

(434) $\varepsilon_2\cdot\varepsilon_4^* = \frac{1}{2}\,[0-\lambda_2(-\lambda_4)\cos\theta-(-i)(-i)-0] = \frac{1}{2}\,(1+\lambda_2\lambda_4\cos\theta)$

$k_1\cdot\varepsilon_4^* = \frac{E}{\sqrt{2}}\,(-\lambda_4\sin\theta)$

$k_2\cdot\varepsilon_4^* = \frac{E}{\sqrt{2}}\,(+\lambda_4\sin\theta)$

$k_3\cdot\varepsilon_4^* = \frac{E}{\sqrt{2}}\,\lambda_4(\sin\theta\cos\theta-\cos\theta\sin\theta) = 0$; $k_3^\mu \sim n^\mu$ は HELASのゲージベクトル.

$k_4\cdot\varepsilon_2 = \frac{E}{\sqrt{2}}\,\lambda_2\sin\theta$

(435) $k_4 \cdot J = 2E^2\left(\cos\frac{\theta}{2} + \sin\theta\sin\frac{\theta}{2} + \cos\theta\cos\frac{\theta}{2}\right) = 2E^2\cos\frac{\theta}{2}\left(1 + 2\sin^2\frac{\theta}{2} + \cos\theta\right) = 4E^2\cos\frac{\theta}{2}$

$$\varepsilon_2 \cdot J = \sqrt{2}E\left(-\lambda_2\sin\frac{\theta}{2} + i\left(i\lambda\sin\frac{\theta}{2}\right)\right) = -\sqrt{2}E(\lambda+\lambda_2)\sin\frac{\theta}{2} = -2\sqrt{2}E\sin\frac{\theta}{2}\,\lambda\delta_{\lambda\lambda_2}$$

$$\begin{aligned}\varepsilon_4^* \cdot J &= \sqrt{2}E\left(\lambda_4\cos\theta\sin\frac{\theta}{2} + i\left(i\lambda\sin\frac{\theta}{2}\right) - \lambda_4\sin\theta\cos\frac{\theta}{2}\right)\\ &= \sqrt{2}E\sin\frac{\theta}{2}\left(\lambda_4\cos\theta - \lambda_4 2\cos^2\frac{\theta}{2} - \lambda\right)\\ &= -\sqrt{2}E(\lambda+\lambda_4)\sin\frac{\theta}{2}\\ &= -2\sqrt{2}E\sin\frac{\theta}{2}\,\lambda\delta_{\lambda\lambda_4}\end{aligned}$$

(436) $[\varepsilon_2, \varepsilon_4^*, k_4, J_5] = \frac{1}{\sqrt{2}}\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}\cdot E\cdot 2E\lambda \begin{vmatrix} 0 & \lambda_2 & -i & 0 \\ 0 & -\lambda_4\cos\theta & -i & \lambda_4\sin\theta \\ 1 & -\sin\theta & 0 & -\cos\theta \\ \cos\frac{\theta}{2} & \sin\frac{\theta}{2} & i\lambda\sin\frac{\theta}{2} & \cos\frac{\theta}{2} \end{vmatrix}$

$$= E^2\lambda\left\{\lambda_2\varepsilon_{1023}\begin{vmatrix} 0 & -i & \lambda_4\sin\theta \\ 1 & 0 & -\cos\theta \\ \cos\frac{\theta}{2} & i\lambda\sin\frac{\theta}{2} & \cos\frac{\theta}{2}\end{vmatrix} - i\varepsilon_{2013}\begin{vmatrix} 0 & -\lambda_4\cos\theta & \lambda_4\sin\theta \\ 1 & -\sin\theta & -\cos\theta \\ \cos\frac{\theta}{2} & \sin\frac{\theta}{2} & \cos\frac{\theta}{2}\end{vmatrix}\right\}$$

$$\begin{aligned}&= E^2\lambda\left\{-\lambda_2\left[-i\left(-\cos\theta\cos\frac{\theta}{2} - \cos\frac{\theta}{2}\right) + \lambda_4\sin\theta\left(i\lambda\sin\frac{\theta}{2}\right)\right]\right.\\ &\qquad \left. - i\left[-\lambda_4\cos\theta\left(-\cos\theta\cos\frac{\theta}{2} - \cos\frac{\theta}{2}\right) + \lambda_4\sin\theta\left(\sin\frac{\theta}{2} + \sin\theta\cos\frac{\theta}{2}\right)\right]\right\}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}&= -iE^2\lambda\left\{\lambda_2\left[\cos\frac{\theta}{2}(1+\cos\theta) + \lambda\lambda_4\cos\frac{\theta}{2}\,2\sin^2\frac{\theta}{2}\right]\right.\\ &\qquad \left. + \lambda_4\cos\frac{\theta}{2}\cos\theta(1+\cos\theta) + \lambda_4\cos\frac{\theta}{2}\left[2\sin^2\frac{\theta}{2} + \sin^2\theta\right]\right\}\end{aligned}$$

$$= -iE^2\lambda\cos\frac{\theta}{2}\left\{\lambda_2\left[1+\cos\theta + \lambda\lambda_4(1-\cos\theta)\right] + \lambda_4\left[\cancel{\cos\theta} + \cos^2\theta + 1 - \cancel{\cos\theta} + \sin^2\theta\right]\right\}$$

$$= -iE^2\cos\frac{\theta}{2}\left[\lambda\lambda_2(1+\cos\theta) + \lambda_2\lambda_4(1-\cos\theta) + 2\lambda\lambda_4\right]$$

QCD for Collider Physics VII

前回の講義中、板書で次の三点について説明をしました。

① QCDの $qq' \to qq'$ 散乱振幅と、EWの $\nu q \to \ell q'$ 振幅の関係。

② t-channel Vector Boson (g, γ, W, Z) 交換過程の高エネルギー極限。

③ $uu \to uu$ 散乱の干渉項のカラー因子が $-\frac{1}{N}$ であることの説明。

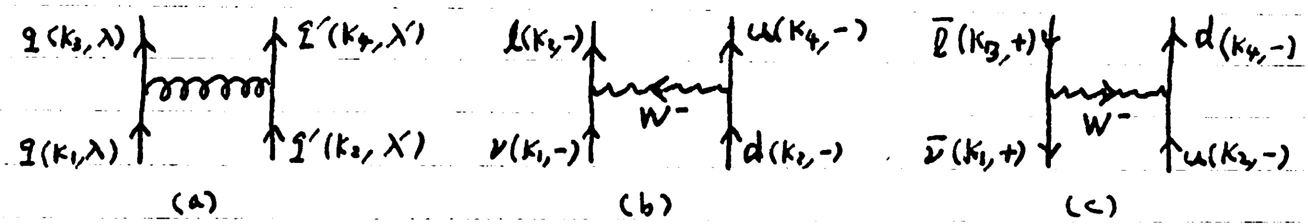
上記三点はいずれも重要事項ですので、ここで復習をしておきます。

まず QCDの $qq' \to qq'$ 散乱振幅(カラー因子を除いたもの)は p.137 (400):

$$(400) \quad \hat{M}_{\lambda\lambda'} = g^2 \frac{s}{-t} \times \begin{cases} 2 & \cdots \ \lambda = \lambda' \quad (\lambda_1 = \lambda_2) \\ 1 + \cos\theta & \cdots \ \lambda = -\lambda' \quad (\lambda_1 = -\lambda_2) \end{cases}$$

となりました。この振幅と、$\nu d \to \ell u$, $\bar{\nu} u \to \bar{\ell} d$ を比較します。

(437)



W は左巻き粒子と右巻き反粒子にしか結合しないので、(400)から直ちに

$$(438) \quad \begin{cases} M(\nu d \to \ell u)_{--} = \left(\frac{g_W}{\sqrt{2}}\right)^2 \cdot \frac{s}{m_W^2 - t} \cdot 2 & ;\ (400)\text{式で } \lambda = \lambda' = - \\ M(\bar{\nu} u \to \bar{\ell} d)_{+-} = \left(\frac{g_W}{\sqrt{2}}\right)^2 \cdot \frac{s}{m_W^2 - t} \cdot (1 + \cos\theta) & ;\ (400)\text{式で } \lambda = +,\ \lambda' = - \end{cases}$$

と書き下すことができます。DISでは $-t = Q^2$ を用いることが多いです。

$g \to g_W/\sqrt{2}$ は分かりますか? 次の式を暗記しておいてください。

(439) $$D_\mu^{SM} = \partial_\mu + igT^aA_\mu^a + ig_WT^iW_\mu^i + ig_Y Y B_\mu$$

$$= \partial_\mu + igT^aA_\mu^a + ig_W(T^1W_\mu^1 + T^2W_\mu^2) + ig_WT^3W_\mu^3 + ig_Y Y B_\mu$$

$$= \partial_\mu + igT^aA_\mu^a + i\frac{g_W}{\sqrt{2}}(T^+W_\mu^+ + T^-W_\mu^-) + ig_WT^3(\cos\theta_W Z_\mu + \sin\theta_W A_\mu)$$
$$+ ig_Y Y(-\sin\theta_W Z_\mu + \cos\theta_W A_\mu)$$

$$= \partial_\mu + igT^aA_\mu^a + i\frac{g_W}{\sqrt{2}}(T^+W_\mu^+ + T^-W_\mu^-) + ig_Z(T^3 - Q\sin^2\theta_W)Z_\mu + ieQA_\mu$$

上の式の流れを暗記するのはとても簡単で下のルールとセットで覚えてください。

(440) $T^i = \frac{\sigma^i}{2}$ $(i=1,2,3)$ $\Rightarrow \begin{cases} T^\pm = T^1 \pm iT^2 \Rightarrow T^+ = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},\ T^- = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \\ T^3 = \begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ 0 & -1/2 \end{pmatrix} \end{cases}$

$W_\mu^\pm = \frac{W_\mu^1 \mp iW_\mu^2}{\sqrt{2}}$ (複号の順序に注意. $T^+W_\mu^+ + T^-W_\mu^-$ で荷電定義)

$Q = T^3 + Y$ ($Y = -\frac{1}{2}$ for $\binom{\nu_L}{\ell_L}$, $\frac{1}{6}$ for $\binom{u_L}{d_L}$, $Y = Q_f$ for f_R)

$g_Z = g_W/\cos\theta_W = \sqrt{g_W^2 + g_Y^2}$ $\begin{pmatrix} W_\mu^3 \\ B_\mu \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta_W & \sin\theta_W \\ -\sin\theta_W & \cos\theta_W \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Z_\mu \\ A_\mu \end{pmatrix}$

$e = g_W \sin\theta_W$

断面積は

(441a) $$d\hat{\sigma}(\nu d \to \ell u) = \frac{1}{2\hat{s}} \cdot \frac{1}{2} \left| \frac{g_W^2}{2} \frac{2\hat{s}}{m_W^2 - \hat{t}} \right|^2 \frac{1}{8\pi} \cdot \frac{d\cos\hat{\theta}}{2}$$
$$= \frac{g_W^4}{32\pi\hat{s}} \left| \frac{\hat{s}}{m_W^2 - \hat{t}} \right|^2 \frac{d\cos\hat{\theta}}{2}$$

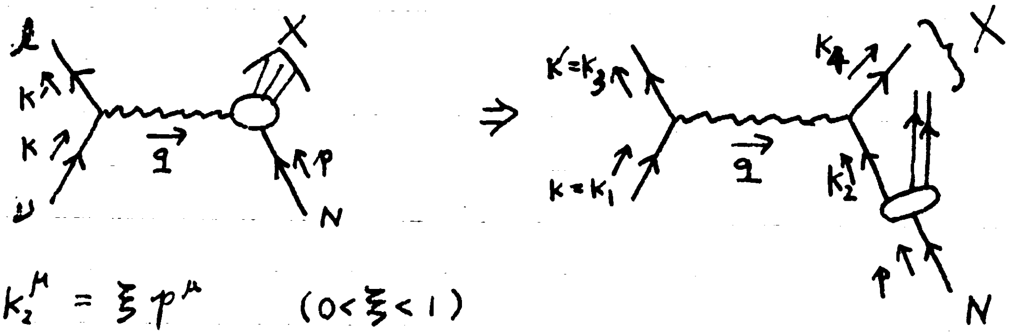
(441b) $$d\hat{\sigma}(\bar{\nu} u \to \bar{\ell} d) = \frac{g_W^4}{32\pi\hat{s}} \left| \frac{\hat{s}}{m_W^2 - \hat{t}} \right|^2 \left(\frac{1 + \cos\hat{\theta}}{2} \right)^2 \frac{d\cos\hat{\theta}}{2}$$

ここで、^ は $\nu + q$ 衝突の重心系の量です。$\cos\hat{\theta}$ を不変量で表すと、

(442) $$y=\frac{qP}{kP}=\frac{(k_1-k_3)\cdot k_2}{k_1 k_2}=1-\frac{k_3\cdot k_2}{k_1\cdot k_2}=1-\frac{\hat{E}^2(1+\cos\hat{\theta})}{\hat{E}^2(1+1)}=\frac{1-\cos\hat{\theta}}{2}$$

ここで、パートン模型のゴマカシ

(443)



$$k_2^\mu=\xi p^\mu \qquad (0<\xi<1)$$

これがゴマカシなのは

(444) $$\begin{cases} p^2=m_N^2\sim 1\,\mathrm{GeV}^2 \text{ なのに } k_2^2=0 \text{（質量ゼロの } u, d, s \text{ クォーク、グルオン）} \\ \langle|k_T|\rangle\sim\frac{1}{\langle R\rangle_N}=\Lambda\sim(200\text{-}300)\mathrm{MeV} \text{ を無視して } |k_T|=0, \ k\,/\!/\,P \end{cases}$$

要するに核子の質量（$m_N\sim 1\mathrm{GeV}$）、核子の拡がりが無限大でないこと（$\frac{1}{\langle R\rangle_N}\sim\Lambda$）を無視するのがパートン模型です。このゴマカシは関連していて、且つ、今でも（私には）良く理解できない部分です。こんなゴマカシが根幹にあるにもかかわらず、パートン描像による摂動QCDの予言が精密科学になりうる（輻射補正を含めた実験との比較が可能と）のは、因子化定理によって、全てのゴマカシが観測量（分布関数や破砕関数等）に因子化される（繰り込まれる）からです。この点については今後の講義でくり返し例証していこうと思います。

ところで、(442)式を target の静止系 $p^\mu = (m_N, 0, 0, 0)$ で評価すると

(445) $$y = \frac{q \cdot p}{k \cdot p} = \frac{(E - E') \cdot m_N}{E \cdot m_N} = \frac{E - E'}{E}$$

$y = 0$ のときが弾性散乱（散乱粒子のエネルギーが不変）ですから、$y > 0$ は非弾性度を測ります。パートン模型では、この非弾性度が、(442)式のように、νq 散乱の散乱角度によって定まります。$\cos\theta = 1$（前方散乱）で $y = 0$（弾性散乱）ですから、分かったような（⇐楽天家）分からないような（弾性散乱だって有限角度に散乱する）ですね。実際、弾性散乱は、ここまでに説明したような［(443)の図で表されるような］パートン模型では記述されません。

パートンの運動量比 ξ (443) も、不変量で表わせて、

(446) $$k_4^2 = (q + k_2)^2 = (q + \xi p)^2 = q^2 + 2\xi p \cdot q + \xi^2 p^2 = 0$$

ここで、パートン模型のゴマカシ(444)をもう一度使って（$p^2 = 0$）：

(447) $$\xi = \frac{-q^2}{2p \cdot q} \equiv x$$

右辺の不変量を Bjorken の x、(443)式の ξ を Feynman の運動量比と呼ぶことが多いです。$x = \frac{-q^2}{2p \cdot q}$ は観測量、ξ はパートン模型のパラメータです。

核子 N の運動量の内 ξ $(0 < \xi < 1)$ を担うパートンの分布を

(448) $$D_{a/N}(\xi) \qquad [a = q, \bar{q}, g]$$

2005. 6. 11

として、核子Nを、核子の運動量Pと同じ向きのパートンの束に置き換えます。分布関数は、パートンの束のエネルギーの総和が核子の運動量に一致する

$$(449)\quad \sum_{a=u,d,s,\bar{u},\bar{d},\bar{s},g} \int_0^1 d\xi \; \xi D_{a/N}(\xi) = 1$$

条件で規格化されます。摂動QCDで厳密に定義された分布関数はスケール、Q^2、に対数的に依存しますが、(449)の和則はQ^2によらずに成立します(そのように定義できます)。大ざっぱに、低Q^2 ($Q^2 \sim 1\,\mathrm{GeV}^2$)では $N=p,n$ のアイソスピンを決める荷(valence)クォーク, u, d の寄与が大きく、高Q^2 ($Q^2 \gtrsim 100\,\mathrm{GeV}^2$)ではグルオンの寄与が半分以上になります。

分布関数(PDF = Parton Density Function)を用いると $\nu N \to \ell X$, $\bar{\nu} N \to \bar{\ell} X$ の断面積は次の様に表わされます。

$$(450)\quad \begin{cases} d\sigma(\nu N \to \ell X) = \sum_a \int_0^1 d\xi \; D_{a/N}(\xi) \quad d\hat{\sigma}(\nu a \to \ell b) \\ d\bar{\sigma}(\bar{\nu} N \to \bar{\ell} X) = \sum_a \int_0^1 d\xi \; D_{a/N}(\xi) \quad d\hat{\sigma}(\bar{\nu} a \to \bar{\ell} b) \end{cases}$$

(442), (443), (449) より

$$(451)\quad \frac{d\cos\hat{\theta}}{2} = dy \;, \quad 1+\frac{\cos\hat{\theta}}{2} = 1-y \;, \quad \hat{s} = (k_1+k_2)^2 = 2k_1k_2 = 2k_1P\xi \approx s\xi$$

$$\delta(\xi - x)\,dx = 1 \;, \qquad \hat{t} = (k_1-k_3)^2 = (k-k')^2 = q^2 = -Q^2$$

を代入し、f_L と $\bar{f}_R$ だけが W と結合することに注意すると、(450) に (441)式と(451)を使って

(452) $$d\sigma(\nu N\to \ell X)=\frac{g_W^4\, s}{32\pi(m_W^2+Q^2)^2}\left\{D_{d/N}(x)+D_{s/N}(x)+(1-y)^2\left[D_{\bar{u}/N}(x)\right]\right\}\times dx\,dy$$

$$d\sigma(\bar{\nu} N\to \bar{\ell} X)=\frac{g_W^4\, s}{32\pi(m_W^2+Q^2)^2}\left\{D_{\bar{d}/N}(x)+D_{\bar{s}/N}(x)+(1-y)^2\left[D_{u/N}(x)\right]\right\}\times dx\,dy$$

低エネルギー（$Q^2\ll m_W^2$）では、断面積はsに比例、x依存性はパートンのエネルギー比分布（$xD_{q/N}(x)$）、y依存性はクォークと反クォークを区別する。このy依存性が$ff'\to ff'$のヘリシティー振幅(400)のヘリシティー依存性を起源とするわけです。

又、低Q^2では、反クォークの分布は小さいので、全断面積は価クォークのuとdの寄与で近似され、アイソスピンがゼロの核（A=2Z核）では

(453) $$\sigma(\nu N\to \ell X)\sim 3\,\sigma(\bar{\nu} N\to \bar{\ell} X) \qquad \cdots\ A=2Z\text{核}\ (\#p=\#n)$$

が成立します。$\int_0^1(1-y)^2dy=\frac{1}{3}=\int_{-1}^{1}\left(\frac{1+\cos\hat{\theta}}{2}\right)^2 d\cos\hat{\theta}$ の結果です。

強い相互作用によって(400)式のヘリシティー依存性が顕わになる例をあげましたが、次は、t-channelにVector Boson（g,γ,Z,W）を交換する過程に共通の特徴、全断面積の「一次発散」についての解説をまとめます。簡単のため(400)式の$\lambda=\lambda'$の場合を例に使います。

(453) $$\hat{M}_{\lambda\lambda}=2g^2\frac{\hat{s}}{-\hat{t}}=\frac{4g^2}{1-\cos\hat{\theta}} \qquad ;\ \hat{t}=(k_1-k_3)^2=-2k_1\cdot k_3=-2\hat{E}^2(1-\cos\hat{\theta})$$

$$\Rightarrow \frac{d\hat{\sigma}}{d\cos\hat{\theta}}=\frac{2}{9}\cdot\frac{4\pi\alpha_s^2}{\hat{s}}\cdot\frac{1}{(1-\cos\hat{\theta})^2} \qquad ;\ (402)\text{式の第一項}$$

ここで $-1<\cos\theta<1$ の積分が一次発散をすることに注目して下さい。

(454) $$\int_{-1}^{1}\frac{d\hat{\sigma}}{d\cos\hat{\theta}}d\cos\hat{\theta}\sim\int_{-1}^{1}\frac{d\cos\hat{\theta}}{(1-\cos\hat{\theta})^2}=\left[+\frac{1}{1-\cos\hat{\theta}}\right]_{-1}^{1}\sim\frac{1}{0}$$

この一次発散により、ヴェクトルボゾンを t-channel に交換する過程の全断面積は横運動量のカットオフの値によって定まり、$\hat{s}\to\infty$ で減少しない。$q\bar{q}\to q\bar{q}'$ を例に、計算をしてみましょう。終パートンの横運動量は

(455) $$p_T=\hat{E}\sin\hat{\theta}\quad\Rightarrow\quad p_T^2=\hat{E}^2\sin^2\hat{\theta}=\frac{\hat{s}}{4}\sin^2\hat{\theta}$$

$$dp_T^2=\frac{\hat{s}}{4}d(1-\cos^2\hat{\theta})=\frac{\hat{s}}{2}\cos\hat{\theta}\,d\cos\hat{\theta}$$

(456) $$\frac{d\hat{\sigma}}{dp_T^2}=\frac{2}{\hat{s}\cos\hat{\theta}}\frac{d\hat{\sigma}}{d\cos\hat{\theta}}\Big|_{\cos\hat{\theta}=\pm\sqrt{1-4p_T^2/\hat{s}}}\qquad\leftarrow 2\text{点あることに注意.}$$

$$=\frac{2}{\hat{s}\sqrt{1-4p_T^2/\hat{s}}}\frac{d\hat{\sigma}}{d\cos\hat{\theta}}\Big|_{\cos\hat{\theta}=\pm\sqrt{1-4p_T^2/\hat{s}}}$$

Jacobian $1/\sqrt{1-4p_T^2/\hat{s}}$ のために $d\hat{\sigma}/dp_T^2$ を直接積分するのが難しいので、次の様に計算する。

(457) $$\hat{\sigma}(p_T>\Lambda)=\int_{-1}^{1}d\cos\hat{\theta}\frac{d\hat{\sigma}}{d\cos\hat{\theta}}\Theta\left(\frac{\hat{s}}{4}\sin^2\hat{\theta}-\Lambda^2\right)$$

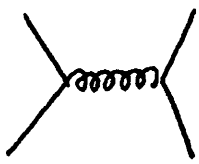
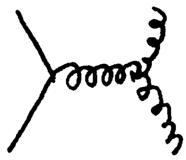
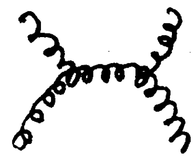
$$=\int_{-1}^{1}d\cos\hat{\theta}\frac{d\hat{\sigma}}{d\cos\hat{\theta}}\Theta\left(1-\frac{4\Lambda^2}{s}-\cos^2\hat{\theta}\right)$$

$$=\int_{-\sqrt{1-4\Lambda^2/\hat{s}}}^{\sqrt{1-4\Lambda^2/\hat{s}}}d\cos\hat{\theta}\frac{d\hat{\sigma}}{d\cos\hat{\theta}}$$

$$=\frac{2}{9}\cdot\frac{4\pi\alpha_s^2}{\hat{s}}\int_{-\sqrt{1-4\Lambda^2/\hat{s}}}^{\sqrt{1-4\Lambda^2/\hat{s}}}d\cos\hat{\theta}\frac{1}{(1-\cos\hat{\theta})^2}$$

(458)
$$\begin{aligned}
\hat\sigma(p_T>\Lambda) &= \frac{2}{9}\cdot\frac{4\pi\alpha_s^2}{\hat s}\left[+\frac{1}{1-\cos\hat\theta}\right]_{-\sqrt{1-4\Lambda^2/\hat s}}^{\sqrt{1-4\Lambda^2/\hat s}} \\
&= \frac{2}{9}\frac{4\pi\alpha_s^2}{\hat s}\cdot\left[\frac{1}{1-\sqrt{1-4\Lambda^2/\hat s}}-\frac{1}{1+\sqrt{1-4\Lambda^2/\hat s}}\right] \\
&= \frac{2}{9}\cdot\frac{4\pi\alpha_s^2}{\hat s}\cdot\frac{2\sqrt{1-4\Lambda^2/\hat s}}{1-(1-4\Lambda^2/\hat s)} \\
&= \frac{2}{9}\cdot\frac{4\pi\alpha_s^2}{\hat s}\cdot\frac{\hat s}{2\Lambda^2}\left(1-\frac{2\Lambda^2}{\hat s}+\cdots\right) \\
&= \frac{2}{9}\cdot\frac{2\pi\alpha_s^2}{\Lambda^2}\cdot\left(1-\frac{2\Lambda^2}{\hat s}+\cdots\right)
\end{aligned}$$

上の導出で、一次発散項のカットオフ積分が $\frac{\hat s}{\Lambda^2}$ の振る舞いをするので、断面積の $\frac{1}{\hat s}$ 的振る舞いが、$\frac{1}{\Lambda^2}$ の定数に変化することを良く理解しておいて下さい。又、$\sqrt{\hat s}=2\Lambda$ がしきい値であるにもかかわらず、$\sqrt{\hat s}=4\Lambda$ ではすでに漸近的断面積の $\frac{7}{8}$ に達していることも重要です。パートンジェット生成の断面積は $\sqrt{\hat s}>4p_T$ で $\hat s$ にはほとんど依存しなくなってしまいます。これが、三過程

(459) $qq'\to qq'$  $qg\to qg$  $gg\to gg$ 

の断面積が、他の素過程よりもずっと大きい理由です。

この三過程の断面積は、有限部分の振る舞いや、カラー因子等が違いますが、漸近式 (458) を使って、TevatronやLHCでのジェット生成の全断面積を評価してみましょう。

正確な計算は皆さんが後で自分ですることができますから、ここでは私が、例えば飛行機の中で紙とペンだけで評価する方法を説明しましょう。まずは、クォークとグルオンの区別も面倒なので、全てのパートンの分布関数の和を評価します。

(460) $$D(x) = \sum_{u,\bar{u},d,\bar{d},s,\bar{s},g} D_{q/N}(x)$$

この分布関数の規格化はエネルギー保存則

(461) $$\int_0^1 dx \; x D(x) = 1$$

です。D(x)の形ですが、次の形が経験則として便利です。

(462) $$D(x) = N\frac{(1-x)^n}{x}$$

$x \to 0$ での $1/x$ 分布は、後で出て来るグルオン輻射の分布で、全ての分布に共通です。$x \to 1$ の $(1-x)^n$ のベキは、核子のエネルギー全てをパートン1つが担うこと~~の~~の難しさを計る量で、定スケールでは陽子中の u について $n=3$、d について $n=4$、g について $n=5$、$\bar{u},\bar{d},s,\bar{s}$ について $n=7$ という評価があります。$D_{d/p}(x)$ 以外は次のルール

(463) $$n = 2\times(\text{ゼロ運動量をもつべき最少パートン数}) - 1$$

です。陽子中の d-クォークの分布に関しては「u-クォーク2ヶを共にゼロ運動量にするのがより困難だ」とのもっともらしい説明があります。全て、

全く信頼できない説明ですが、どういうわけか、観測値の定性的な傾向を正しく再現します。ここでは面倒なので、全パートン分布を(462)式の形に仮定します。すると(461)より

(464) $$D(x) = (n+1)\frac{(1-x)^n}{x}$$

で規格化まで定まってしまいます。全断面積は

(465) $$\sigma(p_T > \Lambda) = \int_0^1 dx_1 \int_0^1 dx_2\, D(x_1) D(x_2)\, \hat{\sigma}(\hat{s} = s x_1 x_2 ; p_T > \Lambda)$$

$\hat{\sigma}(\hat{s}; p_T > \Lambda)$ の $\hat{s}$ 依存性(458)式は面倒ですから

(466) $$\hat{\sigma}(\hat{s}; p_T > \Lambda) = \frac{2}{9}\cdot\frac{4\pi\alpha_s^2}{\Lambda^2}\ \theta(\hat{s} - 16\Lambda^2)$$

((458)は(402)式の第一項、LLとRRだけなので2倍しました。)

と近似します。$dx_1 dx_2$ 積分は次の変数を使うと便利です。

(467) $$\begin{cases} x_1 = \sqrt{\tau}\, e^{y} \\ x_2 = \sqrt{\tau}\, e^{-y} \end{cases} \qquad \begin{cases} \tau = x_1 x_2 = \dfrac{\hat{s}}{s} \\ y = \dfrac{1}{2}\ln\dfrac{x_1}{x_2} \end{cases}$$

$$dx_1\, dx_2 = \frac{\partial(x_1, x_2)}{\partial(\tau, y)}\, d\tau\, dy = d\tau\, dy$$

Jacobian = 1 は check して下さいね。$\tau = \hat{s}/s$ はパートン衝突系の $\hat{s}$ と衝突ハドロン系の s との比、y はパートン対系の rapidity です。

(468) $$y = \frac{1}{2}\ln\frac{(E_1+E_2)+(p_{1z}+p_{2z})}{(E_1+E_2)-(p_{1z}+p_{2z})} = \frac{1}{2}\ln\frac{(x_1+x_2)+(x_1-x_2)}{(x_1+x_2)-(x_1-x_2)} = \frac{1}{2}\ln\frac{x_1}{x_2}$$

新しい変数 τ と y を使うと、(465)は

(469) $$\sigma(p_T>\Lambda) = \int_{16\Lambda^2/s}^{1} d\tau \int_{\ln\sqrt{\tau}}^{-\ln\sqrt{\tau}} dy\, D(\sqrt{\tau}e^{y}) D(\sqrt{\tau}e^{-y})\ \hat{\sigma}(\hat{s}=s\tau;\, p_T>\Lambda)$$

$$= \int_{16\Lambda^2/s}^{1} d\tau\ \mathcal{L}(\tau)\ \hat{\sigma}(\hat{s}=s\tau;\, p_T>\Lambda)$$

ここで $\tau = x_1x_2 = \hat{s}/s$ を定めたときのパートン分布関数の対のたたみ込み積分

(470) $$\mathcal{L}(\tau) = \int_{\ln\sqrt{\tau}}^{-\ln\sqrt{\tau}} dy\ D(\sqrt{\tau}e^{y})\, D(\sqrt{\tau}e^{-y})$$

をパートン対の「有効ルミノシティー分布密度」と呼びます。摂動QCDでもこの密度関数を定義することができて、TeVatronやLHCでのこの密度関数のだいたいの大きさと形とをしっかりと理解・記憶することが、コライダーの物理の現象論の始めの一歩です。私のいい加減な分布(469)の場合

(471) $$\mathcal{L}(\tau) = 2\int_0^{-\ln\sqrt{\tau}} dy\ (n+1)^2 \frac{(1-\sqrt{\tau}e^{y})^n\,(1-\sqrt{\tau}e^{-y})^n}{\sqrt{\tau}e^{y}\cdot\sqrt{\tau}e^{-y}}$$

$$= \frac{2(n+1)^2}{\tau}\int_0^{-\ln\sqrt{\tau}} dy\ \left(1+\tau-\sqrt{\tau}(e^{y}+e^{-y})\right)^n$$

これはきっと解析的に積分できますが、$n=3$ のときに計算させて下さい。

(472) $$\mathcal{L}(\tau)^{n=3} = \frac{32}{\tau}\int_0^{-\ln\sqrt{\tau}} dy \left\{(1+\tau)^3 - 3(1+\tau)^2\sqrt{\tau}(e^{y}+e^{-y}) + 3(1+\tau)\tau(e^{y}+e^{-y})^2 - \tau\sqrt{\tau}(e^{y}+e^{-y})^3\right\}$$

$$= \frac{32}{\tau}\int_0^{-\ln\sqrt{\tau}} dy \left\{(1+\tau)(1+\underset{8}{\wedge}\tau+\tau^2) - 3\sqrt{\tau}(1+\underset{3}{\wedge}\tau+\tau^2)(e^{y}+e^{-y}) + 3\tau(1+\tau)(e^{2y}+e^{-2y}) - \tau\sqrt{\tau}(e^{3y}+e^{-3y})\right\}$$

$$(473)\quad \mathcal{L}(\tau)^{n=3} = \frac{32}{\tau}\left\{ \frac{(1+\tau)(1+8\tau+\tau^2)}{2}\ln\frac{1}{\tau} - 3\sqrt{\tau}(1+3\tau+\tau^2)\frac{1-\tau}{\sqrt{\tau}} + 3\tau(1+\tau)\frac{1-\tau^2}{2\tau} - \tau\sqrt{\tau}\,\frac{1-\tau^3}{3\tau\sqrt{\tau}} \right\}$$

$$(473a)\quad = \frac{16}{\tau}\left\{ (1+\tau)(1+8\tau+\tau^2)\ln\frac{1}{\tau} - \frac{1-\tau}{3}(11+38\tau+11\tau^2) \right\}$$

$$(473b)\quad \xrightarrow[\tau\to 0]{} \frac{16}{\tau}\left[\ln\frac{1}{\tau} - \frac{11}{3} + O\!\left(\tau\ln\frac{1}{\tau}\right) \right]$$

$$(473c)\quad \xrightarrow[\tau\to 1]{} \frac{4}{35}(1-\tau)^7 + O((1-\tau)^8)$$

上の形から、$\mathcal{L}(\tau)^{n=3}$ のだいたいの形と規格がわかります。$\tau\to1$ の振るまいは、$\int(1-x_1)^n(1-x_2)^m$ の場合 $(1-\tau)^{n+m+1}$ になります。$\tau\to0$ で $\frac{2(n+1)(m+1)}{\tau}\ln\frac{1}{\tau}$ の様に増大し、$\tau \gtrsim 0.1$ では急激に減少するわけです。この傾向は、摂動QCDの輻射補正を考慮すると更に強まります。

実は、(473)式の $\tau\to0$ の形を使って全断面積 (469) を評価しようともくろんでいたのですが、(473b)式は $\tau < e^{-\frac{11}{3}} \sim 0.026$ でないと正でないのでちょっとあぶなそうです。是非数値計算で follow して下さい。摂動QCDが使える限度として、例えば

$$(474)\quad p_T > \Lambda \approx 5\,\mathrm{GeV}$$

をとったとすると、(469)式のτ積分の下限は

$$(475)\quad \frac{16\Lambda^2}{s} = \left(\frac{4\Lambda}{\sqrt{s}}\right)^2 = \begin{cases} \left(\frac{20}{2000}\right)^2 \sim 10^{-4} & \cdots\ \text{TeVatron} \\ \left(\frac{20}{14000}\right)^2 \sim 2\times10^{-6} & \cdots\ \text{LHC} \end{cases}$$

(473b)を使ってとてもあらっぽい評価をすると[(466)式を代入]

(476)
$$\sigma(p_T>\Lambda) = \frac{2}{9}\frac{4\pi\alpha_s^2}{\Lambda^2}\int_{16\Lambda^2/s}^{1} d\tau\ \mathcal{L}(\tau)$$
$$\approx \frac{2}{9}\frac{4\pi\alpha_s^2}{\Lambda^2}\int_{16\Lambda^2/s}^{0.01} d\tau\ \frac{16}{\tau}\left[\ln\frac{1}{\tau}-\frac{11}{3}\right]$$
$$= \frac{2}{9}\frac{4\pi\alpha_s^2}{\Lambda^2}\left[-8\ln^2\tau-\frac{176}{3}\ln\tau\right]_{16\Lambda^2/s}^{0.01}$$
$$= \frac{2}{9}\frac{4\pi\alpha_s^2}{\Lambda^2}\left\{8\left(\ln^2\frac{s}{16\Lambda^2}-\ln^2 100\right)-\frac{176}{3}\ln\frac{s}{100\cdot 16\Lambda^2}\right\}$$
$$\approx \frac{2}{9}\cdot\frac{4\pi\alpha_s^2}{\Lambda^2}\times\begin{cases} 240 & \cdots \text{Tevatron} \\ 700 & \cdots \text{LHC}\end{cases}$$

これがどの位の断面積であるかを評価するために、まず

(477)
$$\frac{4\pi\alpha_s^2}{\Lambda^2} \approx \frac{4\times3\times(0.14)^2}{(5\,\mathrm{GeV})^2} \qquad \begin{cases}\pi=3\\ \alpha_s(5\,\mathrm{GeV})=0.14\end{cases}$$
$$\approx \frac{1}{10}\,\mathrm{GeV}^{-2} \qquad \frac{1}{0.2\,\mathrm{GeV}}\approx 1\,\mathrm{fm}=10^{-15}\,\mathrm{m}$$
$$\approx \frac{1}{10}\,0.4\,\mathrm{mb} \qquad \frac{1}{(0.2\,\mathrm{GeV})^2}\approx 10^{-30}\,\mathrm{m}^2=10\,\mathrm{mb}$$
$$\approx 0.04\,\mathrm{mb}$$

これを代入すると

(478)
$$\sigma(p_T>5\,\mathrm{GeV}) \sim \begin{cases} 2\ \mathrm{mb} & \cdots \text{Tevatron} \\ 7\ \mathrm{mb} & \cdots \text{LHC}\end{cases}$$

となってとても大きな断面積になることがわかります。最新のパートン分布を使って計算してみて下さい。5 GeV程度のp_Tをもったジェットは、ほとんど全てのイベントで観測されるのだろうと思います。//

ついでに、ニュートリノ・クォーク散乱の全断面積も求めておきましょう。

(441a)(441b)式で $-\hat{t} = Q^2 \ll m_W^2$ とすると、

(479a) $$\hat{\sigma}(\nu d \to \ell u) = \frac{g_W^4}{32\pi\, m_W^4}\hat{s} = \frac{G_F^2}{\pi}\hat{s}$$

$$;\ G_F = \frac{1}{\sqrt{2}v^2} = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{g_W}{2m_W}\right)^2$$

(479b) $$\hat{\sigma}(\bar{\nu} u \to \bar{\ell} d) = \frac{g_W^4}{32\pi\, m_W^4}\cdot\frac{1}{3}\cdot\hat{s} = \frac{G_F^2}{3\pi}\hat{s}$$

これは皆が知っている式ですね。$\hat{s} \gg m_W^2$ のときは QCD のグルオン交換と同様、断面積が一定になります。p_T cut-off Λ の代わりが m_W です。

(480a) $$\hat{\sigma}(\nu d \to \ell u) = \int_{-1}^{1} d\cos\theta\, \frac{g_W^4}{64\pi\hat{s}}\left(\frac{\hat{s}}{m_W^2 + \hat{s}\frac{1-\cos\hat{\theta}}{2}}\right)^2$$

$$= \frac{g_W^4}{32\pi\hat{s}}\int_0^1 d\left(\frac{1-\cos\hat{\theta}}{2}\right)\left(\frac{1}{\left(\frac{1-\cos\hat{\theta}}{2}\right) + \frac{m_W^2}{\hat{s}}}\right)^2$$

$$= \frac{g_W^4}{32\pi\hat{s}}\left[-\frac{1}{x + \frac{m_W^2}{\hat{s}}}\right]_0^1$$

$$= \frac{g_W^4}{32\pi\hat{s}}\left[\frac{\hat{s}}{m_W^2} - \frac{\hat{s}}{\hat{s} + m_W^2}\right]$$

$$= \frac{g_W^4}{32\pi\, m_W^2}\left[1 - \frac{m_W^2}{\hat{s}}\right]$$

$$= \frac{G_F^2}{\pi}m_W^2\left[1 - \frac{m_W^2}{\hat{s}} + O\left(\left(\frac{m_W^2}{\hat{s}}\right)^2\right)\right]$$

(480b) $$\hat{\sigma}(\bar{\nu} u \to \bar{\ell} d) = \frac{g_W^4}{32\pi\hat{s}}\int_0^1 dx\left(\frac{1}{x + \frac{m_W^2}{\hat{s}}}\right)^2(1-x)^2$$

$$= \frac{g_W^4}{32\pi\hat{s}}\left[-\frac{1 + \frac{2m_W^2}{\hat{s}}}{x + \frac{m_W^2}{\hat{s}}} - 2\ln\left(x + \frac{m_W^2}{\hat{s}}\right) + 1 + \cdots\right]_0^1$$

$$= \frac{g_W^4}{32\pi\, m_W^2}\left[1 - 2\frac{m_W^2}{\hat{s}}\ln\frac{\hat{s}+m_W^2}{m_W^2} + \frac{2m_W^2}{\hat{s}} + \cdots\right]$$

$$= \frac{G_F^2}{\pi}m_W^2\left[1 - 2\frac{m_W^2}{\hat{s}}\left(\ln\frac{\hat{s}+m_W^2}{m_W^2} - 1\right) + \cdots\right]$$

高エネルギーの全断面積は ν も $\bar{\nu}$ も同じで

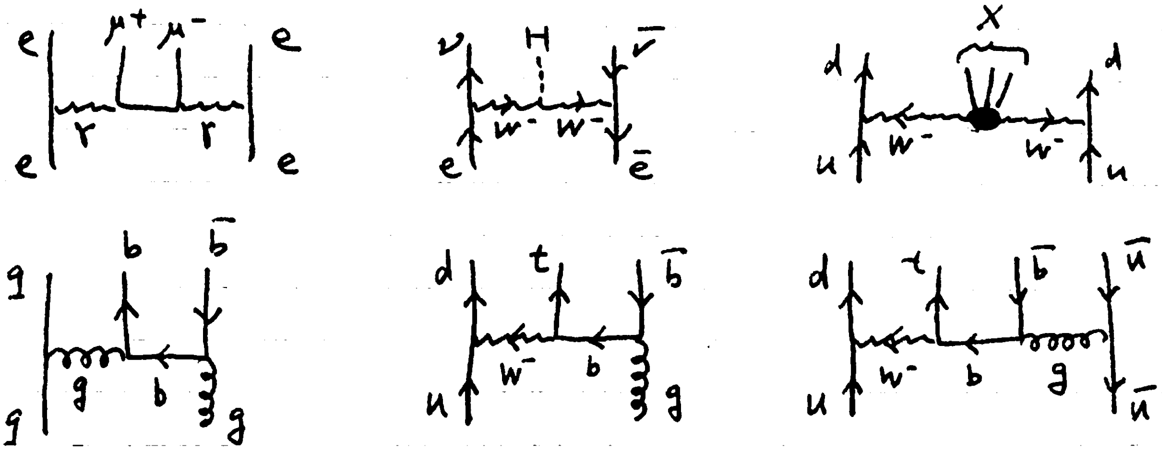
$$\frac{G_F^2}{\pi} m_W^2 \approx \frac{(10^{-5}\,\mathrm{GeV}^{-2})^2}{3}(80\,\mathrm{GeV})^2 \tag{481}$$
$$\approx 2\times 10^{-7}\ \mathrm{GeV}^{-2}$$
$$\approx 2\times 10^{-7}\times 0.4\ \mathrm{mb}$$
$$\approx 0.1\ \mathrm{nb}$$

この断面積は充分に大きく、高エネルギーニュートリノは地中で急激に減衰します。e も μ も地中で止まってしまうので、ν_τ だけが、て生成とて崩壊を繰り返しながら地球をつき抜けることができるそうです。

ω 分の積分がリニア発散するときに、断面積のエネルギー依存性の次元が変わり、高エネルギーで減衰しない断面積が得られることは大切です。

t-channel にヴェクトルボソンを交換する全ての過程に当てはまるので、~~決っ~~いくつか例をあげましょう。

(482)



振幅の結合の次数が高くても、大きな寄与を与える可能性があります。//

2005. 6. 16

qq → qq のカラー因子

(405)式の散乱振幅の干渉項の符号が、カラー因子の干渉項(318)が負であるために、フェルミ統計による負符号とかけ合わさって正になりました。p. 139 (410)-(412)です。(318)式で何故カラー因子の干渉項が負になるのかが気になったのですが、これは、カラー因子のベースを $\delta_{ki}\delta_{\ell j}$ と $\delta_{kj}\delta_{\ell i}$ にとることで明らかになります。Fierz則(314)を使うと、t-channel と u-channel の振幅のカラー因子はそれぞれ

(483) $$T^a_{ki}T^a_{\ell j} = T_F\left(\delta_{kj}\delta_{\ell i} - \frac{1}{N}\delta_{ki}\delta_{\ell j}\right)$$

$$T^b_{kj}T^b_{\ell i} = T_F\left(\delta_{ki}\delta_{\ell j} - \frac{1}{N}\delta_{kj}\delta_{\ell i}\right)$$

となります。振幅(405)は

(484) $$M = T^a_{ki}T^a_{\ell j}M(t) - T^b_{kj}T^b_{\ell i}M(u)$$

$$= T_F\delta_{kj}\delta_{\ell i}\left(M(t)+\frac{1}{N}M(u)\right) - T_F\delta_{ki}\delta_{\ell j}\left(M(u)+\frac{1}{N}M(t)\right)$$

で、干渉項の符号が変わるわけです。新しいベース

(485) $$T_F\delta_{kj}\delta_{\ell i} \quad \text{と} \quad T_F\delta_{ki}\delta_{\ell j}$$

も $N\to\infty$ で干渉しません。

(486) $$\sum_{ijk\ell}|T_F\delta_{kj}\delta_{\ell i}|^2 = \sum_{ijk\ell}|T_F\delta_{ki}\delta_{\ell j}|^2 = T_F^2N^2$$

$$\sum_{ijk\ell}|T_F\delta_{kj}\delta_{\ell i}T_F\delta_{ik}\delta_{j\ell}| = T_F^2N$$

(484)のベースで $|M|^2$ のカラー因子を計算すると、

$$(487)\quad \sum_{ijkl}|M|^2 = T_R^2 N^2\left\{\left|M(t)+\frac{1}{N}M(u)\right|^2+\left|M(u)+\frac{1}{N}M(t)\right|^2\right\}$$
$$-2T_R^2 N\,\mathrm{Re}\left[\left(M(t)+\frac{1}{N}M(u)\right)\left(M(u)+\frac{1}{N}M(t)\right)^*\right]$$
$$=\left(|M(t)|^2+|M(u)|^2\right)\left(T_R^2N^2\left(1+\frac{1}{N^2}\right)-2T_R^2N\cdot\frac{1}{N}\right)$$
$$+2\,\mathrm{Re}\left[M(t)M(u)^*\right]\left(T_R^2N^2\frac{2}{N}-T_R^2N\left(1+\frac{1}{N^2}\right)\right)$$
$$=\left(|M(t)|^2+|M(u)|^2\right)T_R^2\,(N^2-1)$$
$$+2\,\mathrm{Re}\left[M(t)M(u)^*\right]T_R^2\,\frac{N^2-1}{N}$$

少し微妙ですが、(484)式のカラーベースで、干渉項を無視した場合と同じ干渉パターンとなります。

LHCでのhigh p_T jet 生成は、highest p_T region で $uu\to uu$ が重要ですが、この干渉項の効果は結構大きいようです。(412)式で、$\hat\sigma(p_T>\Lambda)$ への寄与は干渉項は log的発散で小さいのですが、highest p_T event は $\cos\hat\theta\sim 0$ 付近が重要なことを考えると、例えば

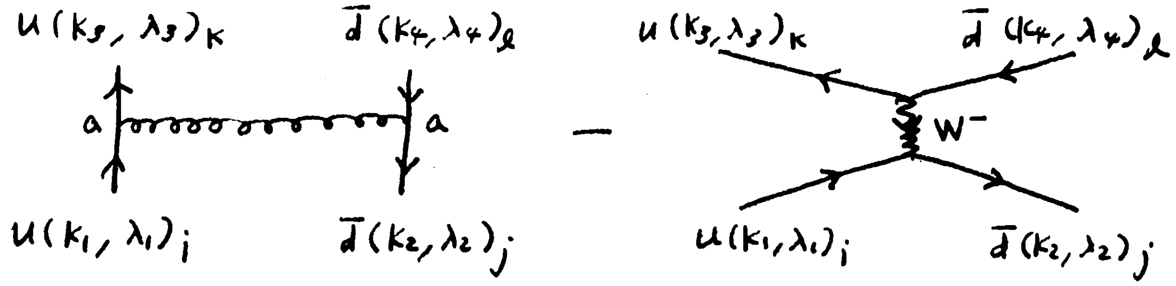
$$(488)\quad \left(\frac{d\hat\sigma^{qq\to qq}}{d\cos\hat\theta}\right)_{\cos\hat\theta=0} = \frac{2}{9}\cdot\frac{4\pi\alpha_s^2}{\hat s}\cdot\left\{\frac{5}{4}+\underbrace{\frac{1}{3}}_{\text{干渉項}}\right\}$$

ですから、干渉項によって、25%も highest p_T jet が増えるわけです。20%超の効果は、実験的に確認できるかも知れません。残念ながら、Tevatronでは $u\bar u$ 散乱が主要となり、この効果はありません。//

$u\bar{d} \to u\bar{d}$ と s-channel W^+ 生成

Tevatronで是非確認していただきたいのが、$u\bar{d} \to u\bar{d}$ 散乱での t-channel グルオン交換振幅と、s-channel W^+ 生成振幅との干渉です。

(489)



フェルミオン生成・消滅演算子の反交換による相対符号の−が書いてある。

振幅はカラー因子を顕にすると

(490)
$$
\begin{aligned}
M &= T^a_{ki} T^a_{jl} M(\hat{t}) - \delta_{ji}\delta_{kl} M(\hat{s}) \\
&= T_F\left(\delta_{kl}\delta_{ji} - \frac{1}{N}\delta_{ki}\delta_{jl}\right) M(\hat{t}) - \delta_{ji}\delta_{kl} M(\hat{s}) \\
&= \delta_{kl}\delta_{ji}\left(T_F M(\hat{t}) - M(\hat{s})\right) - \frac{T_F}{N}\delta_{ki}\delta_{jl} M(\hat{t})
\end{aligned}
$$

多分、初めのベースの方が便利なので、そちらを使うと、

(491)
$$
\begin{aligned}
\sum_{ijkl}|M|^2 &= \sum_{ijkl} T^a_{ki}T^a_{jl}T^b_{lj}T^b_{ik}\,|M(\hat{t})|^2 + \sum_{ijkl}\delta_{ji}\delta_{kl}\delta_{lk}\delta_{ij}\,|M(\hat{s})|^2 \\
&\quad - \sum_{ijkl} T^a_{ki}T^a_{jl}\,\delta_{ij}\delta_{lk}\, 2\,\mathrm{Re}[M(\hat{s})M(\hat{t})^*] \\
&= \mathrm{tr}(T^aT^b)\,\mathrm{tr}(T^aT^b)\,|M(\hat{t})|^2 + N^2|M(\hat{s})|^2 \\
&\quad - \mathrm{tr}(T^aT^a)\, 2\,\mathrm{Re}[M(\hat{s})M(\hat{t})^*] \\
&= T_F^2(N^2-1)|M(\hat{t})|^2 + N^2|M(\hat{s})|^2 - T_F(N^2-1)\,2\,\mathrm{Re}[M(\hat{s})M(\hat{t})^*]
\end{aligned}
$$

今度は干渉項のカラー因子が正のようです。$M(\hat{t})$は(395)とほとんど同じで

(492) $M(\hat{t}) = \frac{g^2}{\hat{t}} J_\lambda^\mu \cdot \bar{J}_{\lambda' \mu}$

J_λ^μ は (397a), (398a, b). $\bar{J}_{\lambda'}^\mu$ は

(493a) $\bar{J}_{\lambda'}^\mu = \bar{v}(k_2, \lambda') \gamma^\mu v(k_4 \lambda')$

(493b) $= 2E\, \chi_{-\lambda'}(k_2)^\dagger \sigma_{-\lambda'}^\mu \chi_{-\lambda'}(k_4)$

(494a) $\bar{J}_+^\mu(k_2, k_4) = 2E\, \chi_-(k_2)^\dagger \sigma_-^\mu \chi_-(k_4) = 2E(-1, 0)[1, -\vec{\sigma}]\begin{pmatrix}\cos\frac{\theta}{2} \\ \sin\frac{\theta}{2}\end{pmatrix} = 2E\left(-\cos\frac{\theta}{2}, \sin\frac{\theta}{2}, -i\sin\frac{\theta}{2}, \cos\frac{\theta}{2}\right)$

(494b) $\bar{J}_-^\mu(k_2, k_4) = 2E\, \chi_+(k_2)^\dagger \sigma_+^\mu \chi_+(k_4) = 2E(0, 1)[1, \vec{\sigma}]\begin{pmatrix}\sin\frac{\theta}{2} \\ -\cos\frac{\theta}{2}\end{pmatrix} = 2E\left(-\cos\frac{\theta}{2}, \sin\frac{\theta}{2}, i\sin\frac{\theta}{2}, \cos\frac{\theta}{2}\right)$

(495) $\bar{J}_{\lambda'}^\mu(k_2, k_4) = -2E\left(\cos\frac{\theta}{2}, -\sin\frac{\theta}{2}, \lambda' i \sin\frac{\theta}{2}, -\cos\frac{\theta}{2}\right)$

(495) と (399b) を較べると

(496) $\bar{J}_{\lambda'}^\mu(k_2, k_4) = J_{\lambda'}^\mu(k_2, k_4)$

従って (492) は (400) と全く同じ。

(497) $M(\hat{t})_{\lambda\lambda'} = g^2\left(-\frac{\hat{s}}{\hat{t}}\right) \times \begin{cases} 2 & \cdots \lambda = \lambda' \quad (\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = \lambda_4) \\ 1 + \cos\hat{\theta} & \cdots \lambda = -\lambda' \quad (\lambda_1 = -\lambda_2 = \lambda_3 = -\lambda_4) \end{cases}$

一方 s-channel W 交換振幅は (230) と同じで

(498)
$$M(s) = \frac{g_W^2}{2(\hat{s} - m_W^2 + i m_W \Gamma_W)} J_{-+}^\alpha(k_3, k_4) J_{-+}^\beta(k_1, k_2) g_{\alpha\beta}$$
$$= \frac{g_W^2}{2(\hat{s} - m_W^2 + i m_W \Gamma_W)} \underbrace{2E[0, \cos\hat{\theta}, i, -\sin\hat{\theta}]}_{(235)} \cdot \underbrace{2E[0, -1, i, 0]}_{(240)}$$
$$= \frac{g_W^2 \hat{s}}{2(\hat{s} - m_W^2 + i m_W \Gamma_W)} (1 + \cos\hat{\theta})\, \delta_{\lambda_1 -} \delta_{\lambda_2 +} \delta_{\lambda_3 -} \delta_{\lambda_4 +}$$

(497) と (498) を (491) に代入すると, そして ヘリシティーの和も実行すると.

2005. 6. 16

$$(499)\quad \sum_{spin}\sum_{color}|M|^2 = T_F^2(N^2-1)\cdot\left(\frac{2g^2}{1-\cos\hat\theta}\right)^2\left[4+(1+\cos\hat\theta)^2\right]\times 2$$
$$+N^2\left|\frac{g_W^2\,\hat s}{\hat s-m_W^2+im_W\Gamma_W}\right|^2\left(\frac{1+\cos\hat\theta}{2}\right)^2$$
$$-T_F(N^2-1)\,2\,\mathrm{Re}\left\{\frac{g_W^2\,\hat s}{\hat s-m_W^2+im_W\Gamma_W}\,\frac{1+\cos\hat\theta}{2}\cdot\frac{2g^2}{1-\cos\hat\theta}\,(1+\cos\hat\theta)\right\}$$

$$= T_F^2(N^2-1)\cdot\frac{32g^4}{(1-\cos\hat\theta)^2}\left[1+\left(\frac{1+\cos\hat\theta}{2}\right)^2\right]$$
$$+N^2\cdot\frac{g_W^4\,\hat s^2}{(s-m_W^2)^2+(m_W\Gamma_W)^2}\left(\frac{1+\cos\hat\theta}{2}\right)^2$$
$$-T_F(N^2-1)\cdot\frac{2g^2g_W^2\,\hat s(\hat s-m_W^2)}{(s-m_W^2)^2+(m_W\Gamma_W)^2}\,\frac{(1+\cos\hat\theta)^2}{1-\cos\hat\theta}$$

干渉項は従って $\hat s>m_W^2$ では負、$\hat s<m_W^2$ では正。m_{jj} 分布から m_W を評価しようとすると、$m_{jj}^{peak}<m_W$ となるはずです。逆に、この効果を無視して $m_{jj}^{peak}=m_W$ となるようにジェットのエネルギースケールを決めたとすると、全てのジェットエネルギーは系統的に過大評価されます。(499)式は是非checkして下さいね。どの程度の定量的効果があるか、教えて下さると嬉しいです。素過程の断面積は

$$(500)\quad \frac{d\hat\sigma^{u\bar d\to u\bar d}}{d\cos\hat\theta} = \frac{1}{2\hat s}\cdot\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{N^2}\sum_{spin}\sum_{color}|M|^2\ \frac{1}{8\pi}\cdot\frac{1}{2}$$
$$=\frac{T_F^2(N^2-1)}{N^2}\cdot\frac{4\pi\alpha_s^2}{\hat s}\ \frac{1}{(1-\cos\hat\theta)^2}\left[1+\left(\frac{1+\cos\hat\theta}{2}\right)^2\right]$$
$$+\ 1\ \cdot\frac{\pi\alpha_W^2}{8}\ \frac{\hat s}{(\hat s-m_W^2)^2+(m_W\Gamma_W)^2}\left(\frac{1+\cos\hat\theta}{2}\right)^2$$
$$-\frac{T_F(N^2-1)}{N^2}\cdot\frac{\pi\alpha_s\alpha_W}{4}\ \frac{\hat s-m_W^2}{(\hat s-m_W^2)^2+(m_W\Gamma_W)^2}\ \frac{(1+\cos\hat\theta)^2}{1-\cos\hat\theta}$$

//

2005. 6. 16

$gg \to gg$ (p. 141〜144 の続き)

(434)〜(436) を (428), (431) に代入すると

(501)
$$\hat{M}^{\lambda_2\lambda_4}_{I\lambda} = g^2\Big\{\Big(\frac{1}{K_2K_4}+\frac{1}{2K_1K_4}\Big)\Big[4E^2\cos\frac{\theta}{2}\cdot\frac{1+\lambda_2\lambda_4\cos\theta}{2} - \frac{E}{\sqrt{2}}\lambda_2\sin\theta\cdot(-2\sqrt{2}E\sin\frac{\theta}{2}\lambda\delta_{\lambda\lambda_4})\Big]$$
$$+\Big(\frac{\frac{E}{\sqrt{2}}(-\lambda_4\sin\theta)}{K_1\cdot K_4} - \frac{\frac{E}{\sqrt{2}}\lambda_4\sin\theta}{K_2\cdot K_4}\Big)(-2\sqrt{2}E\sin\frac{\theta}{2}\lambda\,\delta_{\lambda\lambda_2})$$
$$-i\,\frac{-iE^2\cos\frac{\theta}{2}}{2K_1\cdot K_4}\big[\lambda\lambda_2(1+\cos\theta)+\lambda_2\lambda_4(1-\cos\theta)+2\lambda\lambda_4\big]\Big\}$$

$$= g^2\Big\{\Big(\frac{1}{K_2K_4}+\frac{1}{2K_1K_4}\Big)\Big[\frac{1+\lambda_2\lambda_4\cos\theta}{2}+\frac{1-\cos\theta}{2}\lambda_2\lambda_4\delta_{\lambda\lambda_4}\Big]s\cos\frac{\theta}{2}$$
$$+\Big(\frac{1}{K_2\cdot K_4}+\frac{1}{K_1\cdot K_4}\Big)\Big[\frac{1-\cos\theta}{2}\lambda_2\lambda_4\delta_{\lambda\lambda_2}\Big]s\cos\frac{\theta}{2}$$
$$-\frac{1}{8K_1\cdot K_4}\big[\lambda\lambda_2(1+\cos\theta)+\lambda_2\lambda_4(1-\cos\theta)+2\lambda\lambda_4\big]s\cos\frac{\theta}{2}\Big\}$$

$$= g^2 s\cos\frac{\theta}{2}\Big\{\frac{1}{K_2\cdot K_4}\Big[\frac{1+\lambda_2\lambda_4\cos\theta}{2}+\frac{1-\cos\theta}{2}\lambda_2\lambda_4(\delta_{\lambda\lambda_2}+\delta_{\lambda\lambda_4})\Big]$$
$$+\frac{1}{K_1\cdot K_4}\Big[\frac{1+\lambda_2\lambda_4\cos\theta}{4}+\frac{1-\cos\theta}{4}\lambda_2\lambda_4(\delta_{\lambda\lambda_4}+2\delta_{\lambda\lambda_2})$$
$$-\frac{\lambda\lambda_2(1+\cos\theta)}{8}-\frac{\lambda_2\lambda_4(1-\cos\theta)}{8}-\frac{\lambda\lambda_4}{4}\Big]\Big\}$$

(502)
$$\hat{M}^{\lambda_2\lambda_2}_{I\lambda} = g^2 s\cos\frac{\theta}{2}\Big\{\frac{1}{K_2\cdot K_4}\Big[\frac{1+\cos\theta}{2}+\frac{1-\cos\theta}{2}2\delta_{\lambda\lambda_2}\Big]$$
$$+\frac{1}{K_1\cdot K_4}\Big[\frac{1+\cos\theta}{4}+\frac{1-\cos\theta}{4}3\delta_{\lambda\lambda_2}-\frac{\lambda\lambda_2}{8}(3+\cos\theta)-\frac{1-\cos\theta}{8}\Big]\Big\}$$

$$= g^2 s\cos\frac{\theta}{2}\Big\{\frac{1}{K_2\cdot K_4}\Big[\delta_{\lambda,-\lambda_2}\frac{1+\cos\theta}{2}+\delta_{\lambda\lambda_2}\frac{3-\cos\theta}{2}\Big]$$
$$+\frac{1}{K_1\cdot K_4}\Big[\delta_{\lambda,-\lambda_2}\frac{1+\cos\theta}{2}+\delta_{\lambda\lambda_2}\frac{1-\cos\theta}{2}\Big]\Big\}$$

(503) $$\hat{M}^{\lambda_2\lambda_2}_{\mathrm{I}\ \lambda} = 2g^2\cos\frac{\theta}{2}\left\{\delta_{\lambda,-\lambda_2}\left[\frac{1+\cos\theta}{1-\cos\theta}+1\right]+\delta_{\lambda\lambda_2}\left[\frac{3-\cos\theta}{1-\cos\theta}+\frac{1-\cos\theta}{1+\cos\theta}\right]\right\}$$
$$= 2g^2\cos\frac{\theta}{2}\left\{\delta_{\lambda,-\lambda_2}\frac{2}{1-\cos\theta}+\delta_{\lambda,\lambda_2}\frac{4}{1-\cos^2\theta}\right\}$$

(504) $$\hat{M}^{\lambda_2,-\lambda_2}_{\mathrm{I}\ \lambda} = g^2 s\cos\frac{\theta}{2}\left\{\frac{1}{k_2\cdot k_4}\left[\frac{1-\cos\theta}{2}-\frac{1-\cos\theta}{2}\right]\right.$$
$$\left.+\frac{1}{k_1\cdot k_4}\left[\frac{1-\cos\theta}{4}-\frac{1-\cos\theta}{4}(\delta_{\lambda\lambda_4}+2\delta_{\lambda\lambda_2})-\frac{\lambda\lambda_2(1+\cos\theta)}{8}+\frac{1-\cos\theta}{8}+\frac{\lambda\lambda_2}{4}\right]\right\}$$
$$=0$$

(505) $$\hat{M}^{\lambda_2\lambda_4}_{\mathrm{II}\ \lambda} = g^2\left\{\left(\frac{1}{2k_3\cdot k_4}-\frac{1}{k_2\cdot k_4}\right)\left[s\cos\frac{\theta}{2}\cdot\frac{1+\lambda_2\lambda_4\cos\theta}{2}-\frac{E}{\sqrt{2}}\lambda_2\sin\theta(-2\sqrt{2}E)\sin\frac{\theta}{2}\lambda\delta_{\lambda\lambda_4}\right]\right.$$
$$+\frac{1}{k_2 k_4}\frac{E}{\sqrt{2}}\lambda_4\sin\theta(-2\sqrt{2}E)\sin\frac{\theta}{2}\lambda\delta_{\lambda\lambda_2}$$
$$\left.+i\frac{-iE^2\cos\frac{\theta}{2}}{2k_3\cdot k_4}\left[\lambda\lambda_2(1+\cos\theta)+\lambda_2\lambda_4(1-\cos\theta)+2\lambda\lambda_4\right]\right\}$$
$$= g^2 s\cos\frac{\theta}{2}\left\{\left(\frac{1}{2k_3\cdot k_4}-\frac{1}{k_2\cdot k_4}\right)\left[\frac{1+\lambda_2\lambda_4\cos\theta}{2}+\frac{1-\cos\theta}{2}\lambda\lambda_2\delta_{\lambda\lambda_4}\right]\right.$$
$$\left.-\frac{1}{k_2\cdot k_4}\frac{1-\cos\theta}{2}\lambda\lambda_4\delta_{\lambda\lambda_2}+\frac{1}{8k_3\cdot k_4}\left[\lambda\lambda_2(1+\cos\theta)+\lambda_2\lambda_4(1-\cos\theta)+2\lambda\lambda_4\right]\right\}$$
$$= g^2 s\cos\frac{\theta}{2}\left\{-\frac{1}{k_2\cdot k_4}\left[\frac{1+\lambda_2\lambda_4\cos\theta}{2}+\frac{1-\cos\theta}{2}(\lambda\lambda_2\delta_{\lambda\lambda_4}+\lambda\lambda_4\delta_{\lambda\lambda_2})\right]\right.$$
$$\left.+\frac{1}{k_3\cdot k_4}\left[\frac{1+\lambda_2\lambda_4\cos\theta}{4}+\frac{1-\cos\theta}{4}\lambda\lambda_2\delta_{\lambda\lambda_4}+\frac{\lambda\lambda_2(1+\cos\theta)}{8}+\frac{\lambda_2\lambda_4(1-\cos\theta)}{8}+\frac{\lambda\lambda_4}{4}\right]\right\}$$

(506) $$\hat{M}^{\lambda_2,-\lambda_2}_{\mathrm{II}\ \lambda} = g^2 s\cos\frac{\theta}{2}\left\{-\frac{1}{k_2\cdot k_4}\left[\frac{1-\cos\theta}{2}+\frac{1-\cos\theta}{2}(-1)\right]\right.$$
$$+\frac{1}{k_3\cdot k_4}\left[\frac{1-\cos\theta}{4}+\delta_{\lambda\lambda_2}\left(\frac{1+\cos\theta}{8}-\frac{1-\cos\theta}{8}-\frac{1}{4}\right)\right.$$
$$\left.\left.+\delta_{\lambda,-\lambda_2}\left(-\frac{1-\cos\theta}{4}-\frac{1+\cos\theta}{8}-\frac{1-\cos\theta}{8}+\frac{1}{4}\right)\right]\right\}$$
$$=0$$

2005. 6. 16

$$(507)\quad \hat{M}^{\lambda_2\lambda_2}_{\mathrm{II}\,\lambda} = g^2 s \cos\frac{\theta}{2}\Big\{-\frac{1}{k_1\cdot k_4}\Big[\frac{1+\cos\theta}{2}+\frac{1-\cos\theta}{2}\,2\delta_{\lambda\lambda_2}\Big]$$
$$+\frac{1}{k_3\cdot k_4}\Big[\frac{1+\cos\theta}{4}+\frac{1-\cos\theta}{8}+\delta_{\lambda\lambda_2}\Big(\frac{1-\cos\theta}{4}+\frac{1+\cos\theta}{8}+\frac{1}{4}\Big)$$
$$+\delta_{\lambda,-\lambda_2}\Big(-\frac{1+\cos\theta}{8}-\frac{1}{4}\Big)\Big]\Big\}$$
$$= g^2 s\cos\frac{\theta}{2}\Big\{-\frac{1}{k_1\cdot k_4}\Big[\delta_{\lambda\lambda_2}\frac{3-\cos\theta}{2}+\delta_{\lambda,-\lambda_2}\frac{1+\cos\theta}{2}\Big]$$
$$+\frac{1}{k_3\cdot k_4}\Big[\delta_{\lambda\lambda_2}\cdot 1 \quad +\delta_{\lambda,-\lambda_2}\cdot 0\Big]\Big\}$$
$$= 2g^2\cos\frac{\theta}{2}\Big\{\delta_{\lambda,\lambda_2}\Big[1-\frac{3-\cos\theta}{(1+\cos\theta)}\Big]+\delta_{\lambda,-\lambda_2}\Big[-\frac{1+\cos\theta}{(1+\cos\theta)}\Big]\Big\}$$
$$= 2g^2\cos\frac{\theta}{2}\Big\{\delta_{\lambda,\lambda_2}\Big[-2\,\frac{1-\cos\theta}{1+\cos\theta}\Big]+\delta_{\lambda,-\lambda_2}\Big[-1\Big]\Big\}$$

(503) と (507) が結果で、まとめると

$$(508a)\quad \hat{M}^{\lambda_2\lambda_2}_{\mathrm{I}\,\lambda} = 2g^2\cos\frac{\theta}{2}\Big\{\delta_{\lambda,\lambda_2}\Big[\frac{4}{1-\cos^2\theta}\Big]+\delta_{\lambda,-\lambda_2}\Big[\frac{2}{1-\cos\theta}\Big]\Big\}$$

$$(508b)\quad \hat{M}^{\lambda_2\lambda_2}_{\mathrm{II}\,\lambda} = 2g^2\cos\frac{\theta}{2}\Big\{\delta_{\lambda,\lambda_2}\Big[-2\,\frac{1-\cos\theta}{1+\cos\theta}\Big]+\delta_{\lambda,-\lambda_2}\Big[-1\Big]\Big\}$$

$$(508c)\quad \hat{M}^{\lambda_2,-\lambda_2}_{\mathrm{I}\,\lambda} = \hat{M}^{\lambda_2,-\lambda_2}_{\mathrm{II}\,\lambda} = 0$$

(508c) が、$gg\to q\bar{q}$ の場合の選択則 $(\lambda_1 \neq \lambda_2)$ [p.129 (370)] に対応する選択則である。$m_q=0$ 極限では、入射グルオンと終状態グルオンのヘリシティーは等しい $(\lambda_2=\lambda_4)$.

全断面積は

(509) $$d\sigma = \frac{1}{2s}\cdot\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{N(N^2-1)}\sum_{spin}\sum_{color}|M|^2\ \frac{1}{8\pi}\frac{d\cos\theta}{2}$$

$$\frac{d\sigma}{d\cos\theta} = \frac{1}{128\pi s}\ \frac{1}{N(N^2-1)}\sum_{spin}\Big\{ tr(T^aT^aT^bT^b)\left(|\hat{M}_{I}|^2+|\hat{M}_{II}|^2\right) + tr(T^aT^bT^aT^b)\ 2\,\mathrm{Re}[\hat{M}_{I}\hat{M}^*_{II}]\Big\}$$

$$= \frac{1}{128\pi s}\ \frac{1}{N(N^2-1)}\Big\{ T_F^2\frac{(N^2-1)^2}{N}\sum_{spin}\left(|\hat{M}_{I\,\lambda}^{\lambda_2\lambda_2}|^2+|\hat{M}_{II\,\lambda}^{\lambda_2\lambda_2}|^2\right) - T_F^2\frac{N^2-1}{N}\sum_{spin}\ 2\,\mathrm{Re}\left[\left(\hat{M}_{I\,\lambda}^{\lambda_2\lambda_2}\right)\left(\hat{M}_{II\,\lambda}^{\lambda_2\lambda_2}\right)^*\right]\Big\}$$

干渉項のカラー因子が負なので、干渉項全体の符号は正となる。

(510) $$\frac{d\sigma}{d\cos\theta} = \frac{4\pi\alpha_s^2}{s}(1+\cos\theta)\Big\{\frac{T_F^2(N^2-1)}{N^2}\left[\frac{2}{(1-\cos^2\theta)^2}+\frac{2}{4(1-\cos\theta)^2}+\frac{2(1-\cos\theta)^2}{4(1+\cos\theta)^2}+\frac{2}{16}\right] - \frac{T_F^2}{N^2}2\left[-\frac{(1-\cos\theta)\times 2}{2(1+\cos\theta)(1-\cos^2\theta)}-\frac{2}{2(1-\cos\theta)\cdot 4}\right]\Big\}$$

$$= \frac{4\pi\alpha_s^2}{s}\Big\{\frac{T_F^2(N^2-1)}{N^2}\left[\frac{1}{(1-\cos\theta)^2}\left(\frac{2}{1+\cos\theta}+\frac{1+\cos\theta}{2}\right)+\frac{(1-\cos\theta)^2}{2(1+\cos\theta)}+\frac{1+\cos\theta}{8}\right] + \frac{T_F^2}{N^2}\left[2+\frac{1+\cos\theta}{1-\cos\theta}\right]\Big\}$$

ここで $\cos\hat{\theta}\to 1$ の振る舞いと、$\cos\hat{\theta}=0$ の値をみておきましょう。

(511) $$\frac{d\hat{\sigma}^{qq\to qq}}{d\cos\hat{\theta}} \xrightarrow[\cos\theta\to 1]{} \frac{4\pi\alpha_s^2}{\hat{s}}\Big\{\frac{2}{9}\left[\frac{2}{(1-\cos\theta)^2}+\frac{1}{4}\right]+\frac{1}{36}\left[\frac{2}{1-\cos\theta}+2\right]\Big\}$$

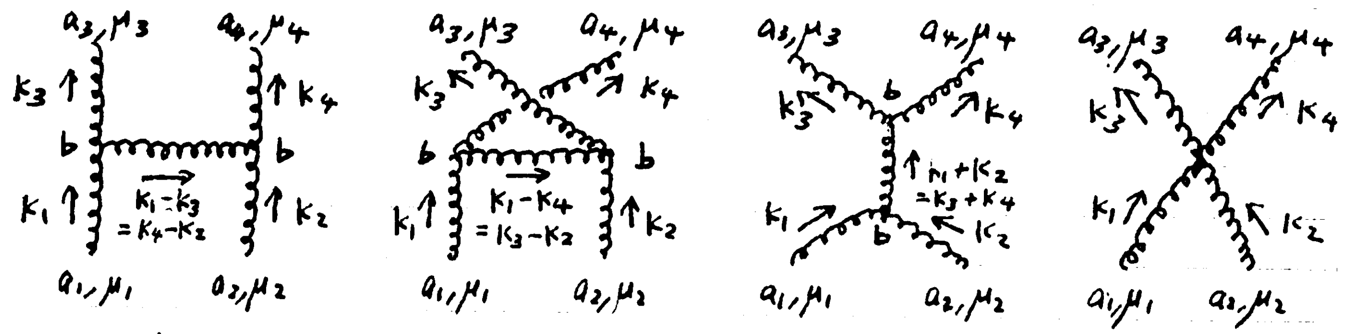
$$\xrightarrow[\cos\theta\to 0]{} \frac{4\pi\alpha_s^2}{\hat{s}}\Big\{\frac{2}{9}\left[\frac{25}{8}\right]+\frac{1}{36}[3]\Big\}$$

一次発散の t-channel グルオン交換は $\hat{M}_I$ にだけ存在し、その $\cos\theta\to 1$ 極限は、カラー因子も含めて、$qq'\to qq'$ に等しい。//

$gg \to gg$

やっと一番重要な素過程 $gg \to gg$ にたどりつきました。

$$(512)\quad g^{a_1}(k_1,\lambda_1) + g^{a_2}(k_2,\lambda_2) \longrightarrow g^{a_3}(k_3,\lambda_3) + g^{a_4}(k_4,\lambda_4)$$



(t) (u) (s) (c)

4ダイアグラムをそれぞれ(左から)、t-, u-, s-channel と c=contact と呼びましょう。

まずは Feynman 則 (291)改 と (294) を使って書き下します。

$$(513)\quad M = g^2\left\{ f^{a_1a_3b} f^{a_4a_2b}\Gamma_t^{\mu_1\mu_2\mu_3\mu_4} + f^{a_1a_4b} f^{a_2a_3b}\Gamma_u^{\mu_1\mu_2\mu_3\mu_4} + f^{a_1a_2b} f^{a_3a_4b}\Gamma_s^{\mu_1\mu_2\mu_3\mu_4}\right\}$$

$$\times\, \varepsilon_{\mu_1}(k_1,\lambda_1)\,\varepsilon_{\mu_2}(k_2,\lambda_2)\,\varepsilon^*_{\mu_3}(k_3,\lambda_3)\,\varepsilon^*_{\mu_4}(k_4,\lambda_4)$$

ここで c-図の寄与は、Feynman 則 (294) により、s-, t-, u-図の寄与に振り分けられます。

$$(514)\quad \Gamma_t^{\mu_1\mu_2\mu_3\mu_4} = \left[(k_1+k_3)^{\alpha} g^{\mu_1\mu_3} + (-k_3+k_1-k_3)^{\mu_1} g^{\mu_3\alpha} + (k_3-k_1-k_1)^{\mu_3} g^{\alpha\mu_1}\right]$$

$$\times\left[(-k_4-k_2)^{\beta} g^{\mu_4\mu_2} + (k_2-k_4+k_2)^{\mu_4} g^{\mu_2\beta} + (k_4-k_2+k_4)^{\mu_2} g^{\beta\mu_4}\right]\frac{-g_{\alpha\beta}}{(k_1-k_3)^2}$$

$$+\,(g_{\mu_1\mu_2}\, g_{\mu_3\mu_4} - g_{\mu_1\mu_4}\, g_{\mu_2\mu_3})$$

$$= \frac{1}{2k_1k_3}\Big[(2k_1k_3 - 2s)\, g^{\mu_1\mu_3} g^{\mu_4\mu_2} + 2(k_1+k_3)^{\{\mu_1}(k_2+k_4)^{\mu_3\}} g^{\mu_2\mu_4}$$

$$+\, 2(k_1+k_3)^{\{\mu_2}(k_2+k_4)^{\mu_4\}} g^{\mu_1\mu_3} - 4k_1^{\mu_3}k_2^{\mu_4} g^{\mu_1\mu_2}$$

$4k_1k_2$

$$-\, 4k_2^{\mu_4}k_3^{\mu_1} g^{\mu_2\mu_3} - 4k_3^{\mu_1}k_4^{\mu_2} g^{\mu_3\mu_4} - 4k_4^{\mu_2}k_1^{\mu_3} g^{\mu_4\mu_1}\Big] + (\,''\,)$$

少し系統的に計算しないといけませんね。まず (514) で

$$(515a)\quad \Gamma_t^{\mu_1\mu_2\mu_3\mu_4} = \Gamma^{\mu_1\mu_2\mu_3\mu_4}(k_1, k_2, k_3, k_4)$$

とおきます。［ $2s = 4k_1k_2$ と表記しておきます。］そうすると

$$(515b)\quad \Gamma_u^{\mu_1\mu_2\mu_3\mu_4} = \Gamma^{\mu_1\mu_3\mu_4\mu_2}(k_1, -k_3, k_4, -k_2)$$

$$(515c)\quad \Gamma_s^{\mu_1\mu_2\mu_3\mu_4} = \Gamma^{\mu_1\mu_4\mu_2\mu_3}(k_1, -k_4, -k_2, k_3)$$

こんなに面倒だとは思いませんでした、全て内向きの運動量 p_i^μ を使いましょう。

$$(516)\quad p_1^\mu = k_1^\mu, \quad p_2^\mu = k_2^\mu, \quad p_3^\mu = -k_3^\mu, \quad p_4^\mu = -k_4^\mu$$

そうすれば

$$(517a)\quad \Gamma_t^{\mu_1\mu_2\mu_3\mu_4} = \Gamma^{\mu_1\mu_2\mu_3\mu_4}(p_1, p_2, -p_3, -p_4) \equiv \Gamma(1\,2\,3\,4)$$

$$(517b)\quad \Gamma_u^{\mu_1\mu_2\mu_3\mu_4} = \Gamma^{\mu_1\mu_3\mu_4\mu_2}(p_1, p_3, -p_4, -p_2) \equiv \Gamma(1\,3\,4\,2)$$

$$(517c)\quad \Gamma_s^{\mu_1\mu_2\mu_3\mu_4} = \Gamma^{\mu_1\mu_4\mu_2\mu_3}(p_1, p_4, -p_2, -p_3) \equiv \Gamma(1\,4\,2\,3)$$

となります。念のため、$\Gamma_t^{\mu_1\mu_2\mu_3\mu_4} = \Gamma(1\,2\,3\,4)$ (514)式を p_i^μ で書いておきましょう。

$$
\begin{aligned}
(518)\quad \Gamma(1\,2\,3\,4) = -\frac{1}{p_1p_3}\Big[& (-p_1p_3 - 2p_1p_2)\, g^{\mu_1\mu_3} g^{\mu_2\mu_4} + \{(p_1-p_3)^{\mu_1}(p_2-p_4)^{\mu_3}\} g^{\mu_2\mu_4} \\
& + \{(p_1-p_3)^{\mu_2}(p_2-p_4)^{\mu_4}\} g^{\mu_1\mu_3} - 2p_1^{\mu_3}p_2^{\mu_4} g^{\mu_1\mu_2} \\
& + 2p_2^{\mu_4}p_3^{\mu_1} g^{\mu_2\mu_3} - 2p_3^{\mu_1}p_4^{\mu_2} g^{\mu_3\mu_4} + 2p_4^{\mu_2}p_1^{\mu_3} g^{\mu_1\mu_4}\Big] \\
& + g^{\mu_1\mu_2} g^{\mu_3\mu_4} - g^{\mu_1\mu_4} g^{\mu_2\mu_3}
\end{aligned}
$$

これだけの準備をしておいて、カラー因子のベースを large N 独立に変換します。

2005. 6.17

まず、次の等式を確認してください。

(519) $f^{abc} = \frac{-i}{T_F} \mathrm{tr}\left\{ [T^a, T^b]\, T^c \right\} = \frac{-i}{T_F}\left\{ \mathrm{tr}(T^aT^bT^c) - \mathrm{tr}(T^cT^bT^a) \right\}$

Fierz則を使って次式を導きます。

(520) $f^{a_1a_2b}f^{a_3a_4b} = \frac{-i}{T_F}\left[\mathrm{tr}(T^{a_1}T^{a_2}T^b) - \mathrm{tr}(T^bT^{a_2}T^{a_1}) \right] \frac{-i}{T_F}\left[\mathrm{tr}(T^{a_3}T^{a_4}T^b) - \mathrm{tr}(T^bT^{a_4}T^{a_3}) \right]$

$$= \frac{-1}{T_F^2}\left[\mathrm{tr}(T^{a_1}T^{a_2}T^b)\,\mathrm{tr}(T^{a_3}T^{a_4}T^b) + \mathrm{tr}(T^bT^{a_2}T^{a_1})\,\mathrm{tr}(T^bT^{a_4}T^{a_3}) \right.$$
$$\left. - \mathrm{tr}(T^{a_1}T^{a_2}T^b)\,\mathrm{tr}(T^bT^{a_4}T^{a_3}) - \mathrm{tr}(T^bT^{a_2}T^{a_1})\,\mathrm{tr}(T^{a_3}T^{a_4}T^b) \right]$$

(521) $\mathrm{tr}(T^{a_1}T^{a_2}T^b)\,\mathrm{tr}(T^{a_3}T^{a_4}T^b) = T^{a_1}_{i_1i_2}T^{a_2}_{i_2i_3}T^b_{i_3i_1}\; T^{a_3}_{j_1j_2}T^{a_4}_{j_2j_3}T^b_{j_3j_1}$

$$= T^{a}_{i_1i_2}T^{a_2}_{i_2i_3}\, T^{a_3}_{j_1j_2}T^{a_4}_{j_2j_3}\left(T_F\left[\delta_{i_3j_1}\delta_{j_3i_1} - \frac{1}{N}\delta_{i_3i_1}\delta_{j_3j_1} \right] \right)$$
$$= T_F\left(\mathrm{tr}(T^{a_1}T^{a_2}T^{a_3}T^{a_4}) - \frac{1}{N}\mathrm{tr}(T^{a_1}T^{a_2})\,\mathrm{tr}(T^{a_3}T^{a_4}) \right)$$
$$= T_F\,\mathrm{tr}(T^{a_1}T^{a_2}T^{a_3}T^{a_4}) - \frac{T_F^2}{N}\delta^{a_1a_2}\delta^{a_3a_4}$$

(522) $f^{a_1a_2b}f^{a_3a_4b} = \frac{-1}{T_F}\left\{ \mathrm{tr}(T^{a_1}T^{a_2}T^{a_3}T^{a_4}) + \mathrm{tr}(T^{a_2}T^{a_1}T^{a_4}T^{a_3}) \right.$

$$\left. - \mathrm{tr}(T^{a_1}T^{a_2}T^{a_4}T^{a_3}) - \mathrm{tr}(T^{a_2}T^{a_1}T^{a_3}T^{a_4}) \right\}$$
$$+ \frac{1}{N}\Big[\underbrace{\delta^{a_1a_2}\delta^{a_3a_4} + \delta^{a_2a_1}\delta^{a_4a_3} - \delta^{a_1a_2}\delta^{a_3a_4} - \delta^{a_1a_2}\delta^{a_3a_4}}_{\to 0} \Big]$$

ここで カラー因子のベース

(523) $T(i\,j\,k\,l) \equiv \frac{1}{T_F}\mathrm{tr}(T^{a_i}T^{a_j}T^{a_k}T^{a_l})$

を定義すると、トレースの cyclic 対称性に留意して

(524 a) $f^{a_1a_2b}f^{a_3a_4b} = -T(1\,2\,3\,4) - T(1\,4\,3\,2) + T(1\,2\,4\,3) + T(1\,3\,4\,2)$

同様に

2005. 6. 17

(524b) $f^{a_1 a_4 b} f^{a_2 a_3 b} = -T(1423) - T(1324) + T(1432) + T(1234)$

(524c) $f^{a_1 a_3 b} f^{a_4 a_2 b} = -T(1342) - T(1243) + T(1324) + T(1423)$

(524a,b,c) と (517a,b,c) を (513) に代入すると、振幅は

(525) $$M = g^2 \{ [-T(1342) - T(1243) + T(1324) + T(1423)] M(1234)$$
$$+ [-T(1423) - T(1324) + T(1432) + T(1234)] M(1342)$$
$$+ [-T(1234) - T(1432) + T(1243) + T(1342)] M(1423) \}$$

ここで $M(1234)$ 等は

(526) $$M(1234) = \Gamma(1234)\, \varepsilon_{\mu_1}(k_1,\lambda_1)\, \varepsilon_{\mu_2}(k_2,\lambda_2)\, \varepsilon^*_{\mu_3}(k_3,\lambda_3)\, \varepsilon^*_{\mu_4}(k_4,\lambda_4)$$

等で定義されるサブ振幅である。新しいカラー因子ベースで整理すると

(527a) $$M = g^2 \{ T(1234)[M(1342) - M(1423)]$$
$$+ T(1243)[M(1423) - M(1234)]$$
$$+ T(1324)[M(1234) - M(1342)]$$
$$+ T(1342)[M(1423) - M(1234)]$$
$$+ T(1423)[M(1234) - M(1342)]$$
$$+ T(1432)[M(1342) - M(1423)] \}$$

(527b) $$= g^2 \{ [T(1234) + T(1432)][M(1342) - M(1423)]$$
$$+ [T(1243) + T(1342)][M(1423) - M(1234)]$$
$$+ [T(1324) + T(1423)][M(1234) - M(1342)] \}$$

ここで $3! = 6$ コのカラー因子 $T(ijkl)$ が large N 独立で、従ってその係数振幅は

それぞれゲージ不変です。tree近似では独立な振幅が3ヶしかないので(527b)の様に因子化されます。まずこのカラーベースのlarge N独立性を証明しましょう。

$$(528)\quad \sum_{color} T(1234)T(1234)^* = \sum_{a_1a_2a_3a_4} tr(T^{a_1}T^{a_2}T^{a_3}T^{a_4})\,tr(T^{a_4}T^{a_3}T^{a_2}T^{a_1})\frac{1}{T_F^2}$$

$$= \sum_{a_1a_2a_3} T_F\left\{ tr(T^{a_1}T^{a_2}T^{a_3}T^{a_3}T^{a_2}T^{a_1}) - \frac{1}{N}tr(T^{a_1}T^{a_2}T^{a_3})\,tr(T^{a_3}T^{a_2}T^{a_1})\right\}\frac{1}{T_F^2}$$

$$= \sum_{a_1a_2} T_F^{-1}\left\{ C_F\, tr(T^{a_1}T^{a_2}T^{a_2}T^{a_1}) - \frac{T_F}{N}\left[tr(T^{a_1}T^{a_2}T^{a_2}T^{a_1}) - \frac{1}{N}tr(T^{a_1}T^{a_2})\,tr(T^{a_2}T^{a_1})\right]\right\}$$

$$= \sum_{a_1} T_F^{-1}\left\{ C_F^2\, tr(T^{a_1}T^{a_1}) - \frac{T_F}{N}\left[C_F\, tr(T^{a_1}T^{a_1}) - \frac{T_F^2}{N}\delta^{a_1a_1}\right]\right\}$$

$$= T_F^{-1}\left\{ C_F^2\, T_F(N^2-1) - \frac{T_F}{N}\left[C_F T_F(N^2-1) - \frac{T_F^2}{N}(N^2-1)\right]\right\}$$

$$= (N^2-1)\left\{ C_F^2 - C_F\frac{T_F}{N} + \frac{T_F^2}{N^2}\right\}$$

ここで

$$(529)\quad \sum_a (T^aT^a)_{ij} = C_F\,\delta_{ij} \quad ; \quad C_F = T_F\frac{N^2-1}{N} = \frac{4}{3}$$

を使いました。 $C_F \sim O(N)$ なので、(528)のカラー因子は N^4 です。非対角要素：

$$(530)\quad \sum_{color} T(1234)T(1243)^* = \frac{1}{T_F^2}\sum_{a_1a_2a_3a_4} tr(T^{a_1}T^{a_2}T^{a_3}T^{a_4})\,tr(T^{a_3}T^{a_4}T^{a_2}T^{a_1})$$

$$= \frac{1}{T_F^2}\sum_{a_1a_2a_3a_4} tr(T^{a_1}T^{a_2}T^{a_3}T^{a_4})\,tr(T^{a_4}T^{a_2}T^{a_1}T^{a_3})$$

$$= \frac{1}{T_F}\sum_{a_1a_2a_3}\left\{ tr(T^{a_1}T^{a_2}T^{a_3}T^{a_2}T^{a_1}T^{a_3}) - \frac{1}{N}tr(T^{a_1}T^{a_2}T^{a_3})\,tr(T^{a_3}T^{a_2}T^{a_1})\right\}$$

$$= \frac{1}{T_F}\sum_{a_2a_3}\left\{ -\frac{T_F}{N}tr(T^{a_2}T^{a_3}T^{a_2}T^{a_3}) - \frac{T_F}{N}\left[tr(T^{a_2}T^{a_3}T^{a_3}T^{a_2}) - \frac{1}{N}tr(T^{a_2}T^{a_3})^2\right]\right\}$$

$$= \sum_{a_2}\left\{ -\frac{1}{N}\cdot\left(-\frac{T_F}{N}\right)tr(T^{a_2}T^{a_2}) - \frac{1}{N}\left[C_F\, tr(T^{a_2}T^{a_2}) - \frac{T_F^2}{N}\delta^{a_2a_2}\right]\right\}$$

$$= (N^2-1)\left\{ \frac{T_F^2}{N^2} - \frac{T_F}{N}C_F + \frac{T_F^2}{N^2}\right\} = (N^2-1)\left\{ -C_F\frac{T_F}{N} + 2\frac{T_F^2}{N^2}\right\}$$

2005. 6. 17

対角要素に較べて N^{-2} ですね。まだあと4ヶ非対角要素が残っているけれど、
コンピュータでやってほしいですね。次のステップは (S27b) の振幅、M(1342)-M(1423)
等がゲージ不変であることをまず check し、それからヘリシティー振幅を計算
します。申し訳ございませんが、今週もとても忙しくてここで時間切れ
になってしまいました。補講が必要ですね。 //

QCD for Collider Physics VIII

2005. 7. 12

少し調子をくずしたために休講となってしまい申し訳ございませんでした。

休みつつ、少しずつ、調子をもどしていきたいと思います。

前回の講義で $N\to\infty$ $SU(N)$ で独立なカラー因子を導入して、$gg\to gg$ 振幅を 3ヶのゲージ不変なセットに分解しました。カラー因子の対角成分の二乗和が全て同じであることは、ラベル (a_1, a_2, a_3, a_4) の読み換えから明らかですが、非対角要素が全部同じであるかどうか、(私には)分かりません。もう一つ、二つ計算してみます。

$$
(531)\quad \sum_{\text{color}} T(1234)\,\overset{(532)}{\overset{\downarrow}{T(1324)^*}} = \frac{1}{T_F^2}\sum_{a_1a_2a_3a_4} \mathrm{tr}(T^{a_1}T^{a_2}T^{a_3}\overbrace{T^{a_4})\,\mathrm{tr}(T^{a_4}}^{(314)}T^{a_2}T^{a_3}T^{a_1})
$$

$$
= \frac{1}{T_F}\sum_{a_1a_2a_3}\left\{ \mathrm{tr}(T^{a_1}\overbrace{T^{a_2}T^{a_3}T^{a_2}T^{a_3}T^{a_1}}^{(317)=(529)}) - \frac{1}{N}\mathrm{tr}(T^{a_1}\overbrace{T^{a_2}T^{a_3})\,\mathrm{tr}(T^{a_2}T^{a_3}T^{a_1}}^{(314)}) \right\}
$$

$$
= \frac{1}{T_F}\sum_{a_2a_3}\left\{ C_F\,\mathrm{tr}(T^{a_2}T^{a_3}T^{a_2}T^{a_3}) - \frac{T_F}{N}\left[\mathrm{tr}(T^{a_2}T^{a_3}T^{a_2}T^{a_3}) - \frac{1}{N}\mathrm{tr}(T^{a_2}T^{a_3})\,\mathrm{tr}(T^{a_2}T^{a_3}) \right] \right\}
$$

$$
= \sum_{a_2a_3}\left\{ \left(\frac{C_F}{T_F}-\frac{1}{N}\right)\mathrm{tr}(T^{a_2}\overbrace{T^{a_3}T^{a_2}T^{a_3}}^{(532)}) + \frac{1}{N^2}T_F^2\,\delta^{a_2a_3}\delta^{a_2a_3} \right\}
$$

$$
= \sum_{a_2}\left\{ \left(\frac{C_F}{T_F}-\frac{1}{N}\right)\left(-\frac{T_F}{N}\right)\mathrm{tr}(T^{a_2}T^{a_2}) + \frac{T_F^2}{N^2}\delta^{a_2a_2} \right\}
$$

$$
= -\left(C_F-\frac{T_F}{N}\right)\frac{T_F}{N}(N^2-1) + \frac{T_F^2}{N^2}(N^2-1) = (N^2-1)\left\{ -C_F\frac{T_F}{N} + 2\frac{T_F^2}{N^2} \right\}
$$

これは(530)の非対角要素と全く同じですから、ここで全ての非対角要素は同じだろうとの見当がつきます。「証明」もできそうな気がするのでここでやめます。上で使った規則をまとめます。

$$
(532)\quad
\begin{cases}
(T^{a_1}T^{a_2}\cdots T^{a_n})^* = (T^{a_1})^T(T^{a_2})^T\cdots(T^{a_n})^T = (T^{a_n}\cdots T^{a_2}T^{a_1})^T \\[2ex]
\displaystyle\sum_a T^aT^bT^a = \sum_a T^a_{ij}T^b_{jk}T^a_{k\ell} = T_F T^b_{jk}\left(\delta_{i\ell}\delta_{kj} - \frac{1}{N}\delta_{ij}\delta_{k\ell}\right) = -\frac{T_F}{N}T^b
\end{cases}
$$

前頁の「証明」が心もとなかったので、カラー因子の計算を確信がもてるまでやってみました。

結果をまとめると

(S33a) $\Sigma |T(ijkl)|^2 = (N^2-1)\left[C_F^2 - C_F\frac{T_F}{N} + \frac{T_F^2}{N^2}\right] = T_F^2(N^2-1)\left[N^2-3+\frac{3}{N^2}\right]$

(S33b) $\Sigma T(1234)\,T(1243)^* = \Sigma T(1234)\,T(1324)^* = \Sigma T(1234)\,T(1342)^*$

$= \Sigma T(1234)\,T(1423)^* = (N^2-1)\left[-C_F\frac{T_F}{N} + 2\frac{T_F^2}{N^2}\right] = T_F^2(N^2-1)\left[-1+\frac{3}{N^2}\right]$

(S33c) $\Sigma T(1234)\,T(1432)^* = T_F^2(N^2-1)\left[1+\frac{3}{N^2}\right]$

つまり、対角成分 (S33a) が全て $O(N^4)$ で、非対角成分 (S33b) と (S33c) が $O(N^2)$ であることに間違いないが、その値は (S33c) だけ異る。それは

(S34) $T(1432)^* = T(2341) = T(1234)$

のためである。実際 (S27b) は

(S35)
$$\begin{cases} M = g^2\Big\{ [T(1234)+T(1234)^*]\,\hat{M}(1234) \\ \qquad + [T(1243)+T(1243)^*]\,\hat{M}(1243) \\ \qquad + [T(1324)+T(1324)^*]\,\hat{M}(1324) \Big\} \\ \hat{M}(1234) = M(1342) - M(1423) \\ \hat{M}(1243) = M(1423) - M(1234) \\ \hat{M}(1324) = M(1234) - M(1342) \end{cases}$$

と表すことができ、(S27b)=(S35) が tree 振幅が実数（散乱位相をもたない）であることの帰結であることがわかる。ゲージ不変な振幅 $\hat{M}(ijkl)$ は

2005. 7. 12

(536) $\hat{M}(1234) + \hat{M}(1243) + \hat{M}(1324) = 0$

を満たすので，2ヶだけが独立で，

(537) $$M = g^2\Big\{ [T(1234)+T(1234)^* - T(1324) - T(1324)^*]\,\hat{M}(1234) + [T(1243)+T(1243)^* - T(1324) - T(1324)^*]\,\hat{M}(1243)\Big\}$$

と表すことができ，スピンとカラー和は

(538) $$\sum_{color}\sum_{spin}|M|^2 = g^4\Big\{\sum_{color}\left|T(1234)+T(1234)^*-T(1324)-T(1324)^*\right|^2\sum_{spin}|\hat{M}(1234)|^2 + \sum_{color}\left|T(1243)+T(1243)^*-T(1324)-T(1324)^*\right|^2\sum_{spin}|\hat{M}(1243)|^2 + \sum_{color}\left(T(1234)+T(1234)^*-T(1324)-T(1324)^*\right)\left(T(1243)^*+T(1243)-T(1324)^*-T(1324)\right)\times\sum_{spin}2\,\mathrm{Re}\,\hat{M}(1234)\hat{M}(1243)^*\Big\}$$

カラー和則(533a, b, c)を用いるとカラー和は直ちに実行できて $\begin{bmatrix}(533a)\times4\\+(533c)\times4\\-(533b)\times4\end{bmatrix}$

(539) $$\sum_{color}\sum_{spin}|M|^2 = g^4\Big\{\underbrace{4T_F^2(N^2-1)\;N^2}\cdot\Big[\sum_{spin}|\hat{M}(1234)|^2+\sum_{spin}|\hat{M}(1243)|^2\Big] + 2T_F^2(N^2-1)\;N^2\cdot\Big[\sum_{spin}2\,\mathrm{Re}\,\hat{M}(1234)\hat{M}(1243)^*\Big]\Big\}$$

干渉項のカラー因子が丁度半分なのは等式(536)の帰結で，(539)は

(539)′ $$\sum_{color}\sum_{spin}|M|^2 = g^4\cdot\underbrace{2T_F^2(N^2-1)\cdot N^2}\cdot\sum_{spin}\left(|\hat{M}(1234)|^2+|\hat{M}(1243)|^2+|\hat{M}(1324)|^2\right)$$

と表すこともできます。(539)′は(539)から(536)を用いて導けますが，(535)を出発点にして次の式を使ってcheckできます。

(540) $$|a+b+c|^2 = |a|^2+|b|^2+|c|^2 - 2\mathrm{Re}[ab^*+bc^*+ca^*] = 0$$

if $a+b+c=0$.

以下 (539) を

$$(541)\ \sum_{color}\sum_{spin}|M|^2 = g^4\cdot 4T_R^2(N^2-1)\,N^2 \cdot\sum_{spin}\left(|\hat{M}(1234)|^2+|\hat{M}(1243)|^2+\mathrm{Re}\,\hat{M}(1234)\hat{M}(1243)^*\right)$$

と表すが、Re の前に 2 が無いことに気をつけて下さい。

さて、ゲージ不変振幅 $\hat{M}(1234)$ と $\hat{M}(1243)$ を計算してみましょう。(535),(526),(518) から。

$$(542)\ \hat{M}(1234) = M(1342) - M(1423)$$
$$= \left(\Gamma(1342)-\Gamma(1423)\right)\varepsilon_{\mu_1}(k_1,\lambda_1)\varepsilon_{\mu_2}(k_2,\lambda_2)\varepsilon^*_{\mu_3}(k_3,\lambda_3)\varepsilon^*_{\mu_4}(k_4,\lambda_4)$$

$$(543)\ \Gamma(1342)-\Gamma(1423) = -\frac{1}{p_1p_4}\Big[(-p_1p_4-2p_1p_3)g^{\mu_1\mu_4}g^{\mu_3\mu_2}+\{(p_1-p_4)^{\mu_1}(p_3-p_2)^{\mu_4}\}g^{\mu_3\mu_2}$$
$$+\{(p_1-p_4)^{\mu_3}(p_3-p_2)^{\mu_2}\}g^{\mu_1\mu_4}-2p_1^{\mu_4}p_3^{\mu_2}g^{\mu_1\mu_3}+2p_3^{\mu_2}p_4^{\mu_1}g^{\mu_3\mu_4}-2p_4^{\mu_1}p_2^{\mu_3}g^{\mu_4\mu_2}$$
$$+2p_2^{\mu_3}p_1^{\mu_4}g^{\mu_1\mu_2}\Big]+g^{\mu_1\mu_3}g^{\mu_4\mu_2}-g^{\mu_1\mu_2}g^{\mu_3\mu_4}$$
$$+\frac{1}{p_1p_2}\Big[(-p_1p_2-2p_1p_4)g^{\mu_1\mu_2}g^{\mu_4\mu_3}+\{(p_1-p_2)^{\mu_1}(p_4-p_3)^{\mu_2}\}g^{\mu_4\mu_3}$$
$$+\{(p_1-p_2)^{\mu_4}(p_4-p_3)^{\mu_3}\}g^{\mu_1\mu_2}-2p_1^{\mu_2}p_4^{\mu_3}g^{\mu_1\mu_4}+2p_4^{\mu_3}p_2^{\mu_1}g^{\mu_4\mu_2}-2p_2^{\mu_1}p_3^{\mu_4}g^{\mu_2\mu_3}$$
$$+2p_3^{\mu_4}p_1^{\mu_2}g^{\mu_1\mu_3}\Big]-g^{\mu_1\mu_4}g^{\mu_2\mu_3}+g^{\mu_1\mu_3}g^{\mu_4\mu_2}$$

$$(543)'\quad = -\frac{1}{p_1p_4}\Big\{(-2p_1p_3)g^{\mu_1\mu_4}g^{\mu_3\mu_2}+[(-p_4)^{\mu_1}(p_3-p_2)^{\mu_4}+p_1^{\mu_4}(p_3-p_2)^{\mu_1}]g^{\mu_3\mu_2}$$
$$+[(p_1-p_4)^{\mu_3}p_3^{\mu_2}+(p_1-p_4)^{\mu_2}(-p_2)^{\mu_3}]g^{\mu_1\mu_4}-2p_1^{\mu_4}p_3^{\mu_2}g^{\mu_1\mu_3}+2p_3^{\mu_2}p_4^{\mu_1}g^{\mu_3\mu_4}$$
$$-2p_4^{\mu_1}p_2^{\mu_3}g^{\mu_4\mu_2}+2p_2^{\mu_3}p_1^{\mu_4}g^{\mu_1\mu_2}\Big\}+\cancel{g^{\mu_1\mu_4}g^{\mu_3\mu_2}}+g^{\mu_1\mu_3}g^{\mu_4\mu_2}-g^{\mu_1\mu_2}g^{\mu_3\mu_4}$$

$$+\frac{1}{p_1p_2}\Big\{(-2p_1p_4)g^{\mu_1\mu_2}g^{\mu_4\mu_3}+\big[(-p_2)^{\mu_1}(p_4-p_3)^{\mu_2}+p_1^{\mu_2}(p_4-p_3)^{\mu_1}\big]g^{\mu_4\mu_3}$$

$$+\big[(p_1-p_2)^{\mu_4}p_4^{\mu_3}-(p_1-p_2)^{\mu_3}p_3^{\mu_4}\big]g^{\mu_1\mu_2}-2p_1^{\mu_2}p_4^{\mu_3}g^{\mu_1\mu_4}+2p_4^{\mu_3}p_2^{\mu_1}g^{\mu_4\mu_2}$$

$$-2p_2^{\mu_1}p_3^{\mu_4}g^{\mu_2\mu_3}+2p_3^{\mu_4}p_1^{\mu_2}g^{\mu_1\mu_3}\Big\}-g^{\mu_1\mu_2}g^{\mu_4\mu_3}-\cancel{g^{\mu_1\mu_4}g^{\mu_2\mu_3}}+g^{\mu_1\mu_3}g^{\mu_4\mu_2}$$

$$(543)''=g^{\mu_1\mu_2}g^{\mu_3\mu_4}\Big\{-\frac{2p_1p_4}{p_1p_2}-2\Big\}+g^{\mu_1\mu_3}g^{\mu_2\mu_4}\Big\{2\Big\}+g^{\mu_1\mu_4}g^{\mu_2\mu_3}\Big\{\frac{2p_1p_3}{p_1p_4}\Big\}$$

$$+g^{\mu_1\mu_2}\Big\{-2\frac{p_2^{\mu_3}p_1^{\mu_4}}{p_1p_4}+\frac{(p_1-p_2)^{\mu_4}p_4^{\mu_3}-(p_1-p_2)^{\mu_3}p_3^{\mu_4}}{p_1p_2}\Big\}+g^{\mu_1\mu_3}\Big\{\frac{2p_1^{\mu_4}p_3^{\mu_2}}{p_1p_4}+\frac{2p_3^{\mu_4}p_1^{\mu_2}}{p_1p_2}\Big\}$$

$$+g^{\mu_1\mu_4}\Big\{\frac{(p_1-p_4)^{\mu_2}p_2^{\mu_3}-(p_1-p_4)^{\mu_3}p_3^{\mu_2}}{p_1p_4}-2\frac{p_1^{\mu_2}p_4^{\mu_3}}{p_1p_2}\Big\}+g^{\mu_2\mu_3}\Big\{\frac{p_4^{\mu_1}(p_3-p_2)^{\mu_4}-p_1^{\mu_4}(p_3-p_2)^{\mu_1}}{p_1p_4}-2\frac{p_2^{\mu_1}p_3^{\mu_4}}{p_1p_2}\Big\}$$

$$+g^{\mu_2\mu_4}\Big\{2\frac{p_4^{\mu_1}p_2^{\mu_3}}{p_1p_4}+2\frac{p_4^{\mu_3}p_2^{\mu_1}}{p_1p_2}\Big\}+g^{\mu_3\mu_4}\Big\{-2\frac{p_3^{\mu_2}p_4^{\mu_1}}{p_1p_4}+\frac{p_1^{\mu_2}(p_4-p_3)^{\mu_1}-p_2^{\mu_1}(p_4-p_3)^{\mu_2}}{p_1p_2}\Big\}$$

上式のゲージ不変性は4重に（$p_1^{\mu_1}$, $p_2^{\mu_2}$, $p_3^{\mu_3}$, $p_4^{\mu_4}$）check可能です。$p_1^{\mu_1}$をかけて

$$(544)\quad\big[\Gamma(1342)-\Gamma(1423)\big]p_{1\mu_1}$$

$$=g^{\mu_3\mu_4}\Big\{-\Big(\frac{2p_1p_4}{p_1p_2}+2\Big)p_1^{\mu_2}-2p_3^{\mu_2}+p_1^{\mu_2}\frac{(p_4-p_3)\cdot p_1}{p_1p_2}-(p_4-p_3)^{\mu_2}\Big\}$$

$$+g^{\mu_2\mu_4}\Big\{2p_1^{\mu_3}+2p_2^{\mu_3}+2p_4^{\mu_3}\Big\}+g^{\mu_2\mu_3}\Big\{\frac{2p_1p_3}{p_1p_4}p_1^{\mu_4}+(p_3-p_2)^{\mu_4}-p_1^{\mu_4}\frac{(p_3-p_2)\cdot p_1}{p_1p_4}-2p_3^{\mu_4}\Big\}$$

$$-2\frac{p_1^{\mu_2}p_2^{\mu_3}p_1^{\mu_4}}{p_1p_4}+\frac{p_1^{\mu_2}p_4^{\mu_3}(p_1-p_2)^{\mu_4}-p_1^{\mu_2}(p_1-p_2)^{\mu_3}p_3^{\mu_4}}{p_1p_2}+2\frac{p_3^{\mu_2}p_1^{\mu_3}p_1^{\mu_4}}{p_1p_4}+2\frac{p_1^{\mu_2}p_1^{\mu_3}p_3^{\mu_4}}{p_1p_2}$$

$$+\frac{(p_1-p_4)^{\mu_2}p_2^{\mu_3}p_1^{\mu_4}-p_3^{\mu_2}(p_1-p_4)^{\mu_3}p_1^{\mu_4}}{p_1p_4}-2\frac{p_1^{\mu_2}p_4^{\mu_3}p_1^{\mu_4}}{p_1p_2}$$

$$=g^{\mu_3\mu_4}\Big\{-(p_1+p_3+p_4)^{\mu_2}\Big\}+g^{\mu_2\mu_4}\Big\{2(p_1+p_2+p_4)^{\mu_3}\Big\}+g^{\mu_2\mu_3}\Big\{-(p_1+p_2+p_3)^{\mu_4}\Big\}$$

$$+\frac{1}{p_1p_4}\Big\{-\cancel{2}p_1^{\mu_2}p_2^{\mu_3}p_1^{\mu_4}+\cancel{2}p_3^{\mu_2}p_1^{\mu_3}p_1^{\mu_4}+\cancel{p_1^{\mu_2}p_2^{\mu_3}}p_1^{\mu_4}-p_4^{\mu_2}p_2^{\mu_3}p_1^{\mu_4}-\cancel{p_3^{\mu_2}p_1^{\mu_3}}p_1^{\mu_4}+p_3^{\mu_2}p_4^{\mu_3}p_1^{\mu_4}\Big\}$$

$$+\frac{1}{p_1p_2}\Big\{p_1^{\mu_2}\cancel{p_4^{\mu_3}}p_1^{\mu_4}-p_1^{\mu_2}p_4^{\mu_3}p_2^{\mu_4}-p_1^{\mu_2}\cancel{p_1^{\mu_3}}p_3^{\mu_4}+p_1^{\mu_2}p_2^{\mu_3}p_3^{\mu_4}+\cancel{2}p_1^{\mu_2}p_1^{\mu_3}p_3^{\mu_4}-\cancel{2}p_1^{\mu_2}p_4^{\mu_3}p_1^{\mu_4}\Big\}$$

$$(544)' = g^{\mu_3\mu_4}(p_2^{\mu_2}) + g^{\mu_2\mu_4}(-2p_3^{\mu_3}) + g^{\mu_2\mu_3}(p_4^{\mu_4})$$

$$+\frac{1}{p_1p_4}\Big\{-\underbrace{(p_1+p_4)^{\mu_2}}_{\to(p_2+p_3)^{\mu_2}\to p_3^{\mu_2}}p_2^{\mu_3}p_1^{\mu_4} + p_3^{\mu_2}\underbrace{(p_1+p_4)^{\mu_3}}_{\to(-p_2-p_3)^{\mu_3}\to(-p_2)^{\mu_3}}p_1^{\mu_4}\Big\}$$

$$+\frac{1}{p_1p_2}\Big\{-p_1^{\mu_2}p_4^{\mu_3}\underbrace{(p_2+p_1)^{\mu_4}}_{\to(-p_3-p_4)^{\mu_4}\to(-p_3)^{\mu_4}} + p_1^{\mu_2}\underbrace{(p_2+p_1)^{\mu_3}}_{\to(-p_3-p_4)^{\mu_3}\to(-p_4)^{\mu_3}}p_3^{\mu_4}\Big\}$$

$$(544)'' = g^{\mu_3\mu_4}(\underbrace{p_2^{\mu_2}}_{\to 0}) + g^{\mu_2\mu_4}(-2\underbrace{p_3^{\mu_3}}_{\to 0}) + g^{\mu_2\mu_3}(\underbrace{p_4^{\mu_4}}_{\to 0})$$

$$+\frac{1}{p_1p_4}(\underbrace{p_2^{\mu_2}}_{\to 0}p_2^{\mu_3}p_1^{\mu_4} - p_3^{\mu_3}\underbrace{p_3^{\mu_2}}_{\to 0}p_1^{\mu_4}) + \frac{1}{p_1p_2}(p_1^{\mu_2}p_4^{\mu_3}\underbrace{p_4^{\mu_4}}_{\to 0} - p_1^{\mu_2}\underbrace{p_3^{\mu_3}}_{\to 0}p_3^{\mu_4})$$

ここで、QCDのゲージ不変性は、$\epsilon^{\mu_1}(p_1,\lambda_1)\to p_1^{\mu_1}$ の変換をしたときに、他の全てのグルオンが $p_i^{\mu_i}\epsilon_{\mu_i}(p_i,\lambda_i)=0$ $(i=2,3,4)$ を満たすときにだけ、ゼロを与えることに気をつけてください。式としては

$$(545)\quad [\Gamma(1342)-\Gamma(1423)]^{\mu_1\mu_2\mu_3\mu_4}\,p_{1\mu_1}\,\epsilon_{\mu_2}(p_2,\lambda_2)\,\epsilon^*_{\mu_3}(p_3,\lambda_3)\,\epsilon^*_{\mu_4}(p_4,\lambda_4)=0$$

が (544)′ から導かれるわけです。これがQED [U(1)ゲージ理論] のWard則と全く異なる点で、私の講義の最重要ポイントの一つです。QEDでは例えば $\gamma\gamma\to\gamma\gamma$ 振幅は1-loop振幅ですが、それを

$$(546)\quad M = \Gamma^{\mu_1\mu_2\mu_3\mu_4}\,\epsilon_{\mu_1}(p_1,\lambda_1)\,\epsilon_{\mu_2}(p_2,\lambda_2)\,\epsilon^*_{\mu_3}(p_3,\lambda_3)\,\epsilon^*_{\mu_4}(p_4,\lambda_4)$$

と表記すると、散乱振幅のU(1)ゲージ不変性は

$$(547)\quad \Gamma^{\mu_1\mu_2\mu_3\mu_4}p_{1\mu_1} = \Gamma^{\mu_1\mu_2\mu_3\mu_4}p_{2\mu_2} = \Gamma^{\mu_1\mu_2\mu_3\mu_4}p_{3\mu_3} = \Gamma^{\mu_1\mu_2\mu_3\mu_4}p_{4\mu_4} = 0$$

を導きます。(545)と(547)の違いは、可換ゲージ理論と非可換ゲージ理論の違いに

2005. 7. 12

根ざしており、非可換ゲージ理論では共変ゲージの摂動論がユニタリティーを満たすためにはゴーストを導入することが不可避であることの起源です。

もう少し説明しますね。(547)を満たすQEDの振幅(546)の二乗スピン和は、

$$(548)\quad \sum_{spin} |M_{QED}(556)|^2 = \sum_{\lambda_1\lambda_2\lambda_3\lambda_4} \Gamma^{\mu_1\mu_2\mu_3\mu_4}\Gamma^{\nu_1\nu_2\nu_3\nu_4 *} \epsilon_{\mu_1}(p_1,\lambda_1)\epsilon^*_{\nu_1}(p_1,\lambda_1)\epsilon_{\mu_2}(p_2,\lambda_2)\epsilon_{\nu_2}(p_2,\lambda_2)$$
$$\epsilon^*_{\mu_3}(p_3,\lambda_3)\epsilon_{\nu_3}(p_3,\lambda_3)\epsilon^*_{\mu_4}(p_4,\lambda_4)\epsilon_{\nu_4}(p_4,\lambda_4)$$
$$= \Gamma^{\mu_1\mu_2\mu_3\mu_4}\Gamma^{\nu_1\nu_2\nu_3\nu_4 *}(-g_{\mu_1\nu_1})(-g_{\mu_2\nu_2})(-g_{\mu_3\nu_3})(-g_{\mu_4\nu_4})$$

QEDの場合

Ward則(547)の結果、光子のスピン和

$$(549)\quad \sum_\lambda \epsilon_\mu(p,\lambda)\epsilon_\nu(p,\lambda)^* = -g_{\mu\nu} + \frac{p_\mu n_\nu + p_\nu n_\mu}{p\cdot n} \qquad (\text{light-cone gauge})\ n^2=0$$

を $-g_{\mu\nu}$ で代行できるのです。またこれは、Feynmanゲージのループ計算をしても、ユニタリティーが保たれることを保証しています。一方QCDのWard則(BRS則)は(547)ではなく [振幅(546)を $gg\to gg$ 振幅と思うと]

$$(550)\quad \begin{cases} \Gamma^{\mu_1\mu_2\mu_3\mu_4} p_{1\mu_1}\epsilon_{\mu_2}(p_2,\lambda_2)\epsilon_{\mu_3}(p_3,\lambda_3)\epsilon_{\mu_4}(p_4,\lambda_4) = 0 \\ \Gamma^{\mu_1\mu_2\mu_3\mu_4}\epsilon_{\mu_1}(p_1,\lambda_1) p_{2\mu_2}\epsilon^*_{\mu_3}(p_3,\lambda_3)\epsilon^*_{\mu_4}(p_4,\lambda_4) = 0 \\ \Gamma^{\mu_1\mu_2\mu_3\mu_4}\epsilon_{\mu_1}(p_1,\lambda_1)\epsilon_{\mu_2}(p_2,\lambda_2) p_{3\mu_3}\epsilon^*_{\mu_4}(p_4,\lambda_4) = 0 \\ \Gamma^{\mu_1\mu_2\mu_3\mu_4}\epsilon_{\mu_1}(p_1,\lambda_1)\epsilon_{\mu_2}(p_2,\lambda_2)\epsilon^*_{\mu_3}(p_3,\lambda_3) p_{4\mu_4} = 0 \end{cases}$$

を導きます。$p^\mu(-g_{\mu\nu}) = -p_\nu \neq 0$ ですから、(548)の様な置き換えはできず、スピン和で $(-g_{\mu\nu})$ の置き換えができるのは1グルオンについてだけとなります。//

2005. 7. 12

さて、ゲージ不変性が(544)″、(545)で証明されたので、振幅(542)-(543)″を求めます。[$\epsilon_{\mu_2}(p_2) \to p_{2\mu_2}$ 等のテストはしていませんが、(544)のテストで、(543)″式の全ての項が関与していることから、(543)″に誤りが無いことには既に確信がもてるのです。] (542)式を

(551) $\hat{M}(1234) = \Gamma((543)'')^{\mu_1\mu_2\mu_3\mu_4}\,\epsilon_{\mu_1}(p_1,\lambda_1)\,\epsilon_{\mu_2}(p_2,\lambda_2)\,\epsilon^*_{\mu_3}(p_3,\lambda_3)\,\epsilon^*_{\mu_4}(p_4,\lambda_4)$

(551)′ $= M^{\lambda_3\lambda_4}_{\lambda_1\lambda_2}$ (全てのλ_iは物理的ヘリシティー)

(551)″ $= M_{\lambda_1,\lambda_2,-\lambda_3,-\lambda_4}$ (終グルオンのヘリシティーを逆 sign にとる)

と表記して、具体的なヘリシティー振幅を求める。(551)′と(552)″の様にヘリシティー添え字が上下にある場合は全て物理的ヘリシティー、添え字が全て下のときは終グルオンのヘリシティーの逆サインをとることにする。重心系で

(552)
$$
\begin{aligned}
p_1^\mu &= E(1,0,0,1) \\
p_2^\mu &= E(1,0,0,-1) \\
p_3^\mu &= -E(1,\sin\theta,0,\cos\theta) \quad (=-k_3^\mu) \\
p_4^\mu &= -E(1,-\sin\theta,0,-\cos\theta) \quad (=-k_4^\mu)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
p_1p_2 &= p_3p_4 = 2E^2 \\
p_1p_3 &= p_2p_4 = -E^2(1-\cos\theta) \\
p_1p_4 &= p_2p_3 = -E^2(1+\cos\theta)
\end{aligned}
$$

(553)
$$
\begin{aligned}
\epsilon_1^\mu &= \epsilon^\mu(p_1,\lambda_1) = \frac{1}{\sqrt{2}}(0,-\lambda_1,-i,0) \\
\epsilon_2^\mu &= \epsilon^\mu(p_2,\lambda_2) = \frac{1}{\sqrt{2}}(0,\lambda_2,-i,0) \qquad ;(333) \\
\epsilon_3^\mu &= \epsilon^\mu(p_3,\lambda_3)^* \equiv \epsilon^\mu(k_3,\lambda_3)^* = \frac{1}{\sqrt{2}}(0,-\lambda_3\cos\theta,\ i,\ \lambda_3\sin\theta) \\
\epsilon_4^\mu &= \epsilon^\mu(p_4,\lambda_4)^* \equiv \epsilon^\mu(k_4,\lambda_4)^* = \frac{1}{\sqrt{2}}(0,-\lambda_4\cos\theta,-i,\ \lambda_4\sin\theta) \qquad ;(332)
\end{aligned}
$$

(554) HELAS ゲージ：
$$
\begin{aligned}
&p_2\cdot\epsilon_1 = p_1\cdot\epsilon_2 = p_4\cdot\epsilon_3 = p_3\cdot\epsilon_4 = 0 \\
&p_3\cdot\epsilon_1 = -p_4\cdot\epsilon_1 = -\lambda_1\sin\theta\,(E/\sqrt{2}) \\
&p_3\cdot\epsilon_2 = -p_4\cdot\epsilon_2 = \lambda_2\sin\theta\,(E/\sqrt{2}) \\
&p_1\cdot\epsilon_3 = -p_2\cdot\epsilon_3 = -\lambda_3\sin\theta\,(E/\sqrt{2}) \\
&p_1\cdot\epsilon_4 = -p_2\cdot\epsilon_4 = -\lambda_4\sin\theta\,(E/\sqrt{2})
\end{aligned}
$$

2005. 7. 12

(555) $\epsilon_1\cdot\epsilon_2 = \frac{1}{2}(\lambda_1\lambda_2+1) = \delta_{\lambda_1\lambda_2}$ $\qquad \epsilon_1\cdot\epsilon_3 = -\frac{1}{2}(1+\lambda_1\lambda_3\cos\theta)$

$\epsilon_3\cdot\epsilon_4 = \frac{1}{2}(-\lambda_3\lambda_4-1) = -\delta_{\lambda_3\lambda_4}$ $\qquad \epsilon_2\cdot\epsilon_3 = -\frac{1}{2}(1-\lambda_2\lambda_3\cos\theta)$

$\epsilon_1\cdot\epsilon_4 = \frac{1}{2}(1-\lambda_1\lambda_4\cos\theta)$

$\epsilon_2\cdot\epsilon_4 = \frac{1}{2}(1+\lambda_2\lambda_4\cos\theta)$

これだけ準備をすれば何とかなると思います。まず

(556) $$M^{\lambda_3\lambda_4}_{\lambda_1\lambda_2} = \epsilon_1\cdot\epsilon_2\,\epsilon_3\cdot\epsilon_4\left[-\frac{-2E^2(1+c)}{2E^2}-2\right] + \epsilon_1\cdot\epsilon_3\,\epsilon_2\cdot\epsilon_4[2] + \epsilon_1\cdot\epsilon_4\,\epsilon_2\cdot\epsilon_3\left[\frac{-2E^2(1-c)}{-E^2(1+c)}\right]$$

$$+\epsilon_1\cdot\epsilon_2\left[-2\frac{P_2\cdot\epsilon_3\,P_1\cdot\epsilon_4}{-E^2(1+c)}\right] + \epsilon_1\cdot\epsilon_3\left[\frac{2P_1\cdot\epsilon_4\,P_3\cdot\epsilon_2}{-E^2(1+c)}\right] + \epsilon_1\cdot\epsilon_4\left[\frac{-P_4\cdot\epsilon_2 P_2\cdot\epsilon_3 - P_1\cdot\epsilon_3 P_3\cdot\epsilon_2}{-E^2(1+c)}\right]$$

$$+\epsilon_2\cdot\epsilon_3\left[\frac{P_4\cdot\epsilon_1\,\underbrace{(-P_2\cdot\epsilon_4)}_{P_1\cdot\epsilon_4}P_3\cdot\epsilon_1}{-E^2(1+c)}\right] + \epsilon_2\cdot\epsilon_4\left[\frac{2P_4\cdot\epsilon_1\,P_2\cdot\epsilon_3}{-E^2(1+c)}\right] + \epsilon_3\cdot\epsilon_4\left[\frac{-2P_3\cdot\epsilon_2\,P_4\cdot\epsilon_1}{-E^2(1+c)}\right]$$

$$= \epsilon_1\cdot\epsilon_2\,\epsilon_3\cdot\epsilon_4[1+c-2] + \epsilon_1\cdot\epsilon_3\,\epsilon_2\cdot\epsilon_4[2] + \epsilon_1\cdot\epsilon_4\,\epsilon_2\cdot\epsilon_3\left[2\frac{1-c}{1+c}\right]$$

$$+\epsilon_1\cdot\epsilon_2\left[\frac{\lambda_3 s\cdot(-\lambda_4 s)}{1+c}\right] + \epsilon_1\cdot\epsilon_3\left[-\frac{(-\lambda_4 s)(\lambda_2 s)}{1+c}\right] + \epsilon_1\cdot\epsilon_4\left[\frac{(-\lambda_2 s)(\lambda_3 s)+(-\lambda_3 s)(\lambda_2 s)}{2(1+c)}\right]$$

$$+\epsilon_2\cdot\epsilon_3\left[\frac{(\lambda_1 s)(-\lambda_4 s)-(-\lambda_4 s)(-\lambda_1 s)}{-2(1+c)}\right] + \epsilon_2\cdot\epsilon_4\left[-\frac{(\lambda_1 s)(\lambda_3 s)}{1+c}\right] + \epsilon_3\cdot\epsilon_4\left[\frac{(\lambda_2 s)(\lambda_1 s)}{1+c}\right]$$

(556)′ $$= \epsilon_1\cdot\epsilon_2\,\epsilon_3\cdot\epsilon_4[-1+c] + \epsilon_1\cdot\epsilon_3\,\epsilon_2\cdot\epsilon_4[2] + \epsilon_1\cdot\epsilon_4\,\epsilon_2\cdot\epsilon_3\left[\frac{4}{1+c}-2\right]$$

$$+\epsilon_1\cdot\epsilon_2[-\lambda_3\lambda_4(1-c)] + \epsilon_1\cdot\epsilon_3[\lambda_2\lambda_4(1-c)] + \epsilon_1\cdot\epsilon_4[-\lambda_2\lambda_3(1-c)]$$

$$+\epsilon_2\cdot\epsilon_3[\lambda_1\lambda_4(1-c)] + \epsilon_2\cdot\epsilon_4[-\lambda_1\lambda_3(1-c)] + \epsilon_3\cdot\epsilon_4[\lambda_1\lambda_2(1-c)]$$

$$= \frac{4}{1+c}[\epsilon_1\cdot\epsilon_4\,\epsilon_2\cdot\epsilon_3] + 2[\epsilon_1\cdot\epsilon_3\,\epsilon_2\cdot\epsilon_4 - \epsilon_1\cdot\epsilon_4\,\epsilon_2\cdot\epsilon_3]$$

$$+(1-c)\big[-\epsilon_1\cdot\epsilon_2\,\epsilon_3\cdot\epsilon_4 - \lambda_3\lambda_4\,\epsilon_1\cdot\epsilon_2 + \lambda_2\lambda_4\,\epsilon_1\cdot\epsilon_3 - \lambda_2\lambda_3\,\epsilon_1\cdot\epsilon_4 + \lambda_1\lambda_4\,\epsilon_2\cdot\epsilon_3 - \lambda_1\lambda_3\,\epsilon_2\cdot\epsilon_4 + \lambda_1\lambda_2\,\epsilon_3\cdot\epsilon_4\big]$$

(556)″ $$= -\frac{1}{1+c}(1-\lambda_1\lambda_4 c)(1-\lambda_2\lambda_3 c) - \frac{1}{2}\left[(1+\lambda_1\lambda_3 c)(1+\lambda_2\lambda_4 c) - (1-\lambda_1\lambda_4 c)(1-\lambda_2\lambda_3 c)\right]$$

$$+(1-c)\Big[+\delta_{\lambda_1\lambda_2}\delta_{\lambda_3\lambda_4} - \delta_{\lambda_1\lambda_2}\lambda_3\lambda_4 - \delta_{\lambda_3\lambda_4}\lambda_1\lambda_2 - \frac{1}{2}\lambda_2\lambda_4(1+\lambda_1\lambda_3 c) - \frac{1}{2}\lambda_2\lambda_3(1-\lambda_1\lambda_4 c) - \frac{1}{2}\lambda_1\lambda_4(1-\lambda_2\lambda_3 c) - \frac{1}{2}\lambda_1\lambda_3(1+\lambda_2\lambda_4 c)\Big]$$

2005. 7. 12

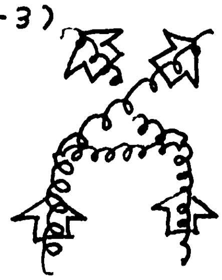
(557) $M^{\lambda\lambda}_{\lambda\lambda} = -\frac{1}{1+c}(1-c)^2 - \frac{1}{2}\left[(1+c)^2-(1-c)^2\right] + (1-c)\left[-1-1+1-\frac{1}{2}(1+c+1-c+1-c+1+c)\right]$

$= -\frac{1}{1+c}\left[2-(1+c)\right]^2 - \frac{1}{2}\left[4c\right] + (1-c)\left[-1-\frac{1}{2}(4)\right]$

$= -\frac{1}{1+c}\left[4-4(1+c)+(1+c)^2\right] - 2c + (1-c)(-3)$

$= -\frac{4}{1+c} + 4 - 1 - c - 2c - 3 + 3c$

$= -\frac{4}{1+\cos\theta}$



これはいかにも正しそうに見えますね。（でも誰かcheckして下さい。MadGraphとか）

次に

(558) $M^{-\lambda-\lambda}_{\lambda\lambda} = -\frac{1}{1+c}(1+c)^2 - \frac{1}{2}\left[(1-c)^2-(1+c)^2\right] + (1-c)\left[-1-1+1+\frac{1}{2}(1-c+1+c+1+c+1-c)\right]$

$= -(1+c) - \frac{1}{2}\left[-4c\right] + (1-c)\left[-1+\frac{1}{2}(4)\right]$

$= -1-c+2c+1-c$

$= 0$

これは「バンザーイ！」ものです。(558)式を(551)″のnotationで表わすと、

(559) $M^{-\lambda-\lambda}_{\lambda\lambda} = M_{\lambda\lambda\lambda\lambda} = 0$

これがかの有名な「全てのヘリシティーが等しいグルオン振幅はゼロである」定理の一番簡単な例です。振幅(559)は入射グルオンのヘリシティーが全てフリップしているので、「完全にヘリシティー保存が破れている振幅」と呼びます。(557)はヘリシティー保存振幅です。「ヘリシティー保存が最大に破れているゼロでない振幅」のことをMaximal Helicity Violating amplitude

と呼び、多グルオン振幅の系統的な計算の鍵だと思われています。

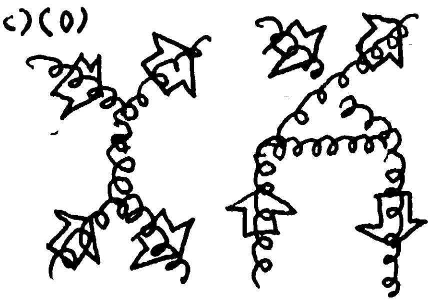
我々の4グルオン振幅の場合のMHV振幅は実はHelicity Conservingです。

(560) $$M^{-\lambda\lambda}_{\lambda\lambda} = M_{\lambda\lambda\lambda-\lambda} = -\frac{1}{1+c}(1-c)(1+c) - \frac{1}{2}[(1-c)(1+c)-(1-c)(1+c)]$$
$$+(1-c)\left[-0-(-1)+0-\frac{1}{2}[\cancel{(1-c)}-\cancel{(1-c)}+\cancel{(1+c)}-\cancel{(1+c)}]\right]$$
$$= -1+c+(1-c)\left[1-\frac{1}{2}(0)\right]=0$$

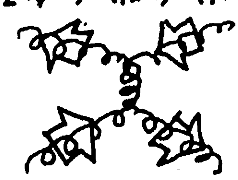
(560)' $$M^{\lambda-\lambda}_{\lambda\lambda} = M_{\lambda\lambda-\lambda\lambda} = 0$$

だからです。ゼロでないのはヘリシティー保存の(557)と

(561) $$M^{-\lambda\lambda}_{\lambda-\lambda} = M_{\lambda-\lambda\lambda-\lambda} = -\frac{1}{1+c}(1-c)(1-c) - \frac{1}{2}[(1-c)^2-(1-c)^2]+(1-c)\left[-\frac{1}{2}(-1+c+1-c+1-c-1+c)\right]$$
$$= -\frac{1}{1+c}(1-c)^2 - \frac{1}{2}\cdot(0) - \frac{1}{2}(1-c)(0)$$
$$= -\frac{(1-c)^2}{1+c}$$
$$= -\frac{4}{1+c}+4-1-c$$
$$= -\frac{4}{1+\cos\theta}+3-\cos\theta$$



(562) $$M^{\lambda-\lambda}_{\lambda-\lambda} = M_{\lambda-\lambda-\lambda\lambda} = -\frac{1}{1+c}(1+c)^2 - \frac{1}{2}[\cancel{(1+c)^2}-\cancel{(1+c)^2}]+(1-c)\left(-\frac{1}{2}\right)[\cancel{(1+c)}-\cancel{(1+c)}-\cancel{(1+c)}+\cancel{(1+c)}]$$
$$= -(1+\cos\theta)$$



となります。(557), (561), (562)が正しいかどうか自信がないのですが(HELASでcheckして下さいね)、(557)はu-channelでヘリシティー保存、(561)はu-channelとs-channelでヘリシティー保存、(562)はs-channelでヘリシティー保存であることは読みとれます。

λ=+振幅とλ=−振幅が等しいのはQCDのParity不変性の帰結です。//

2005. 7. 13

カラー因子の計算則

ここで、(533a, b, c) の因子を計算するときに使ったルールを整理しておきます。

全ては Fierz 則 (314) (p.109) の帰結です。次の notation を使います。

(563) a, b, c … T^a, T^b, T^c 等の generator
A, B, C … $A = abc = T^a T^b T^c$ 等の matrix
$(A) = tr(A)$

くり返し文字は足しあげる、というルールを使うと $\underbrace{\text{Fierz 則}}^{(314)}$ は

(564) $$a_{ij}\, a_{k\ell} = T_F\left(\delta_{i\ell}\delta_{kj} - \frac{1}{N}\delta_{ij}\delta_{k\ell}\right) \quad \cdots (314)$$

で、これから多くのルールが導かれます。

(567a) $$a\,a = a_{ij}\, a_{jk} = T_F\left(N - \frac{1}{N}\right)\delta_{ik} \equiv C_F\,\delta_{ik}$$

(567b) $$a A a = a_{ij} A_{jk} a_{k\ell} = T_F\left[(A)\delta_{i\ell} - \frac{1}{N} A_{i\ell}\right]$$

(567c) $$(A a B a) = T_F\left[(A)(B) - \frac{1}{N}(AB)\right]$$

(567d) $$(A a)(B a) = T_F\left[(AB) - \frac{1}{N}(A)(B)\right]$$

上のルールと規格条件

(568) $$(a\,a) = T_F(N^2 - 1)$$

を用いることで、全て計算を簡単に実行できました。

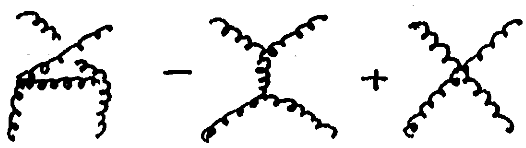
20年くらい前は良く覚えていたんですけれど、ずい分計算まちがいをしたので、ルールを整理しておきました。役にたててください。 //

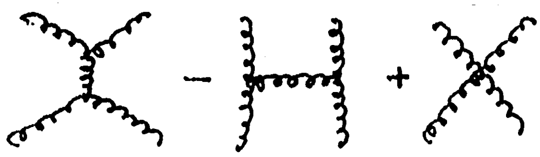
さて、もう一つの独立な振幅 $\hat{M}(1243)$ [p.179 (535)-(539)] を計算しなければならないけれど、$\hat{M}(1234)$ を $M^{\lambda_3\lambda_4}_{\lambda_1\lambda_2}$ と表わした (551) にならって

$$
(569)\begin{cases}
M^{\lambda_3\lambda_4}_{\lambda_1\lambda_2} \equiv \hat{M}(1234) = \left(\Gamma(1342)-\Gamma(1423)\right)^{\mu_1\mu_2\mu_3\mu_4} \epsilon_{\mu_1}(p_1,\lambda_1)\epsilon_{\mu_2}(p_2,\lambda_2)\epsilon^{*}_{\mu_3}(p_3,\lambda_3)\epsilon^{*}_{\mu_4}(p_4,\lambda_4) \\
N^{\lambda_3\lambda_4}_{\lambda_1\lambda_2} \equiv \hat{M}(1243) = \left(\Gamma(1423)-\Gamma(1234)\right)^{\mu_1\mu_2\mu_3\mu_4} \epsilon_{\mu_1}(p_1,\lambda_1)\epsilon_{\mu_2}(p_2,\lambda_2)\epsilon^{*}_{\mu_3}(p_3,\lambda_3)\epsilon^{*}_{\mu_4}(p_4,\lambda_4)
\end{cases}
$$

の様に $N^{\lambda_3\lambda_4}_{\lambda_1\lambda_2}$ を定義します。$\Gamma(ijkl)^{\mu_1\mu_2\mu_3\mu_4}$ との対応は p.172 (527b) と p.170 (517)-(518) です。カラー因子の計算はできている [p.181 (541)] ので、あとは $N^{\lambda_3\lambda_4}_{\lambda_1\lambda_2}$ を求めるだけです。p.169-170 のカラー因子とファインマン図の対応から、

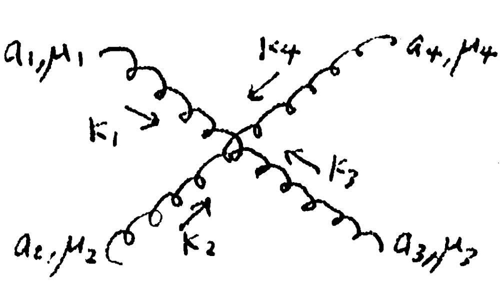
$$
(570)\begin{cases}
M^{\lambda_3\lambda_4}_{\lambda_1\lambda_2} \equiv \hat{M}(1234) \sim \Gamma_u - \Gamma_s \quad \cdots \\
N^{\lambda_3\lambda_4}_{\lambda_1\lambda_2} \equiv \hat{M}(1243) \sim \Gamma_s - \Gamma_t \quad \cdots
\end{cases}
$$





ここで  項はそれぞれのカラー因子成分が寄与する。Feyman則 (294) p.105 を標準カラーベース $T(ijkl) \equiv \frac{1}{T_F}\mathrm{tr}(T^{a_i}T^{a_j}T^{a_k}T^{a_l})$ で書いておくと良いかも知れません。

$$
\begin{aligned}
(571)=(294)\quad \Gamma^{a_1a_2a_3a_4}_{\mu_1\mu_2\mu_3\mu_4} = ig^2 \Big\{ & [T(1234)+T(1234)^*][2g_{\mu_1\mu_3}g_{\mu_2\mu_4}-g_{\mu_1\mu_2}g_{\mu_3\mu_4}-g_{\mu_1\mu_4}g_{\mu_2\mu_3}] \\
& +[T(1243)+T(1243)^*][2g_{\mu_1\mu_4}g_{\mu_2\mu_3}-g_{\mu_1\mu_2}g_{\mu_3\mu_4}-g_{\mu_1\mu_3}g_{\mu_2\mu_4}] \\
& +[T(1324)+T(1324)^*][2g_{\mu_1\mu_2}g_{\mu_3\mu_4}-g_{\mu_1\mu_3}g_{\mu_2\mu_4}-g_{\mu_1\mu_4}g_{\mu_2\mu_3}] \Big\}
\end{aligned}
$$



2005. 7.13

p.170 (518) と p.181 (543) を参考に、 $\Gamma(1423)-\Gamma(1234)$ を計算します。

$$(572)\quad \Gamma(1423)-\Gamma(1234) = -\frac{1}{p_1p_2}\Big\{(-2p_1p_4)g^{\mu_1\mu_2}g^{\mu_3\mu_4} + [-p_2^{\mu_1}(p_4-p_3)^{\mu_2}+p_1^{\mu_2}(p_4-p_3)^{\mu_1}]g^{\mu_4\mu_3}$$

$$+[(p_1-p_2)^{\mu_4}p_4^{\mu_3}-(p_1-p_2)^{\mu_3}p_3^{\mu_4}]g^{\mu_1\mu_2} - 2p_1^{\mu_2}p_4^{\mu_3}g^{\mu_1\mu_4} + 2p_4^{\mu_3}p_2^{\mu_1}g^{\mu_2\mu_4}$$

$$-2p_2^{\mu_1}p_3^{\mu_4}g^{\mu_2\mu_3} + 2p_3^{\mu_4}p_1^{\mu_2}g^{\mu_1\mu_3}\Big\} + \cancel{g^{\mu_1\mu_2}g^{\mu_3\mu_4}} - g^{\mu_1\mu_3}g^{\mu_2\mu_4} + g^{\mu_1\mu_4}g^{\mu_2\mu_3}$$

$$+\frac{1}{p_1p_3}\Big\{-2p_1p_2\,g^{\mu_1\mu_3}g^{\mu_2\mu_4} + [-p_3^{\mu_1}(p_2-p_4)^{\mu_3}+p_1^{\mu_3}(p_2-p_4)^{\mu_1}]g^{\mu_2\mu_4}$$

$$+[(p_1-p_3)^{\mu_2}p_2^{\mu_4}-(p_1-p_3)^{\mu_4}p_4^{\mu_2}]g^{\mu_1\mu_3} - 2p_1^{\mu_3}p_2^{\mu_4}g^{\mu_1\mu_2} + 2p_2^{\mu_4}p_3^{\mu_1}g^{\mu_2\mu_3}$$

$$-2p_3^{\mu_1}p_4^{\mu_2}g^{\mu_3\mu_4} + 2p_4^{\mu_2}p_1^{\mu_3}g^{\mu_1\mu_4}\Big\} - g^{\mu_1\mu_3}g^{\mu_2\mu_4} - \cancel{g^{\mu_1\mu_2}g^{\mu_3\mu_4}} + g^{\mu_1\mu_4}g^{\mu_2\mu_3}$$

$$(572)' = g^{\mu_1\mu_2}g^{\mu_3\mu_4}\left\{\frac{2p_1p_4}{p_1p_2}\right\} + g^{\mu_1\mu_3}g^{\mu_2\mu_4}\left\{-\frac{2p_1p_2}{p_1p_3}-2\right\} + g^{\mu_1\mu_4}g^{\mu_2\mu_3}\left\{2\right\}$$

$$+g^{\mu_1\mu_2}\left\{\frac{(p_1-p_2)^{\mu_3}p_3^{\mu_4}-(p_1-p_2)^{\mu_4}p_4^{\mu_3}}{p_1p_2} - \frac{2p_1^{\mu_3}p_2^{\mu_4}}{p_1p_3}\right\} + g^{\mu_1\mu_3}\left\{-\frac{2p_1^{\mu_2}p_3^{\mu_4}}{p_1p_2} + \frac{(p_1-p_3)^{\mu_2}p_2^{\mu_4}-p_4^{\mu_2}(p_1-p_3)^{\mu_4}}{p_1p_3}\right\}$$

$$+g^{\mu_1\mu_4}\left\{\frac{2p_1^{\mu_2}p_4^{\mu_3}}{p_1p_2} + \frac{2p_4^{\mu_2}p_1^{\mu_3}}{p_1p_3}\right\} + g^{\mu_2\mu_3}\left\{\frac{2p_2^{\mu_1}p_3^{\mu_4}}{p_1p_2} + \frac{2p_3^{\mu_1}p_2^{\mu_4}}{p_1p_3}\right\}$$

$$+g^{\mu_2\mu_4}\left\{\frac{2p_2^{\mu_1}p_4^{\mu_3}}{-p_1p_2} - \frac{p_3^{\mu_1}(p_2-p_4)^{\mu_3}-(p_2-p_4)^{\mu_1}p_1^{\mu_3}}{p_1p_3}\right\} + g^{\mu_3\mu_4}\left\{\frac{p_2^{\mu_1}(p_4-p_3)^{\mu_2}-(p_4-p_3)^{\mu_1}p_1^{\mu_2}}{p_1p_2} - \frac{2p_3^{\mu_1}p_4^{\mu_2}}{p_1p_3}\right\}$$

ゲージ不変性のテスト

$$(573)\quad [\Gamma(1423)-\Gamma(1234)]^{\mu_1\mu_2\mu_3\mu_4}\,p_{1\mu_1}$$

$$= g^{\mu_3\mu_4}\left\{\frac{2p_1p_4}{p_1p_2}p_1^{\mu_2} + (p_4-p_3)^{\mu_2} - \frac{(p_4-p_3)\cdot p_1}{p_1p_2}p_1^{\mu_2} - 2p_4^{\mu_2}\right\} + g^{\mu_2\mu_3}\left\{2p_1^{\mu_4}+2p_3^{\mu_4}+2p_2^{\mu_4}\right\}$$

$$+g^{\mu_2\mu_4}\left\{-\frac{2p_1p_2}{p_1p_3}p_1^{\mu_3} - 2p_1^{\mu_3} - 2p_4^{\mu_3} - (p_2-p_4)^{\mu_3} + \frac{(p_2-p_4)\cdot p_1}{p_1p_3}p_1^{\mu_3}\right\}$$

$$+\frac{1}{p_1p_2}\left\{p_1^{\mu_2}(p_1-p_2)^{\mu_3}p_3^{\mu_4} - p_1^{\mu_2}p_4^{\mu_3}(p_1-p_2)^{\mu_4} - 2p_1^{\mu_2}p_1^{\mu_3}p_3^{\mu_4} + 2p_1^{\mu_2}p_4^{\mu_3}p_1^{\mu_4}\right\}$$

$$+\frac{1}{p_1p_3}\left\{-2p_1^{\mu_2}p_1^{\mu_3}p_2^{\mu_4} + (p_1-p_3)^{\mu_2}p_1^{\mu_3}p_2^{\mu_4} - p_4^{\mu_2}p_1^{\mu_3}(p_1-p_3)^{\mu_4} + 2p_4^{\mu_2}p_1^{\mu_3}p_1^{\mu_4}\right\}$$

$$(573)' = g^{\mu_3\mu_4}\left\{\frac{(p_4+p_3)\cdot p_1}{p_1p_2}p_1^{\mu_2}-p_3^{\mu_2}-p_4^{\mu_2}\right\}+g^{\mu_2\mu_3}\left\{2(p_1+p_2+p_3)^{\mu_4}\right\}$$

$$+g^{\mu_2\mu_4}\left\{-\frac{(p_2+p_4)\cdot p_1}{p_1p_3}p_1^{\mu_3}-2p_1^{\mu_3}-p_2^{\mu_3}-p_4^{\mu_3}\right\}$$

$$+\frac{1}{p_1p_2}\left\{p_1^{\mu_2}\underbrace{(-p_1-p_2)^{\mu_3}}_{\hookrightarrow(p_3+p_4)^{\mu_3}}p_3^{\mu_4}+p_1^{\mu_2}p_4^{\mu_3}\underbrace{(p_1+p_2)^{\mu_4}}_{-(p_3+p_4)^{\mu_4}}\right\}$$

$$+\frac{1}{p_1p_3}\left\{\underbrace{(-p_1-p_3)^{\mu_2}}_{\hookrightarrow(p_2+p_4)^{\mu_2}}p_1^{\mu_3}p_2^{\mu_4}-p_4^{\mu_2}p_1^{\mu_3}\underbrace{(-p_1-p_3)^{\mu_4}}_{\hookrightarrow(p_2+p_4)^{\mu_4}}\right\}$$

$$\to g^{\mu_3\mu_4}\left\{-\underbrace{(p_1+p_3+p_4)^{\mu_2}}_{\hookrightarrow p_2^{\mu_2}\to 0}\right\}+2g^{\mu_2\mu_3}\left\{2\underbrace{(p_1+p_2+p_3)^{\mu_4}}_{\hookrightarrow p_4^{\mu_4}\to 0}\right\}+g^{\mu_2\mu_4}\left\{-\underbrace{(p_1+p_2+p_4)^{\mu_3}}_{\hookrightarrow p_3^{\mu_3}\to 0}\right\}$$

$$+\frac{1}{p_1p_2}\left\{p_1^{\mu_2}p_4^{\mu_3}p_3^{\mu_4}-p_1^{\mu_2}p_4^{\mu_3}p_3^{\mu_4}\right\}+\frac{1}{p_1p_3}\left\{p_4^{\mu_2}p_1^{\mu_3}p_2^{\mu_4}-p_4^{\mu_2}p_1^{\mu_3}p_2^{\mu_4}\right\}$$

$$\to 0$$

(545)と同じように、(572)$'$のゲージ不変性が証明されました。(552)-(554)を使って、

$$(574)\ N^{\lambda_3\lambda_4}_{\lambda_1\lambda_2} = \Gamma((572)')^{\mu_1\mu_2\mu_3\mu_4}\epsilon_{1\mu_1}\epsilon_{2\mu_2}\epsilon_{3\mu_3}\epsilon_{4\mu_3}$$

$$(574)' = \epsilon_1\cdot\epsilon_2\ \epsilon_3\cdot\epsilon_4\left[-(1+c)\right]+\epsilon_1\cdot\epsilon_3\ \epsilon_2\cdot\epsilon_4\left[\frac{4}{1-c}-2\right]+\epsilon_1\cdot\epsilon_4\ \epsilon_2\cdot\epsilon_3\left[2\right]$$

$$+\epsilon_1\cdot\epsilon_2\left[\frac{2p_1\cdot\epsilon_3\ p_2\cdot\epsilon_4}{E^2(1-c)}\right]+\epsilon_1\cdot\epsilon_3\left[\frac{-p_3\cdot\epsilon_2\ p_2\cdot\epsilon_4-p_4\cdot\epsilon_2\ p_1\cdot\epsilon_4}{-E^2(1-c)}\right]$$

$$+\epsilon_1\cdot\epsilon_4\left[\frac{2p_4\cdot\epsilon_2\ p_1\cdot\epsilon_3}{-E^2(1-c)}\right]+\epsilon_2\cdot\epsilon_3\left[\frac{2p_3\cdot\epsilon_1\ p_2\cdot\epsilon_4}{-E^2(1-c)}\right]$$

$$+\epsilon_2\cdot\epsilon_4\left[\frac{-p_3\cdot\epsilon_1\ p_2\cdot\epsilon_3-p_4\cdot\epsilon_1\ p_1\cdot\epsilon_3}{-E^2(1-c)}\right]+\epsilon_3\cdot\epsilon_4\left[\frac{-2p_3\cdot\epsilon_1\ p_4\cdot\epsilon_2}{-E^2(1-c)}\right]$$

$$(574)'' = \epsilon_1\cdot\epsilon_2\ \epsilon_3\cdot\epsilon_4\left[-(1+c)\right]+\epsilon_1\cdot\epsilon_3\ \epsilon_2\cdot\epsilon_4\left[\frac{4}{1-c}-2\right]+\epsilon_1\cdot\epsilon_4\ \epsilon_2\cdot\epsilon_3\left[2\right]$$

$$+\epsilon_1\cdot\epsilon_2\left[-\lambda_3\lambda_4(1+c)\right]+\epsilon_1\cdot\epsilon_3\left[\lambda_2\lambda_4(1+c)\right]+\epsilon_1\cdot\epsilon_4\left[-\lambda_2\lambda_3(1+c)\right]$$

$$+\epsilon_2\cdot\epsilon_3\left[\lambda_1\lambda_4(1+c)\right]+\epsilon_2\cdot\epsilon_4\left[-\lambda_1\lambda_3(1+c)\right]+\epsilon_3\cdot\epsilon_4\left[\lambda_1\lambda_2(1+c)\right]$$

(574)$''$と(556)$'$を較べると、$c \Leftrightarrow -c$ の交換で完全に一致していることが確かめられます。//

2005. 7. 13

p.186 (555) を代入すると

$$(574)''' \quad N^{\lambda_3\lambda_4}_{\lambda_1\lambda_2} = -\frac{1}{1-c}(1+\lambda_1\lambda_3 c)(1+\lambda_2\lambda_4 c) + \frac{1}{2}\left[(1+\lambda_1\lambda_3 c)(1+\lambda_2\lambda_4 c) - (1-\lambda_1\lambda_4 c)(1-\lambda_2\lambda_3 c)\right]$$

$$+(1+c)\Big[\delta_{\lambda_1\lambda_2}\delta_{\lambda_3\lambda_4} - \lambda_3\lambda_4\delta_{\lambda_1\lambda_2} - \lambda_1\lambda_2\delta_{\lambda_3\lambda_4}$$

$$-\frac{\lambda_2\lambda_4}{2}(1+\lambda_1\lambda_3 c) - \frac{\lambda_2\lambda_3}{2}(1-\lambda_1\lambda_4 c) - \frac{\lambda_1\lambda_4}{2}(1-\lambda_2\lambda_3 c) - \frac{\lambda_1\lambda_3}{2}(1+\lambda_2\lambda_4 c)\Big]$$

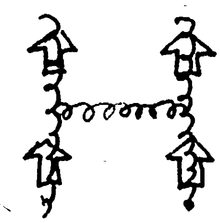
各ヘリシティー振幅を求めると

$$(575) \quad N^{\lambda\lambda}_{\lambda\lambda} = -\frac{1}{1-c}(1+c)^2 + \frac{1}{2}\left[(1+c)^2 - (1-c)^2\right] + (1+c)\left[-1 - \frac{1+c}{2} - \frac{1-c}{2} - \frac{1-c}{2} - \frac{1+c}{2}\right]$$

$$= -\frac{1}{1-c}\left[4 - 4(1-c) + (1-c)^2\right] + 2c + (1+c)[-3]$$

$$= -\frac{4}{1-c} + 4 - 1 + c + 2c - 3 - 3c$$

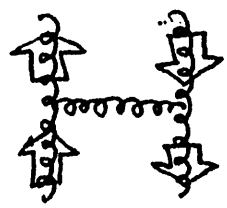
$$= -\frac{4}{1-c}$$

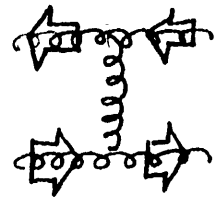


$$(576) \quad N^{\lambda\,-\lambda}_{\lambda\,-\lambda} = -\frac{1}{1-c}(1+c)^2 + \frac{1}{2}\left[(1+c)^2 - (1+c)^2\right] + (1+c)\left[-\frac{1+c}{2} + \frac{1+c}{2} + \frac{1+c}{2} - \frac{1+c}{2}\right]$$

$$= -\frac{(1+c)^2}{1-c}$$

$$= -\frac{4}{1-c} + 3 + c$$

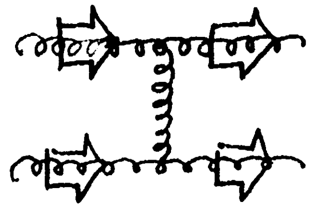




$$(577) \quad N^{-\lambda\,\lambda}_{\lambda\,-\lambda} = -\frac{1}{1-c}(1-c)^2 + \frac{1}{2}\left[(1-c)^2 - (1-c)^2\right] + (1+c)\left[+\frac{1-c}{2} - \frac{1-c}{2} - \frac{1-c}{2} + \frac{1-c}{2}\right]$$

$$= -(1-c) \qquad + 0 \qquad + 0$$

$$= -(1-c)$$



それぞれ (575) は t-channel, (577) は s-channel, (576) は t- と s-channel 相方で

ヘリシティー保存. 対応する $\underbrace{M^{\lambda_3\lambda_4}_{\lambda_1\lambda_2}\text{振幅}}_{(557),(561),(562)}$ とは $\cos\theta \leftrightarrow -\cos\theta$ の関係が確認されます。//

M振幅のときと全く同じように、ヘリシティ保存を破る振幅は全てゼロで、4g振幅の場合はMHV振幅は(575)-(577)のヘリシティー保存振幅であることが確認できます。(551)″と同じnotationで

(578) $N_{\lambda\lambda\lambda\lambda}=0$

(578)′ $N_{\lambda\lambda\lambda-\lambda}=N_{\lambda\lambda-\lambda\lambda}=N_{\lambda-\lambda\lambda\lambda}=N_{-\lambda\lambda\lambda\lambda}=0$

を示すことができます。(くたびれたので宿題にします。) このnotationで(575)-(577)は

(578)″ $N_{\lambda\lambda-\lambda-\lambda}=(575)$, $N_{\lambda-\lambda-\lambda\lambda}=(576)$, $N_{\lambda-\lambda\lambda-\lambda}=(577)$

となります。$-\lambda$が2ヶ入っている振幅がゼロでないわけですが、これもM振幅の場合と全く同じです。せっかくですからここで整理しておきましょう。

(579) $M_{\lambda\lambda\lambda\lambda}=0$; (558)

(579)′ $M_{\lambda\lambda\lambda-\lambda}=M_{\lambda\lambda-\lambda\lambda}=M_{\lambda-\lambda\lambda\lambda}=M_{-\lambda\lambda\lambda\lambda}=0$; (560), (560)′

(579)″ $M_{\lambda\lambda-\lambda-\lambda}=(557)$, $M_{\lambda-\lambda-\lambda\lambda}=(562)$, $M_{\lambda-\lambda\lambda-\lambda}=(561)$

以上の結果は、p.187~188とp.193の図で示したように、あたかもグルオンにフェルミオンのようなヘリシティー保存則が存在するかの様に見えます。実際、ゼロでないMHV振幅は2ヶ$(-\lambda)$を持たなければならないことの証明はN=1超対称性QCDでなされ、グルイノのヘリシティー保存とグルオン振幅との関係も明らかにされています。(参) M.L.Mangano, S.J.Parke, Phys.Rept.200(1991) 301−367

さて、ゼロでないM, N振幅を(541)に代入すると、断面積が得られます。

$$(580)\quad \sum_{color}\sum_{spin}|M|^2 = g^4\cdot 4T_F^2N^2(N^2-1)\cdot\sum_{\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3\lambda_4}\left(|M_{\lambda_1\lambda_2}^{\lambda_3\lambda_4}|^2+|N_{\lambda_1\lambda_2}^{\lambda_3\lambda_4}|^2+\mathrm{Re}\,M_{\lambda_1\lambda_2}^{\lambda_3\lambda_4}N_{\lambda_1\lambda_2}^{\lambda_3\lambda_4 *}\right)$$

$$(580)'\quad = g^4\cdot 4T_F^2N^2(N^2-1)\cdot\sum_{\lambda=\pm}\Big\{(M_{\lambda\lambda}^{\lambda\lambda})^2+(N_{\lambda\lambda}^{\lambda\lambda})^2+(M_{\lambda\lambda}^{\lambda\lambda})(N_{\lambda\lambda}^{\lambda\lambda})$$
$$+(M_{\lambda-\lambda}^{\lambda-\lambda})^2+(N_{\lambda-\lambda}^{\lambda-\lambda})^2+(M_{\lambda-\lambda}^{\lambda-\lambda})(N_{\lambda-\lambda}^{\lambda-\lambda})$$
$$+(M_{\lambda-\lambda}^{-\lambda\lambda})^2+(N_{\lambda-\lambda}^{-\lambda\lambda})^2+(M_{\lambda-\lambda}^{-\lambda\lambda})(N_{\lambda-\lambda}^{-\lambda\lambda})\Big\}$$

$$(580)''\quad = g^4\cdot 4T_F^2N^2(N^2-1)\cdot 2\Big\{\left(\frac{4}{1+c}\right)^2+\left(\frac{4}{1-c}\right)^2+\left(\frac{4}{1+c}\right)\left(\frac{4}{1-c}\right)$$
$$+(1+c)^2+\frac{(1+c)^4}{(1-c)^2}+(1+c)\frac{(1+c)^2}{(1-c)}$$
$$+\frac{(1-c)^4}{(1+c)^2}+(1-c)^2+\frac{(1-c)^2}{(1+c)}(1-c)\Big\}$$

$$(580)'''\quad = g^4\cdot 4T_F^2N^2(N^2-1)\cdot 2\left\{\frac{32}{(1+c)^2}+\frac{32}{(1-c)^2}-\frac{16}{1+c}-\frac{16}{1-c}+22+2c^2\right\}$$

断面積は

$$(581)\quad d\sigma = \frac{1}{2s}\cdot\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{(N^2-1)^2}\sum_{spin}\sum_{color}|M|^2\ \underbrace{\frac{1}{2}}_{}\ \frac{1}{8\pi}\ \frac{d\cos\theta}{2}$$

↑ 統計因子 (−1<cosθ<1 にするため。)

$$(582)\quad \frac{d\sigma}{d\cos\theta} = \frac{(4\pi\alpha_s)^2}{128\pi s}\cdot\frac{4T_F^2N^2}{N^2-1}\cdot\left\{\frac{32}{(1+c)^2}+\frac{32}{(1-c)^2}-\frac{16}{1+c}-\frac{16}{1-c}+22+2c^2\right\}$$

$$= \frac{4\pi\alpha_s^2}{s}\cdot\underbrace{\frac{4T_F^2N^2}{N^2-1}}_{\frac{9}{8}}\cdot\left\{\frac{1}{(1+c)^2}+\frac{1}{(1-c)^2}-\frac{1}{2(1+c)}-\frac{1}{2(1-c)}+\frac{11+c^2}{16}\right\}$$

カラー因子が $gg\to gg$ と $qg\to qg$ の $\frac{2}{9}$ と較べて約5倍大きいことに注目。

2005. 7. 13

$qq' \to qq'$ $(qq \to qq)$, $qg \to qg$, $gg \to gg$ のまとめ。

(583a) $$\left(\frac{d\sigma}{dc}\right)^{qq' \to qq'} = \frac{4\pi\alpha_s^2}{s} \cdot \frac{2}{9} \cdot \left\{ \frac{2}{(1-c)^2} - \frac{1}{1-c} + \frac{1}{4} \right\}$$ p.137 (402)

(583b) $$\left(\frac{d\sigma}{dc}\right)^{qq \to qq} = \frac{4\pi\alpha_s^2}{s} \cdot \frac{2}{9} \cdot \left\{ \frac{1}{(1-c)^2} + \frac{1}{(1+c)^2} - \frac{1}{3(1-c)} - \frac{1}{3(1+c)} + \frac{1}{4} \right\}$$ p.140 (412)

(583c) $$= \frac{4\pi\alpha_s^2}{s} \cdot \frac{2}{9} \cdot \left\{ \frac{2}{(1-c)^2} - \frac{2}{3}\frac{1}{1-c} + \frac{1}{2} + O(1-c) \right\}$$ 同種粒子の「2倍」に注意。

(583d) $$\left(\frac{d\sigma}{dc}\right)^{qg \to qg} = \frac{4\pi\alpha_s^2}{s} \cdot \frac{2}{9} \cdot \left\{ \frac{2}{(1-c)^2} + \frac{1}{4}\frac{1}{1-c} + \frac{5}{2}\frac{1}{1+c} - \frac{5}{4} + \frac{5}{8}c \right\}$$ p.168 (510)
(511)にエラー有

(583e) $$\left(\frac{d\sigma}{dc}\right)^{gg \to gg} = \frac{4\pi\alpha_s^2}{s} \cdot \frac{9}{8} \cdot \left\{ \frac{1}{(1-c)^2} + \frac{1}{(1+c)^2} - \frac{1}{2(1-c)} - \frac{1}{2(1+c)} + \frac{11+c^2}{16} \right\}$$ p.195 (582)

(583f) $$= \frac{4\pi\alpha_s^2}{s} \cdot \frac{9}{8} \cdot \left\{ \frac{2}{(1-c)^2} - \frac{1}{1-c} + \frac{3}{2} + O(1-c) \right\}$$ 同種粒子の「2倍」に注意。

これらの3素過程がLHC実験での最重要過程です。全てt-channelグルオン交換の$1/(1-\cos\theta)^2$の振る舞いを示すと共に、カラー因子も比較的大きいです。グルオン散乱のカラー因子が約5倍大きいことを覚えておいてください。分布関数のたたみ込み積分によるルミノシティー分布(470)が1/5になってもhigh p_T事象に寄与することを意味します。このため、ある程度xの大きな場所でのグルオン分布の精度が重要になります。(583b)と(583e)の$d\sigma/d\cos\theta$の表式は、事象生成の積分範囲を他の過程にそろえるため($-1<\cos\theta<1$とするため)にむりやり$\frac{1}{2}$倍してあります。微分

2005, 7. 13

断面積に統計因子が現われるわけではないので、角度を定めた(例えば $\cos\theta\to1$ とか $\cos\theta\to0$ とか)微分断面積を議論する場合は必ず、「2倍」して、もとの正しい微分断面積にもどさなければなりません。どうぞ忘れないでくださいね。もし忘れそうになったら、正しい微分断面積の表示を使い、事象生成のときに、正しく、通常の位相体積の半分だけ生成して重複を避けるようにしてください。

$\cos\theta=0$ のときの値も参考になるかもしれませんね。

(584a) $$\left(\frac{d\sigma}{dc}\right)^{qq'\to qq'}_{c=0}=\frac{4\pi\alpha_s^2}{s}\cdot\frac{2}{9}\cdot\frac{5}{4}$$

(584b) $$\left(\frac{d\sigma}{dc}\right)^{qq\to qq}_{c=0}=\frac{4\pi\alpha_s^2}{s}\cdot\frac{2}{9}\cdot\left(\frac{5}{4}+\frac{1}{3}\right)$$

p. 161 (488)
「ジェット」として較べるため「2倍」しません。

(584c) $$\left(\frac{d\sigma}{dc}\right)^{qg\to qg}_{c=0}=\frac{4\pi\alpha_s^2}{s}\cdot\frac{2}{9}\cdot\frac{7}{2}$$

(584d) $$\left(\frac{d\sigma}{dc}\right)^{gg\to gg}_{c=0}=\frac{4\pi\alpha_s^2}{s}\cdot\frac{9}{8}\cdot\frac{27}{16}$$

「ジェット」として較べるため、「2倍」してありません。

大 p_T ジェット生成については、gg散乱が 較的有効なのかも知れません。(584b) と (584d) で正しい微分断面積を1/2で割ったのは、それぞれ q-ジェットと g ジェットが2ヶずつあるためです。qq', qq, qg, gg にかかわらず、$\cos\theta=0$ での2ジェット生成断面積の大小を比較したかったためです。

2005. 7. 13

せっかくですからここで、初めのころに計算した $q\bar{q}\to q'\bar{q}'$, $gg\to q\bar{q}$, $q\bar{q}\to gg$ の断面積もまとめておきましょう。

(585a) $$\left(\frac{d\sigma}{dc}\right)^{q\bar{q}\to q'\bar{q}'} = \frac{4\pi\alpha_s^2}{s}\cdot\frac{2}{9}\cdot\frac{1+c^2}{8}$$ p.108 (305)

(585b) $$\left(\frac{d\sigma}{dc}\right)^{gg\to q\bar{q}} = \frac{4\pi\alpha_s^2}{s}\cdot\frac{1}{12}\cdot\left\{\frac{1}{1-c}+\frac{1}{1+c}-\frac{25+c^2}{16}\right\}$$ p.129 (370) p.123 (353) p.130 (376) p.131 (377)

(585c) $$\left(\frac{d\sigma}{dc}\right)^{q\bar{q}\to gg} = \frac{4\pi\alpha_s^2}{s}\cdot\frac{16}{27}\cdot\left\{\frac{1}{1-c}+\frac{1}{1+c}-\frac{25+c^2}{16}\right\}\times\frac{1}{2}$$ 同種粒子

$q\bar{q}\to q'\bar{q}'$ では、$q\bar{q}$ 消滅の断面積がとても小さことがわかります。LHCでは $\bar{q}$ 分布も large x では小さいですから、$t\bar{t}$ 生成等以外はこの過程を無視しても「誤差の範囲」です。一方 $gg\to q\bar{q}$ はカラー因子がとても小さく、前方の増大もクォーク交換の $1/(1\pm\cos\theta)$ なのでそれほど大きくなりません。それでも $q\bar{q}\to q'\bar{q}'$ に較べれば3倍程大きく、LHCでは gg 衝突のルミノシティーが大きいので、$t\bar{t}$ 生成は $gg\Rightarrow t\bar{t}$ が圧倒的に重要であることが分かります。$q\bar{q}\to gg$ はカラー因子が違うだけです。

(586) $qqgg$ 過程のカラー因子
$$\begin{cases} \frac{16}{3}\times\frac{1}{8}\times\frac{1}{3} = \frac{2}{9} & \cdots\ q\bar{q}\to q\bar{q} \\ \frac{16}{3}\times\frac{1}{8}\times\frac{1}{8} = \frac{1}{12} & \cdots\ gg\to q\bar{q} \\ \frac{16}{3}\times\frac{1}{3}\times\frac{1}{3} = \frac{16}{27} & \cdots\ q\bar{q}\to gg \end{cases}$$

2005.7.14

グルーオン(光子)の偏極ヴェクトル $\epsilon^\mu(k,\lambda)$ のゲージについて。

p.59-p.60 で私が用いているグルーオン(光子)の偏極 vector は特殊な(HELAS) light cone gauge で

$$
(587)\quad
\begin{cases}
n_\mu \epsilon^\mu(k,\lambda) = 0 \\
n^2 = 0, \quad n^\mu = (|\mathbf{k}|, -\mathbf{k}), \quad n\cdot k = |\mathbf{k}|^2 + \mathbf{k}\cdot\mathbf{k} = 2|\mathbf{k}|^2 > 0
\end{cases}
$$

を満たすように定められていることを説明しました。このゲージ選択は1985年当時、重いベクトルボソンを含む汎用の数値計算法の確立を目指していた私にとっては最も自然なもので、この選択の結果、HELAS 振幅に現れるグルオンや光子の偏極ベクトルは、任意の Lorentz 系で、重いベクトルボソン(WやZ)の偏極ベクトルのヘリシティー ±1(横波)成分と全く同じであり、区別がないのです。重い粒子のヘリシティーは座標系に依存し、且つ、それぞれの座標系での粒子の運動量ヴェクトルの向きのスピン偏極ですから、その横波成分は、自身の運動量の逆向きの light-like vector n^μ (587) による light-cone gauge の質量ゼロヴェクトルボソンの偏極ベクトルに一致します。(587)の結果、$gg \to gg$ 振幅等の計算で、自身と反対の向きをもつ運動量ヴェクトルとの内積がゼロとなりました。p.185 (554)参。にもかかわらず、(556)、(574)では多くの項が残りました。

80年代後半から現在にいたるまで、多くの方が多重グルオン散乱振幅を早く正確に計算するための努力を続けており、その中で、(587)のゲージヴェクトル n^μ の選択に多大な考慮が払われているようです。「重いボソンと同じ偏極ヴェクトルを用いる」というHELASの規格をはずせば、質量ゼロ vector boson の偏極ベクトルは全く自由にとれるわけです。例えば(556)式で、$gg \to gg$ 振幅は偏極ベクトルの内積

(588) $\epsilon(p_i, \lambda_i) \cdot \epsilon(p_j, \lambda_j)$

を必ず含むのですが、全ての偏極ベクトルに対して同じ(共通の)ゲージ(n^μ)を使うと、つまり、全ての ϵ ベクトルが唯一の n^μ を使って

(589) $n_\mu \epsilon^\mu(p_i, \lambda_i) = 0$; n^μ は共通 $(n^2=0,\ n\cdot p_i > 0)$

を満たすと、終状態グルオンのヘリシティーの符号を反転させる(551)″のヘリシティー

(590) $\begin{cases} \lambda'_i = \lambda_i \ \text{if}\ p_i^0 > 0 & \cdots \text{入射グルオン} \quad (i=1,2) \\ \lambda'_i = -\lambda_i \ \text{if}\ p_i^0 < 0 & \cdots \text{終グルオン} \quad (i=3,4) \end{cases}$

を使って

(591) $\epsilon(p_i, \lambda'_i = \lambda) \cdot \epsilon(p_j, \lambda'_j = \lambda) = 0$

が証明される。つまり、

2005. 7. 14

(592) $M_{\lambda\lambda\lambda\lambda} = N_{\lambda\lambda\lambda\lambda\lambda} = 0$

は (589) のゲージでは自明なのです。次に、

(593) $n^\mu = p_i^\mu \quad \text{for } \epsilon^\mu(p_k, \lambda_k), \; p_k \neq p_i \; (p_k \cdot p_i > 0)$

ととると、

(594) $\epsilon(p_k, \lambda'_k = \lambda) \cdot \epsilon(p_i, \lambda'_i = -\lambda) = 0$

を示すことができます。ここで $\epsilon^\mu(p_i, \lambda_i)$ は他のゲージ (例えばHELAS ゲージ) 何でも良いのです。(594) から

(595) $M_{\lambda\lambda\lambda-\lambda} = M_{\lambda\lambda-\lambda\lambda} = M_{\lambda-\lambda\lambda\lambda} = M_{-\lambda\lambda\lambda\lambda} = 0$

が導かれます、重要なことは、この結果は n-gluon 振幅に対して有効で；

(596)
$$\begin{cases} M_{\lambda\lambda\lambda\cdots\lambda} = 0 \\ M_{\lambda\lambda\cdots\lambda-\lambda} = M_{\lambda\cdots\lambda-\lambda\lambda\cdots\lambda} = M_{-\lambda\lambda\cdots\lambda} = 0 \end{cases}$$

が導かれることです。このことから、少なくとも二つ、ヘリシティーの異なる振幅がゼロでない可能性を持つわけで、これをMHV振幅と呼びます。4日前では、このMHV振幅が、実はヘリシティー保存振幅であることを、見ました。MHV振幅が重要なのは、他の (よりヘリシティー保存の) 振幅をMHV振幅を核として作ることができるからのようです。さて、(594)を満たすゲージをとると、$M_{\lambda\lambda-\lambda-\lambda}$, $M_{\lambda-\lambda\lambda-\lambda}$, $M_{\lambda-\lambda-\lambda\lambda}$ のそれぞれについて、

ゼロにならない $\epsilon_i\cdot\epsilon_j$ は唯一組

(597) $\epsilon(p_k, \lambda'=-\lambda)\cdot\epsilon(p_i, \lambda'=-\lambda) \neq 0$

だけであることがわかります。つまり、このゲージでは、(556)式、(574)式でゼロでないのは、それぞれ、唯一項だけであることが分かります。解析的な計算はこの様にして簡略化されたのです。

この様に一般の light-cone gauge での $\epsilon^\mu(p_i, \lambda_i)$ の表式が有用なので、ここで求めてみましょう。ヒントは、ゼロ質量粒子のヘリシティーは保存量なので、どこか一つの Lorentz 系（グルオンの運動量 p^μ と「ゲージ」運動量 $n^\mu=k^\mu$ で定義される系）で円偏光であれば、そのヘリシティは全ての Lorentz 系で不変なことです。その特別な系として

(598) $p\cdot k>0$ のとき、$\mathbf{p}+\mathbf{k}=0$ 系 $\quad [\,n^\mu=(|\mathbf{k}|, \mathbf{k})\,]$

を選びます。z 軸を $\mathbf{p}$ の向きにとったときに、例えば

(599) $\epsilon^\mu(p,\lambda) = \frac{1}{\sqrt{2}}(0, 1, \lambda i, 0) \qquad [\,=-\lambda\,\epsilon^\mu(p,\lambda)_{HELAS}\,]$

ととれば、この偏極ベクトルは Lorentz 変換をするだけで全ての系でヘリシティー λ の偏極ベクトルとなるわけです。(598) 系では

(600) $p^\mu=(|\mathbf{p}|, 0, 0, |\mathbf{p}|)\,, \quad n^\mu=k^\mu=(|\mathbf{p}|, 0, 0, -|\mathbf{p}|)$

ですから

(601) $p \cdot \epsilon(p,\lambda) = k \cdot \epsilon(p,\lambda) = 0$

は自明ですね。ところで、(599) のベクトル、私の講義で出て来たのですが覚えていますか？ 講義IV, p.87 (236)式の e^+e^-消滅のカレントは

(602)
$$J^{\mu}_{\lambda,-\lambda} \equiv \bar{v}(k,-\lambda)\gamma^{\mu}u(p,\lambda) \qquad \text{p.86 (231)}$$
$$= v(k,-\lambda)^{+}_{\lambda}\sigma^{\mu}_{\lambda}u(p,\lambda)_{\lambda} \qquad (233)$$
$$= -\sqrt{s}\,\chi^{+}_{\lambda}(k)\sigma^{\mu}_{\lambda}\chi_{\lambda}(p) \qquad (233)$$
$$= -\sqrt{s}\,(0,\ 1,\ \lambda i,\ 0) \qquad \text{p.87 (236)}$$

でした。つまり，$n^{\mu}=k^{\mu}$ がなんであれ，$k^2=0$ で $p\cdot k>0$ だったら，$\vec{p}+\vec{k}=0$ 系での質量ゼロフェルミオン対のカレントは，フェルミオンのヘリシティーをヘリシティーとするベクトルの偏極ベクトルなのです。一般のLorentz系では

(603)
$$\epsilon^{\mu}(p,\lambda;n^{\mu}=k^{\mu}) = \frac{-1}{2\sqrt{p\cdot k}}\,\bar{v}(k,-\lambda)\gamma^{\mu}u(p,\lambda)$$

と表わされます。(599) と ~~は全体の~~ 符号 ~~が違いますが気にならないとおもいます~~ を合わせました。

この表示では，終状態グルオン（光子）の偏極ベクトルは単に

(604)
$$\epsilon^{\mu}(p,\lambda;n^{\mu}=k^{\mu})^{*} = \epsilon^{\mu}(p,-\lambda;n^{\mu}=k^{\mu}) \quad ;\text{参}\begin{bmatrix}\epsilon^{\mu}(p,\lambda)^{*}_{\text{HELAS}}\\ = -\epsilon^{\mu}(p,-\lambda)_{\text{HELAS}}\end{bmatrix}$$

を確認してください。つまり，終状態グルオン・光子の偏極ベクトルは，単にヘリシティーを逆に読めば良いわけです。表式(603)では(601)は

$$(605)\begin{cases} p\cdot\epsilon(p,\lambda;n^\mu=k^\mu) = \frac{-1}{2\sqrt{p\cdot k}}\,\bar{v}(k,\lambda)\underbrace{\not{p}\,u(p,\lambda)} = 0 \\ k\cdot\epsilon(p,\lambda;n^\mu=k^\mu) = \frac{-1}{2\sqrt{p\cdot k}}\,\underbrace{\bar{v}(k,\lambda)\not{k}}\,u(p,\lambda) = 0 \end{cases}$$

の様に、単にゼロ質量Dirac粒子の運動方程式の帰結です。

さて、基本定理(591)と(594)を証明する準備が整いました。

(602)を用いて、(603)の定義式をヘリシティースピノールとσ_λ^μ行列で表わします。

$$(606)\quad \epsilon^\mu(p,\lambda;n^\mu=k^\mu) = \frac{-1}{2\sqrt{p\cdot k}}\,\bar{v}(k,-\lambda)\gamma^\mu u(p,\lambda) = \frac{\sqrt{|\mathbb{p}||\mathbb{k}|}}{\sqrt{p\cdot k}}\chi_\lambda^\dagger(\mathbb{k})\sigma_\lambda^\mu\chi_\lambda(\mathbb{p})$$

あとは SU(2) の Fierz 則を使うだけです。

$$(607)\quad T^a{}_{ij}T^a{}_{kl} = T_F(\delta_{il}\delta_{kj} - \frac{1}{N}\delta_{ij}\delta_{kl}) \qquad \cdots SU(N)$$

$$(607)'\quad \boldsymbol{\sigma}_{ij}\boldsymbol{\sigma}_{kl} = 2(\delta_{il}\delta_{kj} - \frac{1}{2}\delta_{ij}\delta_{kl}) \qquad \cdots SU(2),\ T_F=2$$

$$(607)''\quad (\sigma_\lambda^\mu)_{ij}(\sigma_{\lambda\mu})_{kl} = \delta_{ij}\delta_{kl} - \boldsymbol{\sigma}_{ij}\boldsymbol{\sigma}_{kl} = 2(\delta_{ij}\delta_{kl} - \delta_{il}\delta_{kj})$$

$$(607)'''\quad (\sigma_\lambda^\mu)_{ij}(\sigma_{-\lambda\mu})_{kl} = \delta_{ij}\delta_{kl} + \boldsymbol{\sigma}_{ij}\boldsymbol{\sigma}_{kl} = 2\delta_{il}\delta_{kj}$$

準備完了です。

$$\begin{aligned}(608)\quad \epsilon(p,\lambda;n^\mu=k^\mu)\cdot\epsilon(p',\lambda;n^\mu=k^\mu) &\propto \frac{1}{2}\chi_\lambda^\dagger(\mathbb{k})\sigma_\lambda^\mu\chi_\lambda(\mathbb{p})\,\chi_\lambda^\dagger(\mathbb{k})\sigma_{\lambda\mu}\chi_\lambda(\mathbb{p}') \\ &= \chi_\lambda^\dagger(\mathbb{k})\chi_\lambda(\mathbb{p})\,\chi_\lambda^\dagger(\mathbb{k})\chi_\lambda(\mathbb{p}') - \chi_\lambda^\dagger(\mathbb{k})\chi_\lambda(\mathbb{p}')\,\chi_\lambda^\dagger(\mathbb{k})\chi_\lambda(\mathbb{p}) \\ &= 0\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(609)\quad \epsilon(p,\lambda;n^\mu=k^\mu)\cdot\epsilon(k,-\lambda;n^\mu=p^\mu) &\propto \frac{1}{2}\chi_\lambda^\dagger(\mathbb{k})\sigma_\lambda^\mu\chi_\lambda(\mathbb{p})\,\chi_{-\lambda}^\dagger(\mathbb{p}')\sigma_{-\lambda\mu}\chi_{-\lambda}(\mathbb{k}) \\ &= \underbrace{\chi_\lambda^\dagger(\mathbb{k})\chi_{-\lambda}(\mathbb{k})}\,\chi_{-\lambda}^\dagger(\mathbb{p}')\chi_\lambda(\mathbb{p}) = 0 \qquad //\text{完}.\end{aligned}$$

2005. 7. 15

さて、せっかく(608)と(609)を証明したのですから、light cone gauge (606)を使って $M^{\lambda_3\lambda_4}_{\lambda_1\lambda_2} = M^{\lambda\lambda}_{\lambda\lambda} = M_{\lambda\lambda-\lambda-\lambda}$ を計算してHELASゲージの結果(557)と較べてみましょう。散乱振幅のゲージ不変性により、違いは高々位相因子(全ての振幅に共通の因子)であるはずです。ゲージのchoiceは

$$(610)\quad \begin{cases} \epsilon_1^\mu = \epsilon^\mu(p_1,\lambda\,;\, n=p_3) \\ \epsilon_2^\mu = \epsilon^\mu(p_2,\lambda\,;\, n=p_3) \\ \epsilon_3^\mu = \epsilon^\mu(p_3,\lambda\,;\, n=p_1)^* = \epsilon^\mu(p_3,-\lambda\,;\, n=p_1) \\ \epsilon_4^\mu = \epsilon^\mu(p_4,\lambda\,;\, n=p_1)^* = \epsilon^\mu(p_4,-\lambda\,;\, n=p_1) \end{cases}$$

とします。定理(608)と(609)により

$$(611)\quad \begin{cases} \epsilon_1\cdot\epsilon_2 = \epsilon_3\cdot\epsilon_4 = 0 & \cdots (608) \\ \epsilon_1\cdot\epsilon_3 = \epsilon_1\cdot\epsilon_4 = \epsilon_2\cdot\epsilon_3 = 0 & \cdots (609) \end{cases}$$

生き残るのは $\epsilon_2\cdot\epsilon_4$ だけです。ゲージ不変な表式(543)″から出発すると[表式(556)はHELASゲージの等式(554)を使ってしまったので、(543)″にもどります。]

$$(612)\quad M^{\lambda\lambda}_{\lambda\lambda} = M_{\lambda\lambda-\lambda-\lambda} = \epsilon_2\cdot\epsilon_4\left\{2\frac{p_4\cdot\epsilon_1\ p_2\cdot\epsilon_3}{p_1\cdot p_4} + 2\frac{p_4\cdot\epsilon_3\ p_2\cdot\epsilon_1}{p_1\cdot p_2}\right\}$$

⊖ $[p_4 \to -p_4]$ ……(554)の p_3 と p_4 は符号が逆でした。

さて計算ですが、(610)の ϵ_1^μ を求めてみましょう。($\mathbb{P}_1+\mathbb{P}_2=\mathbb{P}_3+\mathbb{P}_4=0$ 系；(552))

$$(613)\quad \epsilon_1^\mu = \epsilon^\mu(p_1,\lambda\,;n=p_3) = \frac{-1}{2\sqrt{p_1\cdot p_3}}\,\bar v(p_3,-\lambda)\gamma^\mu u(p_1,\lambda) \qquad \cdots (606)$$

$$= +\frac{\sqrt{E_1E_3}}{\sqrt{p_1\cdot p_3}}\,\chi_\lambda^\dagger(\mathbb{P}_3)\,\sigma_\lambda^\mu\,\chi_\lambda(\mathbb{P}_1) \qquad \cdots \text{p. 65 (142),(145)}$$

$$= +\frac{1}{\sqrt{1-\cos\theta}}\begin{cases}(\cos\tfrac{\theta}{2},\sin\tfrac{\theta}{2})\,[1,\sigma]\,\binom{1}{0}\ [\lambda=+] \\ (-\sin\tfrac{\theta}{2},\cos\tfrac{\theta}{2})\,[1,-\sigma]\,\binom{0}{1}\ [\lambda=-]\end{cases} \qquad (\theta,\phi)=\begin{cases}(\theta,0)\cdots\mathbb{P}_3\\(0,0)\cdots\mathbb{P}_1\end{cases}$$

2005. 7. 15

$$(613)' \quad \epsilon_1^\mu = \epsilon^\mu(p_1,\lambda; n=p_3) = +\frac{1}{\sqrt{1-c}}\begin{cases}(\cos\frac{\theta}{2},\sin\frac{\theta}{2})\left[\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\i\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}\right] & \lambda=+\\ (-\sin\frac{\theta}{2},\cos\frac{\theta}{2})\left[\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}-1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}i\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\right] & \lambda=-\end{cases}$$

$$= +\frac{1}{\sqrt{1-c}}\begin{cases}(\cos\frac{\theta}{2},\ \sin\frac{\theta}{2},\ i\sin\frac{\theta}{2},\ \cos\frac{\theta}{2}) & \lambda=+\\ (\cos\frac{\theta}{2},\ \sin\frac{\theta}{2},\ -i\sin\frac{\theta}{2},\ \cos\frac{\theta}{2}) & \lambda=-\end{cases}$$

$$= +\frac{1}{\sqrt{1-\cos\theta}}\left(\cos\frac{\theta}{2},\ \sin\frac{\theta}{2},\ \lambda i\sin\frac{\theta}{2},\ \cos\frac{\theta}{2}\right)$$

確かに $p_1\cdot\epsilon_1 = p_3\cdot\epsilon_1 = 0$ で $\epsilon_1\cdot\epsilon_1^* = -1$ ですね。次は

$$(614) \quad \epsilon_2^\mu = \epsilon^\mu(p_2,\lambda; n=p_3) = +\sqrt{\frac{E_2E_3}{p_2\cdot p_3}}\ \chi_\lambda^\dagger(\mathbb{p}_3)\,\sigma_\lambda^\mu\,\chi_\lambda(\mathbb{p}_2)$$

$$= +\frac{1}{\sqrt{1+c}}\begin{cases}(\cos\frac{\theta}{2},\sin\frac{\theta}{2})\left[1,\ \boldsymbol{\sigma}\right]\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} & \lambda=+\\ (-\sin\frac{\theta}{2},\cos\frac{\theta}{2})\left[1,-\boldsymbol{\sigma}\right]\begin{pmatrix}-1\\0\end{pmatrix} & \lambda=-\end{cases}$$

$(\theta;\pi)=(\pi,\ 0)\cdots \mathbb{p}_2$

$$= +\frac{1}{\sqrt{1+c}}\begin{cases}(\cos\frac{\theta}{2},\sin\frac{\theta}{2})\left[\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}-i\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\-1\end{pmatrix}\right] & \lambda=+\\ (-\sin\frac{\theta}{2},\cos\frac{\theta}{2})\left[\begin{pmatrix}-1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\+1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\i\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}\right] & \lambda=-\end{cases}$$

$$= +\frac{1}{\sqrt{1+\cos\theta}}\begin{cases}(\sin\frac{\theta}{2},\ \cos\frac{\theta}{2},\ -i\cos\frac{\theta}{2},\ -\sin\frac{\theta}{2}) & \lambda=+\\ (\sin\frac{\theta}{2},\ +\cos\frac{\theta}{2},\ i\cos\frac{\theta}{2},\ -\sin\frac{\theta}{2}) & \lambda=-\end{cases}$$

$$= +\frac{1}{\sqrt{1+\cos\theta}}\left(\sin\frac{\theta}{2},\ \cos\frac{\theta}{2},\ -\lambda i\cos\frac{\theta}{2},\ -\sin\frac{\theta}{2}\right)$$

$$(615) \quad \epsilon_3^\mu = \epsilon^\mu(p_3,-\lambda; n=p_1) = +\sqrt{\frac{E_1E_3}{p_1\cdot p_3}}\ \chi_{-\lambda}^\dagger(\mathbb{p}_1)\,\sigma_{-\lambda}^\mu\,\chi_{-\lambda}(\mathbb{p}_3)$$

$$= +\frac{1}{\sqrt{1-c}}\begin{cases}(1,0)\left[1,\ \boldsymbol{\sigma}\right]\begin{pmatrix}\cos\frac{\theta}{2}\\ \sin\frac{\theta}{2}\end{pmatrix} & -\lambda=+\\ (0,1)\left[1,-\boldsymbol{\sigma}\right]\begin{pmatrix}-\sin\frac{\theta}{2}\\ \cos\frac{\theta}{2}\end{pmatrix} & -\lambda=-\end{cases}$$

(615)' $\epsilon_3^\mu = \epsilon^\mu(P_3, -\lambda; n = P_1) = \frac{1}{\sqrt{1-c}} \begin{cases} [(1,0),(0,1),(0,-i),(1,0)] \begin{pmatrix} \cos\frac{\theta}{2} \\ \sin\frac{\theta}{2} \end{pmatrix} & -\lambda = + \\ [(0,1),(-1,0),(-i,0),(0,1)] \begin{pmatrix} -\sin\frac{\theta}{2} \\ \cos\frac{\theta}{2} \end{pmatrix} & -\lambda = - \end{cases}$

$$= \frac{1}{\sqrt{1-c}} \begin{cases} (\cos\frac{\theta}{2}, \sin\frac{\theta}{2}, -i\sin\frac{\theta}{2}, \cos\frac{\theta}{2}) & -\lambda = + \\ (\cos\frac{\theta}{2}, \sin\frac{\theta}{2}, i\sin\frac{\theta}{2}, \cos\frac{\theta}{2}) & -\lambda = - \end{cases}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{1-\cos\theta}} (\cos\frac{\theta}{2}, \sin\frac{\theta}{2}, \lambda i \sin\frac{\theta}{2}, \cos\frac{\theta}{2})$$

(616) $\epsilon_4^\mu = \epsilon^\mu(P_4, -\lambda; n = P_1) = \sqrt{\frac{E_1 E_4}{P_1 \cdot P_4}} \, \chi_{-\lambda}^{+}(P_1) \, \sigma_{-\lambda}^{\mu} \, \chi_{-\lambda}(P_4)$ $\qquad (\theta;\phi) = (\pi-\theta, \pi) \cdots P_4$

$$= \frac{1}{\sqrt{1+c}} \begin{cases} [(1,0),(0,1),(0,-i),(1,0)] \begin{pmatrix} \sin\frac{\theta}{2} \\ -\cos\frac{\theta}{2} \end{pmatrix} & -\lambda = + \\ [(0,1),(-1,0),(-i,0),(0,1)] \begin{pmatrix} \cos\frac{\theta}{2} \\ \sin\frac{\theta}{2} \end{pmatrix} & -\lambda = - \end{cases}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{1+c}} \begin{cases} (\sin\frac{\theta}{2}, -\cos\frac{\theta}{2}, i\cos\frac{\theta}{2}, \sin\frac{\theta}{2}) & -\lambda = + \\ (\sin\frac{\theta}{2}, -\cos\frac{\theta}{2}, -i\cos\frac{\theta}{2}, \sin\frac{\theta}{2}) & -\lambda = - \end{cases}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{1+\cos\theta}} (\sin\frac{\theta}{2}, -\cos\frac{\theta}{2}, -\lambda i \cos\frac{\theta}{2}, \sin\frac{\theta}{2})$$

(617) $P_4 \cdot \epsilon_1 = \frac{E}{\sqrt{1-\cos\theta}} (1, -\sin\theta, 0, -\cos\theta) \cdot (\cos\frac{\theta}{2}, \sin\frac{\theta}{2}, \lambda i \sin\frac{\theta}{2}, \cos\frac{\theta}{2})$

$$= \frac{E}{\sqrt{1-\cos\theta}} (\cos\frac{\theta}{2} + \sin\theta \sin\frac{\theta}{2} + \cos\theta\cos\frac{\theta}{2})$$

$$= \frac{E}{\sqrt{1-\cos\theta}} \cos\frac{\theta}{2} (1 + 2\sin^2\frac{\theta}{2} + \cos\theta)$$

$$= \frac{2E}{\sqrt{1-\cos\theta}} \cos\frac{\theta}{2}$$

(617)' $P_2 \cdot \epsilon_3 = \frac{E}{\sqrt{1-\cos\theta}} (1, 0, 0, -1) \cdot (\cos\frac{\theta}{2}, \sin\frac{\theta}{2}, \lambda i \sin\frac{\theta}{2}, \cos\frac{\theta}{2})$

$$= \frac{2E}{\sqrt{1-\cos\theta}} \cos\frac{\theta}{2}$$

(617)'' $P_4 \cdot \epsilon_3 = \frac{E}{\sqrt{1-\cos\theta}} (1, -\sin\theta, 0, -\cos\theta) \cdot (\cos\frac{\theta}{2}, \sin\frac{\theta}{2}, \lambda i \sin\frac{\theta}{2}, \cos\frac{\theta}{2})$

$$= \frac{E}{\sqrt{1-\cos\theta}} (\cos\frac{\theta}{2} + \sin\theta\sin\frac{\theta}{2} + \cos\theta\cos\frac{\theta}{2}) = \frac{2E}{\sqrt{1-\cos\theta}} \cos\frac{\theta}{2}$$

2005. 7. 15

$$(619)''' \quad p_2\cdot\epsilon_1 = \frac{E}{\sqrt{1-\cos\theta}}\,(1,0,0,-1)\cdot\left(\cos\frac{\theta}{2},\ \sin\frac{\theta}{2},\ \lambda i\sin\frac{\theta}{2},\ \cos\frac{\theta}{2}\right)$$

$$= \frac{2E}{\sqrt{1-\cos\theta}}\cos\frac{\theta}{2}$$

$$(617)'''' \quad \epsilon_2\cdot\epsilon_4 = \frac{1}{1+\cos\theta}\left(\sin\frac{\theta}{2},\ \cos\frac{\theta}{2},\ -\lambda i\cos\frac{\theta}{2},\ -\sin\frac{\theta}{2}\right)\cdot\left(\sin\frac{\theta}{2},\ -\cos\frac{\theta}{2},\ -\lambda i\cos\frac{\theta}{2},\ \sin\frac{\theta}{2}\right)$$

$$= \frac{1}{1+\cos\theta}\left(\sin^2\frac{\theta}{2}+\cos^2\frac{\theta}{2}+\cos^2\frac{\theta}{2}+\sin^2\frac{\theta}{2}\right)$$

$$= \frac{2}{1+\cos\theta}$$

以上全てを(612)に代入すると　[(612)式の p_4 は $-p_4$ であることに注意して]

$$(618)\quad M^{\lambda\lambda}_{\lambda\lambda} = M_{\lambda\lambda-\lambda-\lambda} = \frac{2}{1+\cos\theta}\left\{\frac{2}{E^2(1+\cos\theta)}\,\frac{2E\cos\frac{\theta}{2}}{\sqrt{1-\cos\theta}}\,\frac{2E\cos\frac{\theta}{2}}{\sqrt{1-\cos\theta}} - \frac{2}{2E^2}\,\frac{2E\cos\frac{\theta}{2}}{\sqrt{1-\cos\theta}}\,\frac{2E\cos\frac{\theta}{2}}{\sqrt{1-\cos\theta}}\right\}$$

$$= \frac{4}{1+\cos\theta}\left\{\frac{2\,\cancel{(1+\cos\theta)}}{\cancel{(1+\cos\theta)}(1-\cos\theta)} - \frac{1+\cos\theta}{1-\cos\theta}\right\}$$

$$= \frac{4}{1+\cos\theta}\,\frac{2-(1+\cos\theta)}{1-\cos\theta}$$

$$= \frac{4}{1+\cos\theta}$$

これはバンザーイですね！　(612)式は見かけは簡単だけれど、実際の計算を手でやるのは大変でした。偏極ベクトル(606)はbi-spinorカレントにすぎないのでHELASコードを使って数値的に計算すればprogramのスピードアップが可能かも知れません。

この方法を使って手で計算するのはちょっと手いっぱいです。例えば一番やっかいな $M^{-\lambda\lambda}_{\lambda-\lambda} = M_{\lambda-\lambda\lambda-\lambda}$ (561)を一項にしようとすると、ゲージを

2005. 7. 15

(610) から変更しなければなりません。正しい choice は例えば

(619) $\epsilon_1^\mu = \epsilon^\mu(p_1, \lambda \;;\; n = p_2)$

$\epsilon_2^\mu = \epsilon^\mu(p_2, -\lambda \;;\; n = p_1)$

$\epsilon_3^\mu = \epsilon^\mu(p_3, \lambda \;;\; n = p_2)$

$\epsilon_4^\mu = \epsilon^\mu(p_4, -\lambda \;;\; n = p_1)$

です。これだと ϵ_1^μ, ϵ_2^μ は HELAS ゲージですね。ゼロになるのは

(620) $\epsilon_1 \cdot \epsilon_3 = \epsilon_2 \cdot \epsilon_4 = 0$ ... (608)

$\epsilon_1 \cdot \epsilon_2 = \epsilon_2 \cdot \epsilon_3 = \epsilon_1 \cdot \epsilon_4 = 0$ ... (609)

(543)'' で p_3^μ と p_4^μ の符号が逆であることを注意すると [ここでは p_3^μ と p_4^μ を物理的と思って全て計算してしまったので]

(621) $$M_{\lambda-\lambda}^{-\lambda\lambda} = M_{\lambda-\lambda\lambda-\lambda} = \epsilon_3 \cdot \epsilon_4 \left\{ 2 \frac{p_3 \cdot \epsilon_2 \; p_4 \cdot \epsilon_1}{p_1 \cdot p_4} \right\}$$

あっ、これはすごいですね。$p_1 \cdot \epsilon_2 = p_2 \cdot \epsilon_1 = 0$ なのでこれしか残りません。

(622) $\epsilon_1^\mu = \epsilon^\mu(p_1, \lambda \,;\, n = p_2) = \frac{1}{\sqrt{2}}(0, 1, \lambda i, 0)$

(622)' $\epsilon_2^\mu = \epsilon^\mu(p_2, -\lambda \,;\, n = p_1) = \frac{1}{\sqrt{2}}(0, 1, \lambda i, 0)$

} 符号を除いて HELAS と一致

(622)'' $$\epsilon_3^\mu = \epsilon^\mu(p_3, \lambda \,;\, n = p_2) = \sqrt{\frac{E_2 E_3}{p_2 \cdot p_3}} \, \chi_\lambda^\dagger(\mathbb{p}_2) \, \sigma_\lambda^{\dagger} \, \chi_\lambda(\mathbb{p}_3)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{1+c}} (0, 1) [1, \sigma] \begin{pmatrix} \cos\frac{\theta}{2} \\ \sin\frac{\theta}{2} \end{pmatrix} \qquad \cdots \lambda = +$$

$$= \frac{1}{\sqrt{1+\cos\theta}} \left(\sin\frac{\theta}{2}, \cos\frac{\theta}{2}, \lambda i \cos\frac{\theta}{2}, -\sin\frac{\theta}{2} \right)$$

(622)''' $$\epsilon_4^\mu = \epsilon^\mu(p_4, -\lambda \,;\, n = p_1) = \sqrt{\frac{E_1 E_4}{p_1 \cdot p_4}} \, \chi_{-\lambda}^\dagger(\mathbb{p}_1) \, \sigma_{-\lambda}^{\dagger} \, \chi_{-\lambda}(\mathbb{p}_4)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{1+c}} (1, 0) [1, \sigma] \begin{pmatrix} \sin\frac{\theta}{2} \\ -\cos\frac{\theta}{2} \end{pmatrix} \qquad \cdots -\lambda = +$$

$$= \frac{1}{\sqrt{1+\cos\theta}} \left(\sin\frac{\theta}{2}, -\cos\frac{\theta}{2}, -\lambda i \cos\frac{\theta}{2}, \sin\frac{\theta}{2} \right)$$

(623) $\epsilon_3 \cdot \epsilon_4 = \frac{1}{1+\cos\theta}\left(\sin^2\frac{\theta}{2} + \cos^2\frac{\theta}{2} - \cos^2\frac{\theta}{2} + \sin^2\frac{\theta}{2}\right) = \frac{2\sin^2\frac{\theta}{2}}{1+\cos\theta}$

$= \frac{1-\cos\theta}{1+\cos\theta}$

(623)' $P_3 \cdot \epsilon_2 = \frac{E}{\sqrt{2}}(1, \sin\theta, 0, \cos\theta) \cdot (0, 1, \lambda i, 0)$

$= -\frac{E}{\sqrt{2}}\sin\theta$

(623)'' $P_4 \cdot \epsilon_1 = \frac{E}{\sqrt{2}}(1, -\sin\theta, 0, -\cos\theta) \cdot (0, 1, \lambda i, 0)$

$= \frac{E}{\sqrt{2}}\sin\theta$

これらを (621) に代入すると

(624) $M^{-\lambda\lambda}_{\lambda-\lambda} = M_{\lambda-\lambda\lambda-\lambda} = \frac{1-\cos\theta}{1+\cos\theta} \cdot \frac{2}{E^2(1+\cos\theta)} \cdot \left(-\frac{E}{\sqrt{2}}\sin\theta\right) \cdot \left(\frac{E}{\sqrt{2}}\sin\theta\right)$

$= -\frac{1-\cos\theta}{(1+\cos\theta)^2}\sin^2\theta$

$= -\frac{(1-\cos\theta)^2}{1+\cos\theta}$

今度はサインまで含めて (561) と完全に一致しました。HELAS 振幅との相対位相が $M^{\lambda\lambda}_{\lambda\lambda}$ の場合と逆になってしまいましたが、もともと、この方法ではヘリシティー振幅毎に異なる偏極ベクトルを使っているので、[$M^{\lambda\lambda}_{\lambda\lambda}$ のときの (610) 式と $M^{-\lambda\lambda}_{\lambda-\lambda}$ のときの (619) 式]、ヘリシティー振幅間の相対位相はゲージ依存します。グルオンジェットの ~~■~~ 線偏光 ~~■■~~ (運動量と垂直方向の偏極；~~■■■~~ グルオンが面状に扇状ジェットになったときの扇の向きを決める偏極です) を

調べるときには注意が必要です。線偏光は異なるヘリシティー振幅の干渉によって定まるからです。HELASを使えば安全ですが、一般の偏極ベクトル(606)とHELAS偏極ベクトルの相対位相を計算しておくことにします。

HELAS偏極ベクトルは、(606)のスピノール表示を用いると、

$$(625)\quad \epsilon^{\mu}(p,\lambda)_{HELAS} = -\lambda\frac{1}{\sqrt{2}}\chi_{\lambda}^{\dagger}(-\mathbb{p})\,\sigma_{\lambda}^{\mu}\qquad\chi_{\lambda}(\mathbb{p})$$

です。…のはずですけれど、check しましょう。この表式を使うと、

$$(626)\quad \epsilon^{\mu}(p,\lambda)^{\lambda=+}_{HELAS} = -\frac{1}{\sqrt{2}}\chi_{+}^{\dagger}(-\mathbb{p})\,\sigma_{+}^{\mu}\,\chi_{+}(\mathbb{p}) \qquad \begin{array}{l}(\theta,\phi)=(\theta,\phi)\cdots\mathbb{p}\\ (\pi-\theta,\pi+\phi)\cdots-\mathbb{p}\end{array}$$

$$= -\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\sin\frac{\theta}{2}, -\cos\frac{\theta}{2}e^{-i\phi}\right)\left[1, \boldsymbol{\sigma}\right]\begin{pmatrix}\cos\frac{\theta}{2}\\ \sin\frac{\theta}{2}e^{i\phi}\end{pmatrix}$$

$$= -\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\sin\frac{\theta}{2}, -\cos\frac{\theta}{2}e^{-i\phi}\right)\left[\begin{pmatrix}\cos\frac{\theta}{2}\\ \sin\frac{\theta}{2}e^{i\phi}\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}\sin\frac{\theta}{2}e^{i\phi}\\ \cos\frac{\theta}{2}\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-i\sin\frac{\theta}{2}e^{i\phi}\\ i\cos\frac{\theta}{2}\end{pmatrix}, \underbrace{}_{\begin{pmatrix}\cos\frac{\theta}{2}\\ -\sin\frac{\theta}{2}e^{i\phi}\end{pmatrix}}\right]$$

$$= -\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2} - \cos\frac{\theta}{2}\sin\frac{\theta}{2}\\ \sin^2\frac{\theta}{2}e^{i\phi} - \cos^2\frac{\theta}{2}e^{-i\phi}\\ -i\sin^2\frac{\theta}{2}e^{i\phi} - i\cos^2\frac{\theta}{2}e^{-i\phi}\\ \sin\theta\cos\frac{\theta}{2} + \cos\frac{\theta}{2}\sin\frac{\theta}{2}\end{bmatrix}$$

$$= -\frac{1}{\sqrt{2}}\left(0, i\sin\phi - \cos\theta\cos\phi, -i\cos\phi - \cos\theta\sin\phi, \sin\theta\right)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}}\left(0, \cos\theta\cos\phi - i\sin\phi, \cos\theta\sin\phi + i\cos\phi, -\sin\theta\right)$$

これは確かに正しいですが、全体の符号が逆です。落ちついてやり直しますね。//

QCD for Collider Physics IX

2005. 7. 25

Errata

ずい分と沢山の誤りを訂正しなければなりませんので、まず、誤りのリストを作ります。

① (626)式の計算結果の符号が逆だったので、原因を調べたところ、遠因は、私が20年前に、$-z$軸(z軸と反対)の向きのベクトルを極座標で$(\theta, \phi) = (\pi, 0)$ととったことに帰着することに気がつきました。$(\theta, \phi) = (\pi, \pi)$ととっておけばこのエラーは避けられたはずなので、HELASコードを含め、変更しようと思います。

② $qg \to qg$ の振幅(507)、(508b)と断面積(510)、(511)、(583d)、(584c)に多くの誤りがありました。(507)での「書き移しミス」が伝播したものです。

③ $gg \to q\bar{q}$ と $q\bar{q} \to gg$ のカラー因子の計算(p.116の最後の式、p.130(376))で$\frac{1}{2}$の誤りがあり、断面積(380)、(585b)、(585c)を$\frac{1}{2}$倍します。

④ $qq \to qq$ の干渉項の符号(409)、(410)、(412)、(488)、(583b)、(583c)、(584b)は逆であり、$uu \to uu$散乱のhigh p_T分布は干渉により20%程度小さくなります。これは、u-channel交換の振幅(409)の符号が誤っていたためで、私が計算をせずに「直観」で答えを書いてしまったことによる誤りでした。何故「直観」が間違っていたかは興味深い問題なので、検討してみます。

以上、③と④の誤りは馬渡健太郎さんが指摘してくれました。感謝します。私の講義は正しい結果を伝えることが目的ではなく(なるべくそうしようとは勉めていますけれど)、QCDの方法、技術、考え方などを説明しようと思っています。私の誤りから学べることの方がより大切だと思いますので、一つ一つ説明をします。上記②、③、④のエラーを修正した結果、全ての2→2過程断面積が既知の結果

(627) R. Cutler, D. Sivers, PRD17, 196 (1978);
B. L. Combridge, J. Kripfganz, J. Ranft, PL70B, 234 (1977);
J. F. Owens, E. Reya, M. Glück, PRD18, 1501 (1978)

と一致しましたので、④の解説の後で、まとめの式 (583)-(585) を再掲します。//

さて、①の符号(位相)の問題の原因は、出発点として使った (602) 式が z 軸の正の向きの e^- と負の向きの e^+ の衝突カレントであり、z 軸の負の向きのスピノールを $(\theta,\phi)=(\pi,0)$ ととったためでした。$(\theta,\phi)=(\pi,\pi)$ ととっておけば

$$(628)\quad J^\mu_{\lambda,-\lambda} \equiv \bar{v}(k,-\lambda)\gamma^\mu u(p,\lambda) \qquad \text{p.86 (231)}$$

$$= -\sqrt{s}\,\chi^\dagger_\lambda(\mathbf{k})\sigma^\mu_\lambda \chi_\lambda(\mathbf{p}) \qquad \text{p.86 (233)}$$

$$= \sqrt{s}\,(0,1,\lambda i,0) \qquad \text{p.87 (236)} \times (-1)$$

となり、一般の light-cone gauge の表式 (603)、(606) は

(629) $$\epsilon^\mu(p,\lambda;n=k) = \frac{1}{2\sqrt{p\cdot k}}\bar{v}(k,-\lambda)\gamma^\mu u(p,\lambda) = -\frac{\sqrt{|\mathbb{P}||\mathbb{k}|}}{\sqrt{p\cdot k}}\chi_\lambda^\dagger(\mathbb{k})\sigma_\lambda^\mu\chi_\lambda(\mathbb{P})$$

となります。結果、HELAS ベクトル (625) は

(630) $$\epsilon^\mu(p,\lambda)_{HELAS} = -\lambda\,\epsilon^\mu(p,\lambda;n=\tilde{p}) = \lambda\frac{1}{\sqrt{2}}\chi_\lambda^\dagger(-\mathbb{P})\sigma_\lambda^\mu\chi_\lambda(\mathbb{P})$$

$$p^\mu = (|\mathbb{P}|, \mathbb{P})$$
$$\tilde{p}^\mu = (|\mathbb{P}|, -\mathbb{P})$$

となって符号の不一致は消滅します。実際、

(631) $$\epsilon^\mu(p,\lambda)_{HELAS} = \frac{1}{\sqrt{2}}(0, -\lambda\cos\theta\cos\phi + i\sin\phi, -\lambda\cos\theta\sin\phi - i\cos\phi, \lambda\sin\theta)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}}\left\{-\lambda(0, \cos\theta\cos\phi, \cos\theta\sin\phi, -\sin\theta) - i(0, -\sin\phi, \cos\phi, 0)\right\}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}}(0, -\lambda, -i, 0) \quad \cdots (\theta,\phi) = (0,0)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}}(0, -\lambda, i, 0) \quad \cdots (\theta,\phi) = (\pi,\pi)$$

スピノールについては、p.65 の (142)、(145) をもとにして

(632) $$\begin{cases} \chi_+(\mathbb{P}) = \begin{pmatrix} \cos\frac{\theta}{2} \\ \sin\frac{\theta}{2}e^{i\phi} \end{pmatrix} \begin{cases} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} & \cdots (\theta,\phi) = (0,0) \\ = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} & \cdots (\theta,\phi) = (\pi,\pi) \end{cases} \\ \chi_-(\mathbb{P}) = \begin{pmatrix} -\sin\frac{\theta}{2}e^{-i\phi} \\ \cos\frac{\theta}{2} \end{pmatrix} \begin{cases} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} & \cdots (\theta,\phi) = (0,0) \\ = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} & \cdots (\theta,\phi) = (\pi,\pi) \end{cases} \end{cases}$$

//

2005、7、25

次に②の $gg \to gg$ のエラーは、p. 167 (507) で $(1/k_2 \cdot k_4)$ を $(1/k_1 \cdot k_4)$ と書き移しまちがってしまったことに起因します。ちょっとでも気をつければ気がつくはずのエラーです。結果、(507) の第三式では $\frac{1}{1+\cos\theta} \to \frac{1}{1-\cos\theta}$ と直し、第四式と (508b) 式は、全く違ってしまいます。ここで (508) 全体を書き直します。

(633a) $$\hat{M}^{I\ \lambda_2}_{\lambda\ \lambda_2} = 2g^2\cos\frac{\theta}{2}\left\{\delta_{\lambda\lambda_2}\left[\frac{2}{1-\cos\theta}+\frac{2}{1+\cos\theta}\right]+\delta_{\lambda,-\lambda_2}\left[\frac{2}{1-\cos\theta}\right]\right\}$$

(633b) $$\hat{M}^{II\ \lambda_2}_{\lambda\ \lambda_2} = 2g^2\cos\frac{\theta}{2}\left\{\delta_{\lambda\lambda_2}\left[-\frac{2}{1-\cos\theta}\right]+\delta_{\lambda,-\lambda_2}\left[-\frac{2}{1-\cos\theta}+1\right]\right\}$$

(633c) $$\hat{M}^{II\ -\lambda_2}_{\lambda\ \lambda_2} = \hat{M}^{I\ -\lambda_2}_{\lambda\ \lambda_2} = 0$$

従って (510) と (511) は次の様になり、(583d) は $(634)''$ に (584c) は $(634)''''$ に変更。

(634) $$\frac{d\sigma}{d\cos\theta} = \frac{4\pi\alpha_s^2}{s}\left\{\frac{T_F^2(N^2-1)}{N^2}\left[\frac{4}{(1-c)^2}-\frac{2}{1-c}+\frac{1}{2}\frac{1}{1+c}+\frac{5+c}{8}\right]\right.$$
$$\left.+\left(-\frac{T_F^2}{N^2}\right)\left[-\frac{4}{(1-c)^2}+\frac{2}{1-c}-\frac{1}{2}\right]\right\}$$

$(634)'$ $$= \frac{4\pi\alpha_s^2}{s}\left\{\frac{2}{9}\left[\frac{4}{(1-c)^2}-\frac{2}{1-c}+\frac{1}{2}\frac{1}{1+c}+\frac{5+c}{8}\right]+\left(-\frac{1}{36}\right)\left[-\frac{4}{(1-c)^2}+\frac{2}{1-c}-\frac{1}{2}\right]\right\}$$

$(634)''$ $$= \frac{4\pi\alpha_s^2}{s}\cdot\frac{2}{9}\cdot\left[\frac{9}{2}\frac{1}{(1-c)^2}-\frac{9}{4}\frac{1}{1-c}+\frac{1}{2}\frac{1}{1+c}+\frac{11+2c}{16}\right]$$

$(634)'''$ $$\xrightarrow{c\to 1} \frac{4\pi\alpha_s^2}{s}\cdot\frac{2}{9}\cdot\left[\frac{9}{2}\frac{1}{(1-c)^2}-\frac{9}{4}\frac{1}{1-c}+\frac{17}{16}\right]$$

$(634)''''$ $$\xrightarrow{c\to 0} \frac{4\pi\alpha_s^2}{s}\cdot\frac{2}{9}\cdot\left[\frac{55}{16}\right]$$

//

2005. 7. 25

③のエラー（$gg \to q\bar{q}$, $q\bar{q} \to gg$ のカラー因子）も単に$\frac{1}{2}$の書き忘れでした。

p.116の最後の式で、下から2行目の$|A|^2$と$|B|^2$の係数がそれぞれ$\frac{1}{2}$倍で、最後の式 と p.132 (380) は次の通りです。

$$(635)\ \sum_{color}\sum_{spin}|M_{ij}^{ab}(\lambda_k)|^2 = \frac{7}{3}\sum_{\lambda_k}|\hat{A}_{\lambda_1\lambda_2}^{\lambda_3\lambda_4}|^2 + 3\sum_{\lambda_k}|\hat{N}_{\lambda_1\lambda_2}^{\lambda_3\lambda_4}|^2$$

$$+8\sum_{\lambda_k}\mathrm{Re}\left[(\hat{L}_{\lambda_1\lambda_2}^{\lambda_3\lambda_4})(\hat{M}_{\lambda_1\lambda_2}^{\lambda_3\lambda_4})^*\right] + 24\sum_{\lambda_k}|\hat{L}_{\lambda_1\lambda_2}^{\lambda_3\lambda_4}|^2$$

その結果、(585b)と(585c)は$\frac{1}{2}$倍となり、更に、$25+c^2$ は $25+9c^2$の誤りです。正しい表式は、次のエラーの解析の後で整理します。//

④のエラー（$qq \to qq$ の干渉項の符号）は、p.139 (409) で、カレントを実際に計算せずに、(409)式を書き下してしまったことが原因でした。

カレントを計算すると、

$$(636a)\ J_\lambda^\mu(k_1, k_4) = 2E\left(\sin\frac{\theta}{2}, -\cos\frac{\theta}{2}, -\lambda i\cos\frac{\theta}{2}, \sin\frac{\theta}{2}\right)$$

$$(636b)\ J_{\lambda'}^\mu(k_1, k_3) = 2E\left(\sin\frac{\theta}{2}, \cos\frac{\theta}{2}, -\lambda' i\cos\frac{\theta}{2}, -\sin\frac{\theta}{2}\right)$$

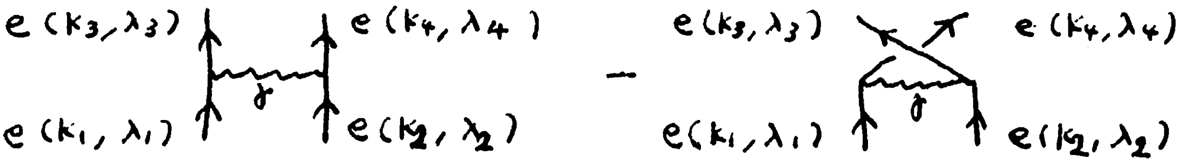
となり、(409)の符号が逆転します。

$$(637)\ \hat{M}_{\lambda\lambda'}^{(u)} \equiv \frac{g^2}{u} J_\lambda(k_1, k_4)\cdot J_{\lambda'}(k_2, k_3) = g^2\left(\frac{s}{u}\right)\times\begin{cases} 2 & \cdots\ \lambda_1=\lambda_2=\lambda_3=\lambda_4 \\ 1-\cos\theta & \cdots\ \lambda_1=-\lambda_2=\lambda_4=-\lambda_3 \end{cases}$$

この結果、(410)、(412)、(488)、(583b)、(583c)、(584b) の干渉項の符号が逆転します [(583b)では $\frac{1}{3}\to\frac{2}{3}$、(583c)では $\frac{2}{3}\to\frac{4}{3}$ です]。正しい表式は、少し後で他の $2\to2$ 過程と一緒にリストします。

ここでは何故、私が (409) 式の計算をせずに、誤った符号の式を書いてしまったか、という点について反省をしたいと思います。私の直観は、「同種フェルミオンの波動関数は反対称」⇒ だから「干渉項は相殺」というものでした。どうして逆になってしまったのでしょうか?

電子・電子散乱の計算をていねいにやり直してみようと思います。

(638)


$\lambda_1=\lambda_2=\lambda_3=\lambda_4$ の場合を考えます。4-momenta は

(639)
$$
\begin{aligned}
k_1^\mu &= E(1,\ 0,\ 0,\ \beta)\\
k_2^\mu &= E(1,\ 0,\ 0,\ -\beta)\\
k_3^\mu &= E(1,\ \beta\sin\theta\cos\phi,\ \beta\sin\theta\sin\phi,\ \beta\cos\theta)\\
k_4^\mu &= E(1,\ -\beta\sin\theta\cos\phi,\ -\beta\sin\theta\sin\phi,\ -\beta\cos\theta)
\end{aligned}
$$

ととり、非相対論的($\beta\to0$)及び相対論的($\beta\to1$)極限がとれるようにします。$(\theta,\phi)\leftrightarrow(\pi-\theta,\pi+\phi)$ の交換が明らかなように、ϕ を有限にとります。振幅は (394) と同様

$$(640)\quad M^{\lambda_3\lambda_4}_{\lambda_1\lambda_2} = \frac{e^2}{t}\,\bar{u}(k_3,\lambda_3)\gamma^\mu u(k_1,\lambda_1)\,\bar{u}(k_4,\lambda_4)\gamma_\mu u(k_2,\lambda_2)$$

$$-\frac{e^2}{u}\,\bar{u}(k_4,\lambda_4)\gamma^\mu u(k_1,\lambda_1)\,\bar{u}(k_3,\lambda_3)\gamma_\mu u(k_2,\lambda_2)$$

$$\equiv \frac{e^2}{t}\,J^\mu_{31}\;J_{42\mu} - \frac{e^2}{u}\,J^\mu_{41}\;J_{32\mu}$$

となります。 $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = \lambda_4 = \underbrace{\lambda}_{=+1}$ のとき

$$(641)\quad J^\mu_{31} = \bar{u}(k_3,+)\gamma^\mu u(k_1,+)$$

$$= E(1+\beta)\,\chi^+_+(\mathbb{k}_3)\,\sigma^\mu_+\,\chi_+(\mathbb{k}_1) + E(1-\beta)\,\chi^+_+(\mathbb{k}_3)\,\sigma^\mu_-\,\chi_+(\mathbb{k}_1)$$

$$= 2E\,\left(\cos\frac{\theta}{2},\ \sin\frac{\theta}{2}e^{-i\phi}\right)\left[1,\ \beta\vec{\sigma}\right]\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$$

$$= 2E\,\left(\cos\frac{\theta}{2},\ \sin\frac{\theta}{2}e^{-i\phi}\right)\left[\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix},\ \beta\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix},\ \beta\begin{pmatrix}0\\i\end{pmatrix},\ \beta\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}\right]$$

$$= 2E\left(\cos\frac{\theta}{2},\ \beta\sin\frac{\theta}{2}e^{-i\phi},\ i\beta\sin\frac{\theta}{2}e^{-i\phi},\ \beta\cos\frac{\theta}{2}\right)$$

$$(641)'\quad J^\mu_{42} = \bar{u}(k_4,+)\gamma^\mu u(k_2,+)$$

$$= E(1+\beta)\,\chi^+_+(\mathbb{k}_4)\,\sigma^\mu_+\,\chi_+(\mathbb{k}_2) + E(1-\beta)\,\chi^+_+(\mathbb{k}_4)\,\sigma^\mu_-\,\chi_+(\mathbb{k}_2)$$

$$= 2E\,\left(\sin\frac{\theta}{2},\ -\cos\frac{\theta}{2}e^{-i\phi}\right)\left[1,\ \beta\vec{\sigma}\right]\begin{pmatrix}0\\-1\end{pmatrix}$$

$$= 2E\,\left(\sin\frac{\theta}{2},\ -\cos\frac{\theta}{2}e^{-i\phi}\right)\left[\begin{pmatrix}0\\-1\end{pmatrix},\ \beta\begin{pmatrix}-1\\0\end{pmatrix},\ \beta\begin{pmatrix}i\\0\end{pmatrix},\ \beta\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\right]$$

$$= 2E\left(\cos\frac{\theta}{2}e^{-i\phi},\ -\beta\sin\frac{\theta}{2},\ i\beta\sin\frac{\theta}{2},\ -\beta\cos\frac{\theta}{2}e^{-i\phi}\right)$$

$$(641)''\quad J_{31}\cdot J_{42} = 4E^2 e^{-i\phi}\left(\cos^2\frac{\theta}{2} + \beta^2\sin^2\frac{\theta}{2} + \beta^2\sin^2\frac{\theta}{2} + \beta^2\cos^2\frac{\theta}{2}\right)$$

$$= 4E^2 e^{-i\phi}\begin{cases}\cos^2\frac{\theta}{2} + \beta^2\left(1+\sin^2\frac{\theta}{2}\right)\\[2ex] 2 - (1-\beta^2)\left(1+\sin^2\frac{\theta}{2}\right)\end{cases}$$

$$(642)\quad J^{\mu}_{41} = \bar{u}(k_4,+)\gamma^{\mu}u(k_1,+)$$

$$= 2E^{\left(\sin\frac{\theta}{2},\, -\cos\frac{\theta}{2}e^{-i\phi}\right)}\left[\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix},\ \beta\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix},\ \beta\begin{pmatrix}0\\i\end{pmatrix},\ \beta\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}\right]$$

$$= 2E\left(\sin\frac{\theta}{2},\ -\beta\cos\frac{\theta}{2}e^{-i\phi},\ -i\beta\cos\frac{\theta}{2}e^{-i\phi},\ \beta\sin\frac{\theta}{2}\right)$$

$$(642)'\quad J^{\mu}_{32} = \bar{u}(k_3,+)\gamma^{\mu}u(k_2,+)$$

$$= 2E^{\left(\cos\frac{\theta}{2},\, \sin\frac{\theta}{2}e^{-i\phi}\right)}\left[\begin{pmatrix}0\\-1\end{pmatrix},\ \beta\begin{pmatrix}-1\\0\end{pmatrix},\ \beta\begin{pmatrix}i\\0\end{pmatrix},\ \beta\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\right]$$

$$= 2E\left(-\sin\frac{\theta}{2}e^{-i\phi},\ -\beta\cos\frac{\theta}{2},\ +i\beta\cos\frac{\theta}{2},\ \beta\sin\frac{\theta}{2}e^{-i\phi}\right)$$

$$(642)''\quad J_{41}\cdot J_{32} = 4E^2e^{-i\phi}\left(-\sin^2\frac{\theta}{2} - \beta^2\cos^2\frac{\theta}{2} - \beta^2\cos^2\frac{\theta}{2} - \beta^2\sin^2\frac{\theta}{2}\right)$$

$$= 4E^2e^{-i\phi}\begin{cases} -\sin^2\frac{\theta}{2} - \beta^2\left(1+\cos^2\frac{\theta}{2}\right) \\ -2 + (1-\beta^2)\left(1+\cos^2\frac{\theta}{2}\right) \end{cases}$$

高エネルギー極限 ($\beta\to1$) は既知なので、上の方の表式を用いて.

$$(643)\quad M^{++}_{++} = e^2s\left\{\frac{\cos^2\frac{\theta}{2} + \beta^2\left(1+\sin^2\frac{\theta}{2}\right)}{t} + \frac{\sin^2\frac{\theta}{2} + \beta^2\left(1+\cos^2\frac{\theta}{2}\right)}{u}\right\}e^{-i\phi}$$

干渉項は正です。低エネルギーでは他のヘリシティー振幅も干渉するので計算します。

パリティー不変性を考慮すると、M^{++}_{++}、M^{+-}_{++}、M^{-+}_{++}、M^{--}_{++}、M^{++}_{+-}、M^{+-}_{+-}、M^{-+}_{+-}、M^{--}_{+-} で完全です。沢山ですが、独立なカレントはそれほどないので何とかなるでしょう。まず M^{+-}_{++}。

$$(644)\quad (J^{\mu}_{42})^{-}_{+} = \bar{u}(k_4,-)\gamma^{\mu}u(k_2,+) = E\sqrt{1-\beta^2}\left\{\chi^{\dagger}_{-}(k_4)\sigma^{\mu}_{+}\chi_{+}(k_2) + \chi^{\dagger}_{-}(k_4)\sigma^{\mu}_{-}\chi_{+}(k_2)\right\}$$

$$= 2m^{\left(\cos\frac{\theta}{2}e^{i\phi},\, \sin\frac{\theta}{2}\right)}\left[1,\ \vec{0}\right]\begin{pmatrix}0\\-1\end{pmatrix}$$

$$= -2m\sin\frac{\theta}{2}\,(1,0,0,0)$$

$$(644)' \quad (J_{41})^{-}_{+} = \bar{u}(k_4,-)\gamma^\mu u(k_1,+) = m\left\{\chi^{\dagger}_{-}(\mathbb{k}_4)\left[\sigma^\mu_{+} + \sigma^\mu_{-}\right]\chi_{+}(\mathbb{k}_1)\right\}$$

$$= 2m \left(\cos\tfrac{\theta}{2}e^{i\phi}, \sin\tfrac{\theta}{2}\right)\left[1, \vec{0}\right]\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$$

$$= 2m\cos\tfrac{\theta}{2}e^{i\phi}(1,0,0,0)$$

$$(644)'' \quad M^{+-}_{++} = \frac{e^2}{t}(J^\mu_{31})^{+}_{+}(J_{42\mu})^{-}_{+} - \frac{e^2}{u}(J^\mu_{41})^{-}_{+}(J_{32\mu})^{+}_{+}$$

$$= 4Eme^2\left\{\frac{(\cos\frac{\theta}{2})(-\sin\frac{\theta}{2})}{t} - \frac{(\cos\frac{\theta}{2}e^{i\phi})(-\sin\frac{\theta}{2}e^{-i\phi})}{u}\right\}$$

$$= 4Eme^2\cos\frac{\theta}{2}\sin\frac{\theta}{2}\left(-\frac{1}{t}+\frac{1}{u}\right)$$

次は M^{-+}_{++}.

$$(645) \quad (J^\mu_{31})^{-}_{+} = \bar{u}(k_3,-)\gamma^\mu u(k_1,+) = m\left\{\chi^{\dagger}_{-}(\mathbb{k}_3)\left[\sigma^\mu_{+}+\sigma^\mu_{-}\right]\chi_{+}(\mathbb{k}_1)\right\}$$

$$= 2m\left(-\sin\tfrac{\theta}{2}e^{i\phi}, \cos\tfrac{\theta}{2}\right)\left[1,\vec{0}\right]\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} = -2m\sin\tfrac{\theta}{2}e^{i\phi}(1,0,0,0)$$

$$(645)' \quad (J^\mu_{32})^{-}_{+} = \bar{u}(k_3,-)\gamma^\mu u(k_2,+) = m\,\chi^{\dagger}_{-}(\mathbb{k}_3)\left[\sigma^\mu_{+}+\sigma^\mu_{-}\right]\chi_{+}(\mathbb{k}_2)$$

$$= 2m\left(-\sin\tfrac{\theta}{2}e^{i\phi}, \cos\tfrac{\theta}{2}\right)\left[1,\vec{0}\right]\begin{pmatrix}0\\-1\end{pmatrix} = -2m\cos\tfrac{\theta}{2}(1,0,0,0)$$

$$(645)'' \quad M^{-+}_{++} = \frac{e^2}{t}(J^\mu_{31})^{-}_{+}(J_{42\mu})^{+}_{+} - \frac{e^2}{u}(J^\mu_{41})^{+}_{+}(J_{32\mu})^{-}_{+}$$

$$= 4Eme^2\left\{\frac{1}{t}(-\sin\tfrac{\theta}{2}e^{i\phi})(\cos\tfrac{\theta}{2}e^{i\phi}) - \frac{1}{u}(\sin\tfrac{\theta}{2})(-\cos\tfrac{\theta}{2})\right\}$$

$$= 4Eme^2\cos\frac{\theta}{2}\sin\frac{\theta}{2}\left(-\frac{1}{t}+\frac{1}{u}\right)$$

快調ですね。次は M^{--}_{++} ですが、これは既に計算したカレントを使って

$$(646) \quad M^{--}_{++} = \frac{e^2}{t}(J^\mu_{31})^{-}_{+}(J_{42\mu})^{-}_{+} - \frac{e^2}{u}(J^\mu_{41})^{-}_{+}(J_{32\mu})^{-}_{+}$$

$$= 4m^2e^2\left\{\frac{1}{t}(-\sin\tfrac{\theta}{2}e^{i\phi})(-\sin\tfrac{\theta}{2}) - \frac{1}{u}(\cos\tfrac{\theta}{2}e^{i\phi})(-\cos\tfrac{\theta}{2})\right\}$$

$$= 4m^2e^2\,e^{i\phi}\left[\frac{1}{t}\sin^2\frac{\theta}{2} + \frac{1}{u}\cos^2\frac{\theta}{2}\right]$$

そろそろ分かって来ましたが、最後までやりますね。次は $M^{+\pm}_{+-}$ なので、

(647) $(J^\mu_{32})^+_- = \bar{u}(k_3,+)\gamma^\mu u(k_2,-) = m\,\chi^+_+(k_3)[\sigma^\mu_+ + \sigma^\mu_-]\chi_-(k_2)$

$= 2m^{(\cos\frac{\theta}{2},\, \sin\frac{\theta}{2}e^{-i\phi})}[1, \vec{\sigma}]\binom{1}{0} = 2m\cos\frac{\theta}{2}\,(1,0,0,0)$

(647)' $(J^\mu_{42})^+_- = \bar{u}(k_4,+)\gamma^\mu u(k_2,-) = m\,\chi^+_+(k_4)[\sigma^\mu_+ + \sigma^\mu_-]\chi_-(k_2)$

$= 2m^{(\sin\frac{\theta}{2},\, -\cos\frac{\theta}{2}e^{-i\phi})}[1, \vec{\sigma}]\binom{1}{0} = 2m\sin\frac{\theta}{2}\,(1,0,0,0)$

(647)'' $M^{++}_{+-} = \frac{e^2}{t}(J^\mu_{31})^+_+(J_{42\mu})^+_- - \frac{e^2}{u}(J^\mu_{41})^+_+(J_{32\mu})^+_-$

$= 4Em\,e^2\left\{\frac{1}{t}(\cos\frac{\theta}{2})(\sin\frac{\theta}{2}) - \frac{1}{u}(\sin\frac{\theta}{2})(\cos\frac{\theta}{2})\right\}$

$= 4Em\,e^2\cos\frac{\theta}{2}\sin\frac{\theta}{2}\left(\frac{1}{t}-\frac{1}{u}\right)$

(648) $(J^\mu_{42})^-_- = \bar{u}(k_4,-)\gamma^\mu u(k_2,-)$

$= E\,\chi^+_-(k_4)\left[(1+\beta)\sigma^\mu_- + (1-\beta)\sigma^\mu_+\right]\chi_-(k_2)$

$= 2E^{(\cos\frac{\theta}{2}e^{i\phi},\, \sin\frac{\theta}{2})}[1, -\beta\vec{\sigma}]\binom{1}{0}$

$= 2E^{(\cos\frac{\theta}{2}e^{i\phi},\, \sin\frac{\theta}{2})}\left[\binom{1}{0}, -\beta\binom{0}{1}, -\beta\binom{0}{i}, -\beta\binom{1}{0}\right]$

$= 2E\left(\cos\frac{\theta}{2}e^{i\phi},\, -\beta\sin\frac{\theta}{2},\, -i\beta\sin\frac{\theta}{2},\, -\beta\cos\frac{\theta}{2}e^{i\phi}\right)$

(648)' $M^{+-}_{+-} = \frac{e^2}{t}(J^\mu_{31})^+_+(J_{42\mu})^-_- - \frac{e^2}{u}(J^\mu_{41})^-_+(J_{32\mu})^+_-$

$= \frac{e^2}{t}\left[4E^2\left(\cos^2\frac{\theta}{2}e^{i\phi} + \cancel{\beta^2\sin^2\frac{\theta}{2}e^{-i\phi}} - \cancel{\beta^2\sin^2\frac{\theta}{2}e^{-i\phi}} + \beta^2\cos^2\frac{\theta}{2}e^{i\phi}\right)\right]$

$-\frac{e^2}{u}\left[4m^2\left(\cos\frac{\theta}{2}e^{i\phi}\cos\frac{\theta}{2}\right)\right]$

$= 4\underbrace{m^2}_{(e^2)}\cos^2\frac{\theta}{2}\,e^{i\phi}\left[\frac{\gamma^2(1+\beta^2)}{t} - \frac{1}{u}\right]$

$$(649)\quad (J^{\mu}_{32})^{-}_{-} = \bar{u}(k_3,-)\gamma^{\mu} u(k_2,-)$$

$$= E\,\chi^{\dagger}_{-}(k_3)\left[(1+\beta)\sigma^{\mu}_{-} + (1-\beta)\sigma^{\mu}_{+}\right]\chi_{-}(k_2)$$

$$= 2E\,\left(-\sin\tfrac{\theta}{2}e^{i\phi},\ \cos\tfrac{\theta}{2}\right)\left[1, -\beta\vec{\sigma}\right]\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$$

$$= 2E\,\left(-\sin\tfrac{\theta}{2}e^{i\phi},\ \cos\tfrac{\theta}{2}\right)\left[\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}, -\beta\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}, -\beta\begin{pmatrix}0\\i\end{pmatrix}, -\beta\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}\right]$$

$$= 2E\left(-\sin\tfrac{\theta}{2}e^{i\phi},\ -\beta\cos\tfrac{\theta}{2},\ -i\beta\cos\tfrac{\theta}{2},\ +\beta\sin\tfrac{\theta}{2}e^{i\phi}\right)$$

$$(649)'\quad M^{-+}_{+-} = \frac{e^2}{t}(J^{\mu}_{31})^{-}_{+}(J_{42\mu})^{+}_{-} - \frac{e^2}{u}(J^{\mu}_{41})^{+}_{+}(J_{32\mu})^{-}_{-}$$

$$= \frac{e^2}{t}\left(-2m\sin\tfrac{\theta}{2}e^{i\phi}\right)\left(2m\sin\tfrac{\theta}{2}\right) - \frac{e^2}{u}4E^2\left(-\sin^2\tfrac{\theta}{2}e^{i\phi} \cancel{-\beta^2\cos^2\tfrac{\theta}{2}e^{-i\phi}} \cancel{+\beta^2\cos^2\tfrac{\theta}{2}e^{-i\phi}} - \beta^2\sin^2\tfrac{\theta}{2}e^{i\phi}\right)$$

$$= -4m^2e^2\frac{1}{t}\sin^2\tfrac{\theta}{2}e^{i\phi} + \frac{e^2}{u}4E^2\sin^2\tfrac{\theta}{2}e^{i\phi}(1+\beta^2)$$

$$= 4m^2e^2\sin^2\tfrac{\theta}{2}e^{i\phi}\left[-\frac{1}{t} + \frac{\gamma^2(1+\beta^2)}{u}\right]$$

$$(650)\quad M^{--}_{+-} = \frac{e^2}{t}(J^{\mu}_{31})^{-}_{+}(J_{42\mu})^{-}_{-} - \frac{e^2}{u}(J^{\mu}_{41})^{-}_{+}(J_{32\mu})^{-}_{-}$$

$$= \frac{e^2}{t}\left(-2m\sin\tfrac{\theta}{2}e^{i\phi}\right)\left(2E\cos\tfrac{\theta}{2}e^{i\phi}\right) - \frac{e^2}{u}\left(2m\cos\tfrac{\theta}{2}e^{i\phi}\right)\left(-2E\sin\tfrac{\theta}{2}e^{i\phi}\right)$$

$$= 4mE\,e^2\cos\tfrac{\theta}{2}\sin\tfrac{\theta}{2}e^{2i\phi}\left(-\frac{1}{t}+\frac{1}{u}\right)$$

さて以上でヘリシティー振幅の完全系が完成したので、何でも計算できます。

まずは振幅の自乗のスピン和を求めてみましょう。$E=m\gamma$ として、

$$(651)\quad \sum_{\lambda_i}\left|M^{\lambda_3\lambda_4}_{\lambda_1\lambda_2}\right|^2 = 2\left\{|M^{++}_{++}|^2 + |M^{+-}_{++}|^2 + |M^{-+}_{++}|^2 + |M^{--}_{++}|^2 + |M^{++}_{+-}|^2 + |M^{+-}_{+-}|^2 + |M^{-+}_{+-}|^2 + |M^{--}_{+-}|^2\right\}$$

$$= 8m^4e^4\left\{\left[\gamma^2(1+3\beta^2)\left(\frac{1}{t}+\frac{1}{u}\right) + c\left(\frac{1}{t}-\frac{1}{u}\right)\right]^2 + (\sin\theta\,\gamma)^2\left[\left(\frac{1}{t}-\frac{1}{u}\right)^2\times 4\right] + \left[\frac{1}{t}+\frac{1}{u} - c\left(\frac{1}{t}-\frac{1}{u}\right)\right]^2\right.$$

$$\left. + (1+c)^2\left[\frac{\gamma^2(1+\beta^2)}{t} - \frac{1}{u}\right]^2 + (1-c)^2\left[\frac{\gamma^2(1+\beta^2)}{u} - \frac{1}{t}\right]^2\right\}$$

まずは $\gamma \gg 1$ limit をとりましょう。この場合は γ^4 項だけが生き残るので

$$(652)\quad \sum_{\lambda_i} |M^{\lambda_3\lambda_4}_{\lambda_1\lambda_2}|^2 \xrightarrow[\gamma\gg 1]{\beta\to 1} 8E^4e^4\left\{\left[4\left(\frac{1}{t}+\frac{1}{u}\right)\right]^2 + (1+c)^2\left(\frac{2}{t}\right)^2 + (1-c)^2\left(\frac{2}{u}\right)^2\right\}$$

$$= 8e^4\left[\left(\frac{s}{t}+\frac{s}{u}\right)^2 + \left(\frac{1+c}{2}\right)^2\left(\frac{s}{t}\right)^2 + \left(\frac{1-c}{2}\right)^2\left(\frac{s}{u}\right)^2\right]$$

$$= 8e^4\left[\left(\frac{s}{t}+\frac{s}{u}\right)^2 + \left(\frac{u}{t}\right)^2 + \left(\frac{t}{u}\right)^2\right]$$

$$= 2\left\{|M^{++}_{++}|^2 + |M^{+-}_{+-}|^2 + |M^{-+}_{+-}|^2\right\}$$

これが QED の結果で、M^{++}_{++} に t-channel と u-channel の 2 振幅が効くけれど、干渉項は正であるわけです。今度は逆に $\gamma\to 1, \beta\to 0$ 極限をとります。

$$(653)\quad \sum_{\lambda_i} |M^{\lambda_3\lambda_4}_{\lambda_1\lambda_2}|^2 \xrightarrow[\gamma\to 1]{\beta\to 0} 8m^4e^4\left\{\left[\frac{1}{t}+\frac{1}{u}+c\left(\frac{1}{t}-\frac{1}{u}\right)\right]^2 + 4(1-c^2)\left(\frac{1}{t}-\frac{1}{u}\right)^2\right.$$

$$\left. + \left[\frac{1}{t}+\frac{1}{u}-c\left(\frac{1}{t}-\frac{1}{u}\right)\right]^2 + \left[(1+c)^2+(1-c)^2\right]\left(\frac{1}{t}-\frac{1}{u}\right)^2\right\}$$

$$= 8m^4e^4\left\{2\left(\frac{1}{t}+\frac{1}{u}\right)^2 + \left[\cancel{2c^2}+4-\cancel{4c^2}+2+\cancel{2c^2}\right]\left(\frac{1}{t}-\frac{1}{u}\right)^2\right\}$$

$$= 32m^4e^4\left\{\left(\frac{1}{t}-\frac{1}{u}\right)^2 + \left(\frac{1}{t}\right)^2 + \left(\frac{1}{u}\right)^2\right\}$$

今度は負の干渉項となりました。(652) と (653) の結果は QED の既知の結果と一致しますので、今度は正しく計算できたようです。私の頭の中に、20年以上も前のかすかな記憶として (653) 式が残っていて、深く考えずに、「フェルミ統計から反対称で負の干渉」という連想ができてしまっていたようです。

さて、せっかく (653) の非相対論極限の式が求まったのですから、{ } の中の

3項それぞれが、散乱の前後でスピンが保存する3振幅の寄与であることを説明しましょう。有明な「重クォーク有効理論(HQET)」の定理、「重いフェルミオンのスピンは変化しない(変化はβに比例する)」の具体例です。HQETはBメソンの物理の道具だ、なんて思わないでくださいね。LHCやLCでtopや更に重いフェルミオンが生成されたるとても役に立ちますから。(スピン1でも$\frac{3}{2}$でも2でも重ければ役に立つと思います。)

さて、ヘリシティー振幅からスピン振幅を求めますが、この違い分かりますか?ヘリシティーは粒子の運動量の向きのスピンの成分です。運動量の向きが変わる散乱過程では、「ヘリシティー保存」は「スピン非保存」です。ここでは、入射電子の向き(k_1)を角運動量の量子化の軸とし、全てのスピンをこの向きで測る(量子化する)ことにします。すると、入射電子(k_1)のヘリシティースピノールがそのままスピンベクトルとなります。

(654) $|\uparrow\rangle_1 = \chi_+(k_1) = \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$ $\qquad |\downarrow\rangle_1 = \chi_-(k_1) = \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$

入射電子(k_2)のスピンベースは、

(655) $|\uparrow\rangle_2 = \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} = \chi_-(k_2)$ $\qquad |\downarrow\rangle_2 = \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} = -\chi_+(k_2)$

要するに、k_2電子の場合、スピンとヘリシティーは逆なのですね。当然。k_3とk_4の

電子についても $|\uparrow\rangle_i = \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$, $|\downarrow\rangle_i = \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$ $(i=3,4)$ を使ってスピン振幅を求めるのですが、これらをヘリシティー固有ベクトルで表わさなければなりません。

(656a) $\chi_+(k_3) = \begin{pmatrix}\cos\frac{\theta}{2}\\ \sin\frac{\theta}{2}e^{i\phi}\end{pmatrix} = \cos\frac{\theta}{2}|\uparrow\rangle_3 + \sin\frac{\theta}{2}e^{i\phi}|\downarrow\rangle_3$

$\chi_-(k_3) = \begin{pmatrix}-\sin\frac{\theta}{2}e^{-i\phi}\\ \cos\frac{\theta}{2}\end{pmatrix} = -\sin\frac{\theta}{2}e^{-i\phi}|\uparrow\rangle_3 + \cos\frac{\theta}{2}|\downarrow\rangle_3$

(656b) $\chi_+(k_4) = \begin{pmatrix}\sin\frac{\theta}{2}\\ -\cos\frac{\theta}{2}e^{i\phi}\end{pmatrix} = \sin\frac{\theta}{2}|\uparrow\rangle_4 - \cos\frac{\theta}{2}e^{i\phi}|\downarrow\rangle_4$

$\chi_-(k_4) = \begin{pmatrix}\cos\frac{\theta}{2}e^{-i\phi}\\ \sin\frac{\theta}{2}\end{pmatrix} = \cos\frac{\theta}{2}e^{-i\phi}|\uparrow\rangle_4 + \sin\frac{\theta}{2}|\downarrow\rangle_4$

従って

(657a) $\begin{pmatrix}|\uparrow\rangle_3\\ |\downarrow\rangle_3\end{pmatrix} = U\begin{pmatrix}\chi_+(k_3)\\ \chi_-(k_3)\end{pmatrix} = \begin{bmatrix}\cos\frac{\theta}{2} & -\sin\frac{\theta}{2}e^{i\phi}\\ \sin\frac{\theta}{2}e^{-i\phi} & \cos\frac{\theta}{2}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\chi_+(k_3)\\ \chi_-(k_3)\end{bmatrix}$

(657b) $\begin{pmatrix}|\uparrow\rangle_4\\ |\downarrow\rangle_4\end{pmatrix} = V\begin{bmatrix}\chi_+(k_4)\\ \chi_-(k_4)\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\sin\frac{\theta}{2} & \cos\frac{\theta}{2}e^{i\phi}\\ -\cos\frac{\theta}{2}e^{-i\phi} & \sin\frac{\theta}{2}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\chi_+(k_4)\\ \chi_-(k_4)\end{bmatrix}$

これで全てのスピン振幅が計算できます。$|s_i\rangle$ を $|\uparrow\rangle_i$ か $|\downarrow\rangle_i$ として、

(658) $M^{s_3 s_4}_{s_1 s_2} = \langle s_4|\langle s_3|\,T\,|s_1\rangle|s_2\rangle$

$$= \sum_{\lambda_3,\lambda_4}\left(V_{s_4\lambda_4}\chi_{\lambda_4}(k_4)\right)\left(U_{s_3\lambda_3}\chi_{\lambda_3}(k_3)\right)^\dagger T\,\chi_{s_1}(k_1)\,\chi_{-s_2}(k_2)\,s_2$$

$$= \sum_{\lambda_3,\lambda_4}(U_{s_3\lambda_3})^*(V_{s_4\lambda_4})^*\,\underline{\chi^\dagger_{\lambda_4}(k_4)\chi^\dagger_{\lambda_3}(k_3)\,T\,\chi_{s_1}(k_1)\chi_{-s_2}(k_2)\,s_2}$$

$$= \sum_{\lambda_3,\lambda_4}(U_{s_3\lambda_3})^*(V_{s_4\lambda_4})^*\,M^{\lambda_3\lambda_4}_{\lambda_1\lambda_2}\,s_2\,(\lambda_1=s_1,\ \lambda_2=-s_2)$$

ここで $|s_i=+\rangle = |\uparrow\rangle_i$, $|s_i=-\rangle = |\downarrow\rangle_i$ としました。つまり、任意のスピン振幅はヘリシティー振幅の線型重ね合わせで表わせるわけです。ではスピン不変振

幅、$M^{\uparrow\uparrow}_{\uparrow\uparrow}$ と $M^{\uparrow\downarrow}_{\uparrow\downarrow}$ と $M^{\downarrow\uparrow}_{\uparrow\downarrow}$ を計算してみましょう。$M^{\uparrow\downarrow}_{\uparrow\downarrow}$ は t-channel だけ、$M^{\downarrow\uparrow}_{\uparrow\downarrow}$ は u-channel だけ、$M^{\uparrow\uparrow}_{\uparrow\uparrow}$ は両方寄与するはずです。

$$(659a)\ M^{\uparrow\downarrow}_{\uparrow\downarrow} = \sum_{\lambda_3\lambda_4} (U_{\uparrow\lambda_3})^* (V_{\downarrow\lambda_4})^* M^{\lambda_3\lambda_4}_{++} (-1)$$

$$= -\left\{ \cos\frac{\theta}{2}\left(-\cos\frac{\theta}{2} e^{i\phi}\right) M^{++}_{++} + \cos\frac{\theta}{2}\sin\frac{\theta}{2} M^{+-}_{++} + \sin\frac{\theta}{2} e^{-i\phi}\cos\frac{\theta}{2} e^{i\phi} M^{-+}_{++} - \sin\frac{\theta}{2} e^{-i\phi}\sin\frac{\theta}{2} M^{--}_{++} \right\}$$

$$= 4m^2e^2\left\{ \cos^2\frac{\theta}{2}\left(\frac{\cos^2\frac{\theta}{2}}{t} + \frac{\sin^2\frac{\theta}{2}}{u}\right) - \cos^2\frac{\theta}{2}\sin^2\frac{\theta}{2}\left(-\frac{1}{t}+\frac{1}{u}\right) - \sin^2\frac{\theta}{2}\cos^2\frac{\theta}{2}\left(-\frac{1}{t}+\frac{1}{u}\right) + \sin^2\frac{\theta}{2}\left(\frac{\sin^2\frac{\theta}{2}}{t} + \frac{\cos^2\frac{\theta}{2}}{u}\right)\right\}$$

$$= 4m^2e^2\left\{ \frac{1}{t}\left(\cos^4\frac{\theta}{2} + \cos^2\sin^2\frac{\theta}{2}\times 2 + \sin^4\frac{\theta}{2}\right) + \frac{1}{u}\left(\cos^2\frac{\theta}{2}\sin^2\frac{\theta}{2}\right)(1-1-1+1) \right\}$$

$$= 4m^2e^2\frac{1}{t} \qquad (\beta\to 0\ \text{limit をとりました}).$$

$$(659b)\ M^{\downarrow\uparrow}_{\uparrow\downarrow} = \sum_{\lambda_3\lambda_4} (U_{\downarrow\lambda_3})^* (V_{\uparrow\lambda_4})^* M^{\lambda_3\lambda_4}_{++} (-1)$$

$$= -\left\{ \sin\frac{\theta}{2} e^{i\phi}\sin\frac{\theta}{2} M^{++}_{++} + \sin\frac{\theta}{2} e^{i\phi}\cos\frac{\theta}{2} e^{-i\phi} M^{+-}_{++} + \cos\frac{\theta}{2}\sin\frac{\theta}{2} M^{-+}_{++} + \cos\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2} e^{-i\phi} M^{--}_{++} \right\}$$

$$= 4m^2e^2\left\{ -\sin^2\frac{\theta}{2}\left(\frac{\cos^2\frac{\theta}{2}}{t} + \frac{\sin^2\frac{\theta}{2}}{u}\right) - \sin^2\frac{\theta}{2}\cos^2\frac{\theta}{2}\left(-\frac{1}{t}+\frac{1}{u}\right)\times 2 - \cos^2\frac{\theta}{2}\left(\frac{\sin^2\frac{\theta}{2}}{t} + \frac{\cos^2\frac{\theta}{2}}{u}\right) \right\}$$

$$= -4m^2e^2\frac{1}{u} + O(\beta)$$

$$(659c)\ M^{\uparrow\uparrow}_{\uparrow\uparrow} = \sum_{\lambda_3\lambda_4} (U_{\uparrow\lambda_3})^* (V_{\uparrow\lambda_4})^* M^{\lambda_3\lambda_4}_{+-}$$

$$= \cos\frac{\theta}{2}\sin\frac{\theta}{2} M^{++}_{+-} + \cos\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2} e^{-i\phi} M^{+-}_{+-} + \left(-\sin\frac{\theta}{2} e^{-i\phi}\right)\sin\frac{\theta}{2} M^{-+}_{+-} + \left(-\sin\frac{\theta}{2} e^{-i\phi}\right)\cos\frac{\theta}{2} e^{-i\phi} M^{--}_{+-}$$

$$= 4m^2e^2\left\{ \cos^2\frac{\theta}{2}\sin^2\frac{\theta}{2}\left(\frac{1}{t}-\frac{1}{u}\right) + \cos^4\frac{\theta}{2}\left(\frac{1}{t}-\frac{1}{u}\right) + \sin^4\frac{\theta}{2}\left(\frac{1}{t}-\frac{1}{u}\right) + \cos^2\frac{\theta}{2}\sin^2\frac{\theta}{2}\left(\frac{1}{t}-\frac{1}{u}\right) \right.$$

$$= 4m^2e^2\left(\frac{1}{t}-\frac{1}{u}\right) + O(\beta)$$

ここまでで、$\beta\to 0$ 極限の振幅の自乗のスピン和の式 (653) を再現しましたから（パリティー不変性で全てのスピンを反転したものの和を ×2 で代用しています）、HQETの定理、「$\beta\to 0$ で

フェルミオンのスピンは変化しない」が実証されたことになります。そして、(659c)で、t-channel振幅とu-channel振幅が相殺することが見てとれます。スピンの量子化の軸を共通にとったので、波動関数の反対称化がそのまま振幅の相殺となったわけです。$\beta \to 1$ 極限のヘリシティー振幅 M^{++}_{++} (643)の場合は、反対称化の結果、振幅が増幅します。始状態と終状態の量子化の軸が $\theta = 90°$ のとき直交するのですが、この時、干渉によって振幅はゼロになるのでなく2倍になります。(-1) の因子がスピン波動関数にあるはずです。そろそろ道草が長くなったのでこれ以上追求しませんが、前方散乱 ($\theta \to 0$) の極限でスピンとヘリシティーの量子化軸が一致することを利用して考えたことを述べます。(659a)で $\beta \to 1$ 極限をとると、

$$(660)\quad M^{\uparrow\downarrow}_{\uparrow\downarrow} = \cos^2\frac{\theta}{2}\, e^{i\phi} M^{++}_{++} - \cos^2\frac{\theta}{2}\sin^2\frac{\theta}{2}\left(M^{+-}_{++} + M^{-+}_{++}\right) + \sin^2\frac{\theta}{2}\, e^{-i\phi} M^{--}_{++}$$

$$\xrightarrow[\beta \to 1]{} \cos^2\frac{\theta}{2}\, e^{i\phi} M^{++}_{++}$$

$$= e^2 s\,(1+\cos\theta)\left(\frac{1}{t} + \frac{1}{u}\right)$$

$$\xrightarrow[\theta \to 0]{} 2e^2 s\left(\frac{1}{t} + \frac{1}{u}\right) = M^{++}_{++}$$

であるわけです。この極限でスピン(z軸の向きのスピン)を考えると、

(661) (t-channel) (u-channel)

t-channel過程のカレントは共にスピン保存、u-channel過程のカレントは共に

スピンフリップであることが分かります。このスピンフリップカレントの積が、(−1)因子の起源だろうと思うのですが、ここらで次に進まないといけません。干渉項の符号を間違えたことが少しshockだったので、ずい分と長いより道をしてしまいました。このより道で、ヘリシティー振幅の完全系はrelative phaseを含めて物理(観測量)の完全な情報を有しており、任意のスピン振幅を構成できる、ということを学んで下さい。HELASやMadGraphといった数値プログラムでヘリシティー振幅が簡単に計算できるので、任意の過程の任意の粒子のスピン偏極や、偏極相関も、この様にして簡単に求められるわけです。解析的な計算は面倒でしたけれど、数値計算なら簡単だし、誤りも避けられます。

ここまでで、QCDの2→2過程の計算のcheckは完全に終了したので、p. 193〜195の(583)−(585)のまとめを再掲します。ヘリシティー振幅を再掲することはしませんが、Web上のコピーで、全ての誤りを訂正しておきますので、使用して下さい。今回のまとめでは、同種粒子の場合、phase spaceが$0<\cos\theta<1$である旨を必ず書き加えることにしました。この方が$\cos\theta\to 1$での比較等をするときに誤解が少ないと思うからです。

2005. 7. 26

QCD $2\to 2$ 過程の断面積のまとめ。[p. 193 - p. 195 (583)-(585) の再掲]

(662a) $$\left(\frac{d\sigma}{dc}\right)^{qq'\to qq'} = \frac{4\pi\alpha_s^2}{s}\cdot\frac{T_F^2(N^2-1)}{N^2}\cdot\frac{1}{4}\,\frac{s^2+u^2}{t^2}$$
$$= \frac{4\pi\alpha_s^2}{s}\cdot\frac{2}{9}\cdot\left\{\frac{2}{(1-c)^2}-\frac{1}{(1-c)}+\frac{1}{4}\right\}$$

(662b) $$\left(\frac{d\sigma}{dc}\right)^{qq\to qq} = \frac{4\pi\alpha_s^2}{s}\cdot\frac{T_F^2(N^2-1)}{N^2}\cdot\frac{1}{4}\left\{\frac{s^2+u^2}{t^2}+\frac{s^2+t^2}{u^2}+\left(-\frac{1}{N}\right)\frac{2s^2}{tu}\right\}$$

$\boxed{0<\cos\theta<1}$
$$= \frac{4\pi\alpha_s^2}{s}\cdot\frac{2}{9}\cdot\left\{\frac{2}{(1-c)^2}+\frac{2}{(1+c)^2}-\frac{1}{(1-c)}-\frac{1}{(1+c)}+\frac{1}{2}+\left(-\frac{1}{3}\right)\left(\frac{1}{1-c}+\frac{1}{1+c}\right)\right\}$$
$$= \frac{4\pi\alpha_s^2}{s}\cdot\frac{2}{9}\cdot\left\{\frac{2}{(1-c)^2}+\frac{2}{(1+c)^2}-\frac{4}{3(1-c)}-\frac{4}{3(1+c)}+\frac{1}{2}\right\}$$

(662c) $$\left(\frac{d\sigma}{dc}\right)^{qg\to qg} = \frac{4\pi\alpha_s^2}{s}\cdot\frac{T_F^2(N^2-1)}{N^2}\cdot\frac{1}{2}\left\{\frac{s^2+u^2}{t^2}-\frac{s^2+u^2}{2su}+\left(\frac{-1}{N^2-1}\right)\left(-\frac{s^2+u^2}{t^2}\right)\right\}$$
$$= \frac{4\pi\alpha_s^2}{s}\cdot\frac{2}{9}\cdot\left\{\frac{4}{(1-c)^2}-\frac{2}{(1-c)}+\frac{1}{2(1+c)}+\frac{5+c}{8}+\left(-\frac{1}{8}\right)\left(\frac{-4}{(1-c)^2}+\frac{2}{1-c}-\frac{1}{2}\right)\right\}$$
$$= \frac{4\pi\alpha_s^2}{s}\cdot\frac{2}{9}\cdot\left\{\frac{9}{2}\frac{1}{(1-c)^2}-\frac{9}{4}\frac{1}{(1-c)}+\frac{11+2c}{16}+\frac{1}{2(1+c)}\right\}$$

(662d) $$\left(\frac{d\sigma}{dc}\right)^{gg\to gg} = \frac{4\pi\alpha_s^2}{s}\cdot\frac{4T_F^2N^2}{N^2-1}\cdot\frac{1}{2}\left\{3-\frac{tu}{s^2}-\frac{su}{t^2}-\frac{st}{u^2}\right\}$$

$\boxed{0<\cos\theta<1}$
$$= \frac{4\pi\alpha_s^2}{s}\cdot\frac{9}{8}\cdot\left\{\frac{2}{(1-c)^2}+\frac{2}{(1+c)^2}-\frac{1}{(1-c)}-\frac{1}{(1+c)}+\frac{11+c^2}{8}\right\}$$

(662e) $$\left(\frac{d\sigma}{dc}\right)^{q\bar{q}\to gg} = \frac{4\pi\alpha_s^2}{s}\cdot\frac{T_F^2(N^2-1)^2}{N^3}\cdot\frac{1}{2}\left\{\frac{t^2+u^2}{s^2}-\frac{t^2+u^2}{2tu}+\left(\frac{-1}{N^2-1}\right)\left(-\frac{t^2+u^2}{s^2}\right)\right\}\times(-1)$$

$\boxed{0<\cos\theta<1}$
$$= \frac{4\pi\alpha_s^2}{s}\cdot\frac{16}{27}\cdot\left\{\frac{1}{2(1-c)}+\frac{1}{2(1+c)}-\frac{25+9c^2}{32}\right\}$$

(662f) $$\left(\frac{d\sigma}{dc}\right)^{gg\to q\bar{q}} = \frac{4\pi\alpha_s^2}{s}\cdot\frac{T_F^2}{N}\cdot\frac{1}{2}\left\{\frac{t^2+u^2}{s^2}-\frac{t^2+u^2}{2tu}+\left(\frac{-1}{N^2-1}\right)\left(-\frac{t^2+u^2}{s^2}\right)\right\}\times(-1)$$
$$= \frac{4\pi\alpha_s^2}{s}\cdot\frac{1}{12}\cdot\left\{\frac{1}{2(1-c)}+\frac{1}{2(1+c)}-\frac{25+9c^2}{32}\right\}$$

$$(662g)\quad \left(\frac{d\sigma}{dc}\right)^{q\bar{q}\to q'\bar{q}'} = \frac{4\pi\alpha_s^2}{s}\cdot\frac{T_F^2(N^2-1)}{N^2}\cdot\frac{1}{4}\,\frac{t^2+u^2}{s^2} = \frac{4\pi\alpha_s^2}{s}\cdot\frac{2}{9}\cdot\left\{\frac{1+c^2}{8}\right\}$$

$$(662h)\quad \left(\frac{d\sigma}{dc}\right)^{q\bar{q}\to q\bar{q}} = \frac{4\pi\alpha_s^2}{s}\cdot\frac{T_F^2(N^2-1)}{N^2}\cdot\frac{1}{4}\left\{\frac{s^2+u^2}{t^2}+\frac{t^2+u^2}{s^2}+\left(-\frac{1}{N}\right)\frac{2u^2}{st}\right\} = \frac{4\pi\alpha_s^2}{s}\cdot\frac{2}{9}\cdot\left\{\frac{2}{(1-c)^2}-\frac{2}{3(1-c)}+\frac{3-2c+3c^2}{24}\right\}$$

以上です。それぞれの断面積の一行目の表式にはカラー因子を顕わに記し、第二カラー因子は主要な因子との比（$\frac{1}{N}$ や $\frac{1}{N^2-1}$）で表わしました。又、s, t, u 変数を用いることによって、$qg\to qg$ と $q\bar{q}\to gg$、$gg\to q\bar{q}$ が $s\leftrightarrow t$ 交換、$qq\to qq$ と $q\bar{q}\to q\bar{q}$ が $s\leftrightarrow u$ 交換で得られることを示しました。$gg\to gg$ 断面積が $s\leftrightarrow t\leftrightarrow u\leftrightarrow s$ 対称なことも見てとれます。これらの関係（交差対称性）はヘリシティー振幅の段階では見にくいので、計算の check に有効です。(662)式の結果は原著論文(627)の結果と一致し、ヘリシティー振幅の計算の誤りもほぼ完全に駆逐できたと思います。

$c=\cos\theta\to 1$ の振舞の普遍性（universality）は重要です。

$4\pi\alpha_s^2/s$ を単位として、次の三過程

$$(663)\quad \begin{cases} \frac{4}{9}\frac{1}{(1-c)^2} & \cdots\ qq'\to qq' = \overbrace{q\bar{q}'\to q\bar{q}'}^{(662a)},\ \overbrace{qq\to qq}^{(662b)},\ \overbrace{q\bar{q}\to q\bar{q}}^{(662h)} \\ 1\,\frac{1}{(1-c)^2} & \cdots\ qg\to qg = \bar{q}g\to\bar{q}g \quad (662c) \\ \frac{9}{4}\frac{1}{(1-c)^2} & \cdots\ gg\to gg \quad (662d) \end{cases}$$

は全て t-channel に gluon を交換します。カラー因子と振幅の積が、$\frac{4}{9} : 1 : \frac{9}{4}$ となることは覚えておくと役に立ちそうですね。

通常のコライダー実験では、$q, q', \bar{q}, \bar{q}', g$ 等の jet を区別できない場合がほとんどです。上記の $2 \to 2$ 過程は全て、2ジェット生成への寄与と考えることができますが、この場合、$\cos\theta = |c|$ と $\cos\theta = -|c|$ は区別できません。ジェット生成断面積を

$$(664) \quad \left(\frac{d\sigma}{d|c|}\right)^{ab\to cd} \begin{cases} = \left(\frac{d\sigma}{dc}\right)^{ab\to cd}_{c=|c|} + \left(\frac{d\sigma}{dc}\right)^{ab\to cd}_{c=-|c|} & c \neq d \text{ の場合} \\ = \left(\frac{d\sigma}{dc}\right)^{ab\to cd}_{c=|c|} & c = d \text{ （同種粒子の場合）} \end{cases}$$

と定義してから、$|c| = 0$ でのジェット生成の大きさを比較すると、やはり $4\pi\alpha_s^2/s$ を単位として、大きい順に

$$(665) \quad \left.\begin{aligned} &\frac{243}{64} = 3.8 \quad \cdots gg \to gg \\ &\frac{55}{36} = 1.5 \quad \cdots qg \to qg \\ &\frac{35}{54} = 0.65 \quad \cdots q\bar{q} \to q\bar{q} \\ &\frac{5}{9} = 0.56 \quad \cdots qq' \to qq' \\ &\frac{11}{27} = 0.41 \quad \cdots qq \to qq \end{aligned}\right\} \frac{1}{(1-c)^2} \text{ を持つ過程です。}$$

$$\begin{aligned} &\frac{7}{54} = 0.13 \quad \cdots q\bar{q} \to gg \end{aligned}$$

$$\left.\begin{aligned} &\frac{1}{18} = 0.056 \quad \cdots q\bar{q} \to q'\bar{q}' \\ &\frac{7}{192} = 0.036 \quad \cdots gg \to q\bar{q} \end{aligned}\right\} t\bar{t} \text{ 生成に寄与する過程です。}$$

2005. 7. 27

簡単な計算ばかりですが、ミスがあるかも知れません。check してくださいね。(665) の数字をながめていると、いくつか記憶しておくべきことがあるように思います。

- (665) の過程は全て $O(\alpha_s^2)$ の 2→2 過程で、且つ、$\cos\theta = 0$ で t- と u-channel に交換する粒子の寄与が最小の場合であるにもかかわらず、断面積の大きさが 100 : 1 以上違うこと。
- $\cos\theta \to 1$ の普遍性から、$(gg \to gg) : (qg \to qg) : (qq' \to qq') = \frac{9}{4} : 1 : \frac{4}{9}$ $= 2.25 : 1 : 0.44$ だが、$\cos\theta = 0$ ではこの比が、
  2.5 : 1 : 0.42 $(q\bar{q} \to q\bar{q})$: 0.36 $(qq' \to qq')$: 0.27 $(qq \to qq)$
  になっています。これは、干渉等により、$\cos\theta$ 分布の形が違うことを反映しているわけです。high P_T の極限で、Tevatron では $u\bar{u} \to u\bar{u}$、LHC では $uu \to uu$ が優性になりますが、$\cos\theta = 0$ の断面積が 3 : 2 以上も違うのは驚きです。$uu \to uu$ は $gg \to gg$ の $\frac{1}{9}$ しかありません。
- 初期状態に無い $q\bar{q}$ 対を生成する断面積 2 過程が最低で、$q\bar{q} \to q'\bar{q}'$ は $gg \to gg$ の $\frac{1}{70}$、$gg \to q\bar{q}$ は $\frac{1}{100}$ しかありません。これは $\frac{m^2}{s} \to 0$ 極限の値ですから、top の様に有限質量だと、更に小さくなります。

輻射過程.

さて待望の輻射過程の講義に入ります。出発点として、QEDの「等価光子の近似」"Equivalent real photon (particle) approximation"

(666) C.Weizäcker, ZP 612 (1938); E.J.Williams, PR45, 729 (1934)

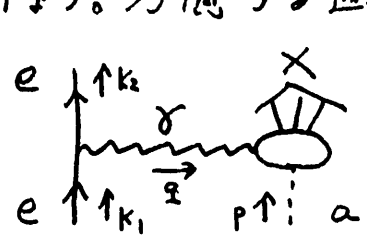
をヘリシティー振幅を使って導出します。電子の質量が有限でαが小さいことから、不定性が無く、電子中の電子、光子の分布、光子中の電子の分布が定義できることを確認します。つまり、QEDからパートン模型（パートンは電子、陽電子と光子です）が導出されるわけです。この類推から、QCDでも摂動QCDを用いてパートン模型の基礎づけができることに気がついたのが、

(667) V.N.Gribov & L.Lipatov, SJNP 15, 438 (1972);
G.Altarelli & G.Parisi, NPB126, 298 (1977)

です。GLAP方程式を導き、その基本的性質の解説までを解説したいと思います。

まずは、$e \to \gamma$ 分岐から始めましょう。考慮する過程は

(666)
$$\begin{cases} e + a \longrightarrow e + X \\ e(k_1, \lambda_1) + a(p) \longrightarrow e(k_2, \lambda_2) + X(p_X) \end{cases}$$



電子の質量を有限にして、有限なQEDの振幅を求めたいので、

(667) $k_1 + p = k_2 + p_X$, $k_1 - k_2 = q$

$k_1^2 = k_2^2 = m^2$, $p^2 = 0$, $p_X^2 = \hat{s} = (q+p)^2 = 2qp + q^2$

$(k_1+p)^2 = m^2 + 2k_1 p = s$

とします。振幅は、

(668) $$M_{\lambda_1}^{\lambda_2} = \bar{u}(k_2,\lambda_2)\, e\gamma^\mu u(k_1,\lambda_1) \frac{-g_{\mu\nu}}{q^2} T^\nu(q,p)$$

$$\equiv e\, J^\mu_{\lambda_1\lambda_2} \frac{-g_{\mu\nu}}{q^2} T^\nu(q,p)$$

と書けます。ここで $\gamma^* + a \to X$ 振幅のゲージ不変性は仮定します。

(669) $q_\nu T^\nu(q,p) = 0$.

断面積は

(670) $$d\sigma = \frac{1}{2s}\cdot\frac{1}{2}\sum_{\lambda_1\lambda_2} |M_{\lambda_1}^{\lambda_2}|^2 \quad d\Phi(k_2+p_X)$$

$$= \frac{1}{4s}\cdot \sum_{\lambda_1\lambda_2} e^2 J^\mu_{\lambda_1\lambda_2} J^{\nu *}_{\lambda_1\lambda_2} \frac{1}{(q^2)^2} T_\mu T_\nu^* \frac{d^3k_2}{(2\pi)^3 2E_2} d\Phi_X$$

$$= \frac{1}{4s}\cdot L^{\mu\nu} W_{\mu\nu} \cdot \frac{1}{(q^2)^2}\cdot \frac{d^3k_2}{(2\pi)^3 2E_2}$$

$$L^{\mu\nu} = e^2 \sum_{\lambda_1\lambda_2} J^\mu_{\lambda_1\lambda_2} J^{\nu *}_{\lambda_1\lambda_2} = e^2\, \mathrm{tr}\left[(\not{k}_2+m)\gamma^\mu(\not{k}_1+m)\gamma^\nu\right]$$

$$= 4e^2\left[k_1^\mu k_2^\nu + k_1^\nu k_2^\mu - (k_1\cdot k_2 - m^2) g^{\mu\nu}\right]$$

$$W^{\mu\nu} = T^\mu T^{*\nu} d\Phi_X$$

$$= \left(-g^{\mu\nu} + \frac{q^\mu q^\nu}{q^2}\right) W_1(p\cdot q, q^2) + \left(p^\mu - \frac{q\cdot p}{q^2} q^\mu\right)\left(p^\nu - \frac{q\cdot p}{q^2} q^\nu\right) \frac{1}{q\cdot p} W_2(p\cdot q, q^2)$$

おなじみのDISの表式ですが、全断面積を考えると、$q^2 \to 0$ 極限(実光子

極限）の寄与が主要なことがわかります。この極限で、$L^{\mu\nu}W_{\mu\nu} \sim O(q^2)$、$d^3k_2/2E_2 \sim dE_2 dq^2$ なので、断面積は $dE_2\, d\ln(-q^2)$ の様に振る舞います。このことを、(668) の γ^* propagator を実光子の積の和で表現します。

(671) $$-g^{\mu\nu} = \sum_{\lambda=\pm1} \varepsilon^{\mu}(q,\lambda)^* \varepsilon^{\nu}(q,\lambda) - \frac{n^{\mu}q^{\nu} + n^{\nu}q^{\mu}}{n\cdot q}$$

(669) とカレントの保存 $q_{\mu} J^{\mu}_{\lambda_1\lambda_2} = 0$ により、右辺の余分な項は寄与しませんから、

(672) $$M^{\lambda_2}_{\lambda_1} = \frac{e}{q^2} \sum_{\lambda=\pm} J^{\mu}_{\lambda_1\lambda_2}\cdot \varepsilon_{\mu}(q,\lambda)^* \ \varepsilon_{\nu}(q,\lambda) T^{\nu}(q,p)$$
$$= \frac{e}{q^2} \sum_{\lambda=\pm} J_{\lambda_1\lambda_2}\cdot \varepsilon^*_{\lambda} \ \hat{M}_{\lambda}$$

と書けるわけです。ここで $\hat{M}_{\lambda}$ は

(673) $$\gamma^* + a \to X$$

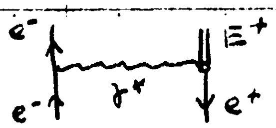
のヘリシティー振幅で

(674) $$\hat{M}_{\lambda}(q\cdot p, q^2) = \varepsilon_{\mu}(q,\lambda) T^{\mu}(q,p)$$

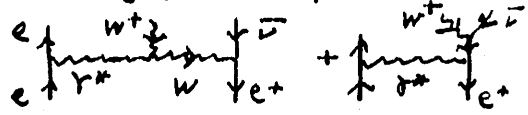
で定義されます。$q^2=0$ のときは実光子の振幅ですから、

(675) $$\hat{M}_{\lambda}(q\cdot p, q^2) = \hat{M}_{\lambda}(q\cdot p, 0)\left\{1 + O\left(\frac{q^2}{Q^2}\right)\right\}$$

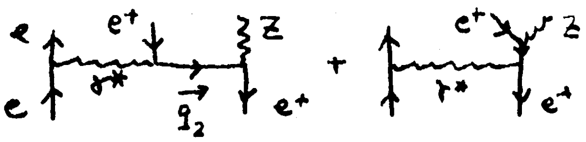
と書けるはずです。ここで Q^2 は、$\gamma^* + a \to X$ 過程の振幅が、実光子の振幅から大きくずれるスケールで、この過程の詳細に依存します。例えば X が一粒子 ($\hat{s} = M^2$) であったなら、$Q^2 = M^2$ ですし、$a = e^+$ で $X = e^+\Sigma$ であったら、$Q^2 = p_T^2(e^+)$ となります。

(676) $e^-e^+ \to e^-E^+$（重いE^+） 

$Q^2 \approx M^2 = m_{E^+}^2$

$e^-e^+ \to e^-\bar{\nu}W^+$ 

$Q^2 \approx m_W^2 - p_W^2$

$e^-e^+ \to e^-e^+Z$ 

$Q^2 \approx |q_2^2|$

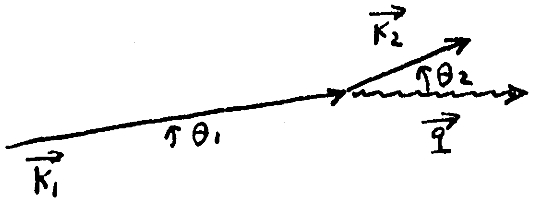
つまり、Q^2は、$\gamma^*+a \to X$が局所的な（一点における）相互作用と見なせるスケールで、γ^*の波長が$\frac{1}{Q}$以下になる（$|q^2|>Q^2$）と、過程の非局所的構造が見えてしまって振幅が小さくなるわけです。

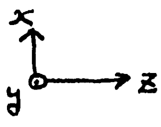
以後、(675)を

(677) $$\hat{M}_\lambda(q\cdot p,\ q^2) = \hat{M}_\lambda(q\cdot p,\ 0)\ \theta(Q^2-|q^2|)$$

と近似します。「実光子近似」と呼びます。この近似で全振幅(672)を評価します。
実際の計算は$\vec{q}=\vec{k}_1-\vec{k}_2$がz軸になる系で行います。

(678)
$$k_1^\mu = E(1,\ \beta\sin\theta\cos\phi,\ \beta\sin\theta\sin\phi,\ \beta\cos\theta)$$
$$k_2^\mu = E'(1,\ \beta'\sin\theta'\cos\phi,\ \beta'\sin\theta'\sin\phi,\ \beta'\cos\theta')$$
$$q^\mu = k_1^\mu - k_2^\mu = (\nu,\ 0,\ 0,\ \sqrt{\nu^2-q^2})$$
$$q^2 = (k_1-k_2)^2 = 2m^2 - 2EE'(1-\beta\beta'\cos(\theta-\theta'))$$





この系で $\varepsilon^\mu(q, \lambda=\pm) = \frac{1}{\sqrt{2}}(0, \mp 1, -i, 0)$ だから、

(679) $\mathcal{M}_{\lambda_1}^{\lambda_2\lambda} \equiv J^\mu_{\lambda_1\lambda_2}(k_1,k_2)\ \varepsilon^*_\mu(q,\lambda) = \bar{u}(k_2,\lambda_2)\gamma^\mu u(k_1,\lambda_1)\ \varepsilon^*_\mu(q,\lambda)$

とおくと [$J^\mu_{\lambda_1\lambda_2}(k_1,k_2)$ の計算はくり返しませんけれど、簡単ですね！]

(680a) $\mathcal{M}_+^{++} = -\mathcal{M}_-^{--*} = 2\sqrt{2EE'}\cos\frac{\theta}{2}\sin\frac{\theta'}{2}\, e^{-i\phi} \times \left\{1 + O\left(\frac{m^2}{E^2}\right)\right\}$

(680b) $\mathcal{M}_+^{+-} = -\mathcal{M}_-^{-+*} = -2\sqrt{2EE'}\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta'}{2}\, e^{i\phi} \times \left\{1 + O\left(\frac{m^2}{E^2}\right)\right\}$

(680c) $\mathcal{M}_+^{-+} = \mathcal{M}_-^{+-} = \sqrt{2}\, m\left(\sqrt{\frac{E}{E'}} - \sqrt{\frac{E'}{E}}\right)\cos\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta'}{2} \times \left\{1 + O\left(\frac{m^2}{E^2}\right)\right\}$

他の項は $m^2/E^2 \to 0$ 極限で断面積に寄与しません。(680c) が $m \to 0$ 極限で有限の寄与を与えることは既に述べたと思いますが、くり返します。

ここで γ^* の energy $\nu = Ex$ と置くと

(681a) $E' = E - \nu = E(1-x)$

(681b)
$$
\begin{aligned}
q^2_{min} &= -q^2\ (\cos(\theta-\theta') = 1) \\
&= 2EE'(1-\beta\beta') - 2m^2 \\
&= 2EE'(1-\beta^2\beta'^2)/(1+\beta\beta') - 2m^2 \\
&= 2E^2E'^2\left[(1-\beta^2)+(1-\beta'^2)-(1-\beta^2)(1-\beta'^2)\right]/EE'(1+\beta\beta') - 2m^2 \\
&= 2m^2\left\{\left[E^2+E'^2-m^2\right]/EE'(1+\beta\beta') - 1\right\} \\
&= m^2(E-E')^2/EE' \times \left[1 + O(m^2/E^2)\right] \\
&= m^2 x^2/(1-x) \times \left[1 + O(m^2/E^2)\right]
\end{aligned}
$$

(681c)
$$
\begin{aligned}
q^2_{min} - q^2 &= 2EE'\beta\beta'\left[1 - \cos(\theta-\theta')\right] \\
\equiv \tilde{q}^2 \quad &= 4EE'\beta\beta'\sin^2\frac{\theta-\theta'}{2} \\
&= 4EE'\beta\beta'\left[\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta'}{2} - \sin\frac{\theta'}{2}\cos\frac{\theta}{2}\right]^2 \\
&\approx 4EE'\left[\sin\frac{\theta}{2} - \frac{E}{E'}\sin\frac{\theta}{2}\right]^2 = 4E^2\frac{x^2}{1-x}\sin^2\frac{\theta}{2} \\
&\approx 4EE'\left[\frac{E'}{E}\sin\frac{\theta'}{2} - \sin\frac{\theta'}{2}\right]^2 = 4E^2x^2(1-x)\sin^2\frac{\theta'}{2}
\end{aligned}
$$

(681) を (680) に代入すると.

(682a) $\mathcal{M}_+^{++} = -\mathcal{M}_-^{--*} = \sqrt{2}\,\frac{1}{x}\,e^{-i\phi}\,\tilde{q} + O(\tilde{q}^2)$ $\qquad \tilde{q} = \sqrt{q^2_{min} - q^2}$

(682b) $\mathcal{M}_+^{+-} = -\mathcal{M}_-^{-+*} = -\sqrt{2}\,\frac{1-x}{x}\,e^{i\phi}\,\tilde{q} + O(\tilde{q}^2)$

(682c) $\mathcal{M}_+^{-+} = \mathcal{M}_-^{+-} = \sqrt{2}\,\frac{x}{\sqrt{1-x}}\,m + O(m\tilde{q}^2)$

従って全振幅 (672) は

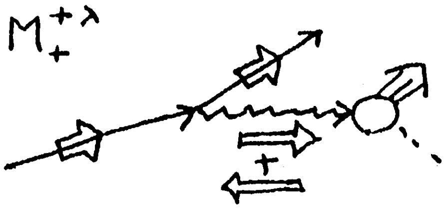
(683a)
$$
\begin{aligned}
M_+^+ &= \frac{e}{q^2}\left[\mathcal{M}_+^{++}\hat{M}_+ + \mathcal{M}_+^{+-}\hat{M}_-\right] \\
&= \sqrt{2}\,e\,\frac{\tilde{q}}{q^2}\left[\frac{1}{x}e^{-i\phi}\hat{M}_+ - \frac{1-x}{x}e^{i\phi}\hat{M}_-\right].
\end{aligned}
$$

(683b)
$$
\begin{aligned}
M_-^- &= \frac{e}{q^2}\left[\mathcal{M}_-^{-+}\hat{M}_+ + \mathcal{M}_-^{--}\hat{M}_-\right] \\
&= \sqrt{2}\,e\,\frac{\tilde{q}}{q^2}\left[\frac{1-x}{x}e^{-i\phi}\hat{M}_+ - \frac{1}{x}e^{i\phi}\hat{M}_-\right]
\end{aligned}
$$

(683c)
$$
\begin{cases}
M_+^- = \dfrac{e}{q^2}\left[\mathcal{M}_+^{-+}\hat{M}_+ + O(m^2)\right] = \sqrt{2}\,e\,\dfrac{m}{q^2}\,\dfrac{x}{\sqrt{1-x}}\,\hat{M}_+ \\
M_-^+ = \dfrac{e}{q^2}\left[\mathcal{M}_-^{+-}\hat{M}_- + O(m^2)\right] = \sqrt{2}\,e\,\dfrac{m}{q^2}\,\dfrac{x}{\sqrt{1-x}}\,\hat{M}_-
\end{cases}
$$

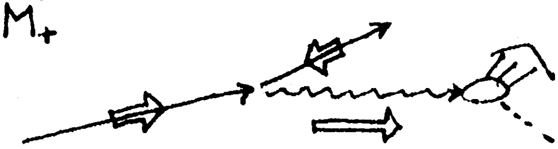
ここで $M_{\lambda_1}^{\lambda_2} = M_+^+$ と M_-^- は電子のヘリシティーが保存するため、$m \to 0$ で有限、γ^* のヘリシティーは $\lambda = \pm$ 共に存在しますが、M_+^- と M_-^+ は電子のヘリシティーがフリップするため振幅が m に比例し、$\lambda = \lambda_1$ (光子のヘリシティが入射電子のヘリシティーと一致する場合にだけ、有限の断面積を与えます、次図参照.

(684) $M_+^{+\lambda}$



θ=0 でスピンは保存しない!

M_+^-



θ=0 でスピンが保存する.

断面積を計算するために、終電子の phase space を

(685)
$$\frac{d^3K_2}{(2\pi)^3 2E_2} = \frac{1}{16\pi^3}\frac{K'^2 dK'}{E'}\, d\cos\theta' d\phi'$$
$$= \frac{1}{16\pi^3} K' dE'\, d\cos(\theta'-\theta)\, d\phi \qquad K'dK' = E'dE'$$
$$\approx \frac{1}{16\pi^3} K' dE' \frac{dq^2}{2EE'}\, d\phi \qquad (678)$$
$$\approx \frac{1}{16\pi^2}\, dx\, dq^2 \frac{d\phi}{2\pi} \qquad \frac{dE'}{E} = d(1-x) = dx$$

とし、$\gamma^* + a \to X$ 過程の密度行列

(686)
$$\rho_{\lambda\lambda'} \equiv \frac{1}{2\hat{s}}\cdot\frac{1}{2}\cdot \overline{\sum_{\lambda_a,\lambda_X}} \int \hat{A}_\lambda \hat{A}^*_{\lambda'}\, d\Phi_X \quad = (\rho_{\lambda'\lambda})^*$$

を定義します。$\hat{s} = (p+q)^2 = xs$ とし、$\overline{\sum_{\lambda_a,\lambda_X}}$ は a については スピン平均、X についてはスピン和をとります。ρ のトレース $(\rho_{++}+\rho_{--})$ は通常のスピン平均断面積です。ρ の各成分の測定が、$\gamma^*+a \to X$ 過程の、スピン、パリティー、CP 特性の決定のために重要なので全成分を残した表式を求めます。

入射電子は100%偏極 ($\lambda_1 = +$ か $-$)、終電子の偏極は観測しない ($\lambda_2 = +$ と $-$ を加える) 場合だけを考えます。

(687)
$$d\sigma_{\lambda_1} = \frac{1}{2s}\left\{ |M^{\lambda_1}_{\lambda_1}|^2 + |M^{-\lambda_1}_{\lambda_1}|^2 \right\} \frac{d^3K'}{(2\pi)^3 2E'}\cdot d\Phi_X$$
$$= \frac{1}{2s}\left(\frac{e}{q^2}\right)^2 \left\{ |\mathcal{M}^{\lambda_1+}_{\lambda_1}\hat{A}_+ + \mathcal{M}^{\lambda_1-}_{\lambda_1}\hat{A}_-|^2 + |\mathcal{M}^{-\lambda_1,+\lambda_1}_{\lambda_1}\hat{A}_{\lambda_1}|^2 \right\} \frac{d^3K'}{(2\pi)^3 2E'}\, d\Phi_X$$
$$= \frac{\alpha}{2\pi}\cdot\frac{1}{2\hat{s}}\cdot\frac{1}{2}\left\{ |\mathcal{M}^{\lambda_1+}_{\lambda_1}\hat{A}_+ + \mathcal{M}^{\lambda_1-}_{\lambda_1}\hat{A}_-|^2 + |\mathcal{M}^{-\lambda_1,\lambda_1}_{\lambda_1}\hat{A}_{\lambda_1}|^2 \right\} d\Phi_X \cdot x\,dx \cdot \frac{dq^2}{(q^2)^2}\cdot\frac{d\phi}{2\pi}$$

2005. 7. 28

$$(688a)\quad d\sigma_+ = \frac{\alpha}{2\pi}\cdot\frac{1}{2\hat{s}}\cdot\frac{1}{2}\left\{2\tilde{q}^2\left|\frac{1}{x}e^{-i\phi}\hat{M}_+ - \frac{1-x}{x}e^{i\phi}\hat{M}_-\right|^2 + 2m^2\frac{x^2}{1-x}|\hat{M}_+|^2\right\}d\Phi_X\cdot x\,dx\cdot\frac{dq^2}{(q^2)^2}\cdot\frac{d\phi}{2\pi}$$

$$= \frac{\alpha}{2\pi}\cdot\frac{1}{2\hat{s}}\cdot\frac{1}{2}\left\{2\tilde{q}^2\left[\frac{1}{x^2}|\hat{M}_+|^2 + \left(\frac{1-x}{x}\right)^2|\hat{M}_-|^2 - 2\frac{1-x}{x^2}\mathrm{Re}(e^{-2i\phi}\hat{M}_+\hat{M}_-^*)\right]\right.$$

$$\left. + \underbrace{2m^2\frac{x^2}{1-x}}_{=q^2_{min}\ (681b)}|\hat{M}_+|^2\right\}d\Phi_X\cdot x\,dx\cdot\frac{dq^2}{(q^2)^2}\cdot\frac{d\phi}{2\pi}$$

$$= \frac{\alpha}{\pi}\left\{\frac{\tilde{q}^2}{|q^2|^2}\left[\frac{1}{x}\rho_{++} + \frac{(1-x)^2}{x}\rho_{--} - \frac{1-x}{x}\mathrm{Re}(2e^{-2i\phi}\rho_{+-})\right]\right.$$

$$\left. + \frac{q^2_{min}}{|q^2|^2}\,x\,\rho_{++}\right\}dx\ d|q^2|\ \frac{d\phi}{2\pi}$$

$$(688b)\quad d\sigma_- = \frac{\alpha}{\pi}\left\{\frac{\tilde{q}^2}{|q^2|^2}\left[\frac{(1-x)^2}{x}\rho_{++} + \frac{1}{x}\rho_{--} - \frac{1-x}{x}\mathrm{Re}(2e^{-2i\phi}\rho_{+-})\right]\right.$$

$$\left. + \frac{q^2_{min}}{|q^2|^2}\,x\,\rho_{--}\right\}dx\ d|q^2|\ \frac{d\phi}{2\pi}$$

従って 非偏極電子ビームの断面積は

$$(688c)\quad d\sigma = \frac{1}{2}(d\sigma_+ + d\sigma_-)$$

$$= \frac{\alpha}{2\pi}\left\{\left[\frac{1+(1-x)^2}{x}(\rho_{++}+\rho_{--}) - 2\frac{1-x}{x}\mathrm{Re}(2e^{-2i\phi}\rho_{+-})\right]\frac{\tilde{q}^2}{|q^2|^2}\right.$$

$$\left. + x(\rho_{++}+\rho_{--})\frac{q^2_{min}}{|q^2|^2}\right\}dx\ \frac{d\phi}{2\pi}\ d|q^2|$$

$$= \frac{\alpha}{2\pi}\left\{\left[\frac{1+(1-x)^2}{x}\right]\left[\ln\frac{Q^2}{q^2_{min}} - 1\right] + x\right\}(\rho_{++}+\rho_{--})\,dx$$

$$\equiv D^{WW}_{\gamma/e}(x, Q^2)\cdot\hat{\sigma}(\hat{s}=sx)\cdot dx$$

ここで

(689)
$$
\left\{
\begin{aligned}
&\int_{q^2_{min}}^{Q^2} \frac{q^2}{|q^2|^2}\, d|q^2| = \int_{q^2_{min}}^{Q^2} \frac{|q^2| - q^2_{min}}{|q^2|^2}\, d|q^2| \\
&\qquad = \log \frac{Q^2}{q^2_{min}} - 1 \\
&\int_{q^2_{min}}^{Q^2} \frac{q^2_{min}}{|q^2|^2}\, d|q^2| = q^2_{min} \left[-\frac{1}{|q^2|} \right]_{q^2_{min}}^{Q^2} = 1 - \frac{q^2_{min}}{Q^2} \approx 1
\end{aligned}
\right.
$$

を用いました。

(690)
$$
D^{WW}_{\gamma/e}(x, Q^2) = \frac{\alpha}{2\pi} \left[\frac{1 + (1-x)^2}{x} \left[\ln \frac{Q^2}{q^2_{min}} - 1 \right] + x \right]
$$

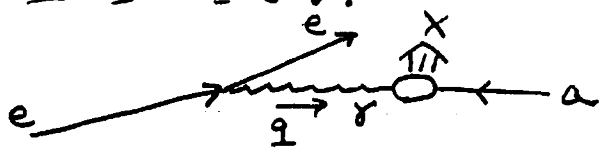
を Weisäcker-Williams の等価光子の分布と呼びます。

(688c) 式の表式が、パートン模型の表式と同型になることに

注目してください。

QCD for Collider Physics X

前回、「e中のγの分布」をQEDのtree近似で求めましたが、
結果(688)〜(690)は次の様に整理できます。



(691) $d\sigma(ea \to eX)$

$$= \left(\frac{dD_{\gamma/e}}{d|q^2|}\right) d|q^2|\, dx \quad d\hat{\sigma}(\gamma a \to X\,;\, \hat{s} = sx)$$

$$= \frac{\alpha}{2\pi}\left\{\frac{1+(1-x)^2}{x}\frac{1}{|q^2|} - \frac{2(1-x)}{x}\delta(|q^2|)\right\} d|q^2|\, dx\, d\hat{\sigma}$$

$$= \frac{\alpha}{2\pi}\left\{\frac{1+(1-x)^2}{x}\ln\frac{Q^2}{|q^2|_{min}} - \frac{2(1-x)}{x}\right\} dx\ d\hat{\sigma}(\hat{s} = sx)$$

$$= D_{\gamma/e}(x, Q^2) \quad dx\, d\hat{\sigma}(\hat{s} = sx)$$

ここで

(692)
Q^2 = $d\hat{\sigma}(\gamma^* a \to X\,;\, \hat{s} = sx)$ を $d\hat{\sigma}(\gamma a \to X\,;\, \hat{s} = sx)$ と近似しても良いスケールの上限 ($|q^2| < Q^2$) で $\gamma a \to X$ の p_T^2 のスケール $Q^2 \sim p_T^2$

$|q^2|_{min} = \dfrac{x^2}{1-x} m_e^2$ … kinematical boundary

$\delta(|q^2|) = \dfrac{|q^2|_{min}}{|q^2|^2}$ … 積分が $m_e \to 0$ で有限の部分

でした。ここで

ヘリシティー保存による項 … $-\dfrac{1+(1-x)^2}{x}$
ヘリシティーフリップによる … x

(693) $$\hat{P}_{\gamma/e}(x) = \frac{1+(1-x)^2}{x}$$

を $e \to \gamma$ の分岐関数 (splitting function) と呼びます。

ここで「e中のeの分布」を

(694) $D_{e/e}(x, Q^2) = \delta(1-x)$

とすると、(691)の $D_{\gamma/e}(x, Q^2)$ の定義により、

(695) $$\frac{d}{d\ln Q^2} D_{\gamma/e}(x, Q^2) = \frac{\alpha}{2\pi}\hat{P}_{\gamma/e}(x)$$
$$= \int_0^1 dx' \int_0^1 dz \frac{\alpha}{2\pi}\hat{P}_{\gamma/e}(z) D_{e/e}(x', Q^2)\,\delta(x - x'z)$$
$$= \int_x^1 \frac{dz}{z}\frac{\alpha}{2\pi}\hat{P}_{\gamma/e}(z) D_{e/e}\left(\frac{x}{z}, Q^2\right)$$

ここで重要なことは、分布関数 $D_{\gamma/e}(x, Q^2)$ は電子のスケール、m_e、に依存するけれど、その Q^2 依存性は m_e に依存しないことです。

一般に、

(696) $$\begin{cases} m^2 & \cdots \text{小さな mass スケール} = \text{長距離物理のスケール} \ (m_e, \Lambda_{QCD}) \\ Q^2 & \cdots \text{大きな energy スケール} = \text{短距離物理のスケール} \ (p_T \text{など}) \end{cases}$$

に共に依存する観測量（断面積など）が

(697) $d\sigma(Q^2, m^2) = d\hat{\sigma}(Q^2, \mu_F^2) \otimes f(\mu_F^2, m^2)$

の様に、$\begin{cases} m^2 \text{に依存しない部分} = d\hat{\sigma}(Q^2, \mu_F^2) = \text{短距離物理} \ \text{と} \\ m^2 \text{に依存する部分} = f(\mu_F^2, m^2) = \text{長距離物理} \ \text{とに} \end{cases}$

分離することを因子化（factorization）と呼びます。

ここで、μ_F^2 は短距離部分と長距離部分を分離する任意のスケールです。因子化が存在すると、(697)式で、左辺は μ_F^2 によりませんから、

(698) $$0 = \frac{d}{d\ln\mu_F^2} d\sigma(Q^2, m^2)$$

$$= \left[\frac{d}{d\ln\mu_F^2} d\hat{\sigma}(Q^2, \mu_F^2)\right] \otimes f(\mu_F^2, m^2) + d\hat{\sigma}(Q^2, \mu_F^2) \otimes \left[\frac{d}{d\ln\mu_F^2} f(\mu_F^2, m^2)\right]$$

が成立します。これは図式的に

(699) $$\frac{d}{d\ln\mu_F^2} \ln f(\mu_F^2, m^2) = -\frac{d}{d\ln\mu_F^2} \ln d\hat{\sigma}(Q^2, \mu_F^2)$$

$$= P(\mu_F^2)$$

我々の最初の例では、$f(\mu_F^2, m^2)$ が「e中のγの分布関数」でした。$\mu_F^2 = Q^2$ ととると「仮想光子の近似」が良くなるのでそうとりましたが、exact な断面積は μ_F^2 に依りません。P が splitting 関数ですが、因子化のため、P は m^2 にも Q^2 にもよりません。μ_F^2 によることはできます。QEDの例では μ_F 依存性が見えませんが、QCDの例では、$\alpha_s(\mu_F)$ の μ_F 依存性として顕在化します。

ここで「因子化が存在する場合、断面積は形式的に因子化のスケール μ_F に依存しないが、低次の近似が良いのは $\mu_F^2 \sim Q^2$ の場合だ」と

覚えておいてください。

因子化 (697) と、因子化スケール μ_F への非依存性の式 (699) は、場の理論の「くり込み」と、物理量のくり込みスケールへの非依存性を表わすくり込み群方程式 (Renormalization Group Eq.) の関係と良く似ています。くり込み理論では、

$$(700) \quad \underbrace{d\sigma(Q, g_B^2)_B}_{\text{Bareな理論}} = \underbrace{d\sigma(Q, g_R^2(\mu), \mu)_R}_{\text{くり込まれた理論で計算された断面積}}$$

Bareな理論
＝
短距離の「真の」理論
例 { GUT ($g_{1B}^2 = g_{2B}^2 = g_{3B}^2$)
　 { 弦理論の有効理論
＝
「正則化」された理論
例 { Lattice QCD
　 { $D = 4 - 2\epsilon$ の連続QCD

⇐ 全て同じ対称性（ゲージ対称性）をもつ

⇓ 普遍性 (universality)

「くり込まれた理論の予言は、Bareな理論の詳細によらない」

ここでスケール μ でくり込まれた理論は $\mu \sim Q$ のスケールの物理を記述するときに、摂動論による近似が良い。例えばGUTの場合、

$$(701) \quad g_{1B}^2 = g_{2B}^2 = g_{3B}^2 \quad \Rightarrow \quad g_{1R}^2(\mu) \ll g_{2R}^2(\mu) \ll g_{3R}^2(\mu) \quad @ \ \mu \ll M_{GUT}$$

となり、例えば $Q \approx 100\,\text{GeV}$ の物理を計算する場合、$\mu \approx Q$ でくり込まれた理論でなければ良い近似は得られない。

にもかかわらず形式的に、観測量（S行列要素、断面積等）は

くり込みスケールμに依存しない。

$$(701)\quad 0 = \mu \frac{d}{d\mu}\Big|_B d\sigma(Q, g_B^2)_B$$

$$= \mu \frac{d}{d\mu}\Big|_B d\sigma(Q, g_R^2(\mu), \mu)_R$$

$$= \Big[\mu\frac{\partial}{\partial\mu} + \underbrace{\mu \frac{d}{d\mu}\Big|_B g_R^2(\mu)}_{\beta(g_R^2(\mu))} \frac{\partial}{\partial g_R^2(\mu)}\Big] d\sigma(Q, g_R^2(\mu), \mu)_R$$

ここで因子化との関係を次の様にとらえることもできます。

(702)

$f(\mu_F^2, m^2)$ … 分布関数，ジェット関数等の値は長距離の物理に依存して決まるけれど、その$\underbrace{\mu_F \text{依存性}}_{\text{GL-AP-Eq.}}$は$\mu_F$のスケールの摂動論で記述される。

$g_R^2(\mu)$ … くり込まれた結合定数の値は短距離の物理（例えばGUT, string等）に依存して決まるけれど、その$\underbrace{\mu \text{依存性}}_{\text{R.G.E.}}$は$\mu$のスケールの摂動論で記述される。

せっかくですからここでQCDのβ関数と running coupling constant を

「計算抜き」で紹介しておきましょう。

2005. 9. 9

β関数と $g_R^2(\mu)$ は「くり込み処法」に依存するので、$\overline{MS}$ を使います。

(703)
$$\begin{cases} a(\mu) \equiv \dfrac{\alpha_s(\mu)}{\pi}\overline{MS} \\[2ex] \beta_{\overline{MS}} \equiv \mu^2 \dfrac{d}{d\mu^2}\Big|_B \dfrac{\alpha_s(\mu)_{\overline{MS}}}{\pi} = -\left(b_0 a^2 + b_1 a^3 + b_2 a^4 + \cdots\right) \\[2ex] b_0 = \dfrac{11}{12} C_A - \dfrac{1}{3} T_F n_f = \dfrac{33-2n_f}{12} \\[2ex] b_1 = \dfrac{17}{24} C_A^2 - \dfrac{5}{12} C_A T_F n_f - \dfrac{1}{4} C_F T_F n_f = \dfrac{153-19n_f}{24} \end{cases}$$

Running coupling constant は

(704)
$$\frac{d}{d\ln\mu^2} a(\mu) = -\left(b_0 a^2 + b_1 a^3 + \cdots\right)$$

(704)′
$$\int_{a(\mu)}^{a(Q)} \frac{da}{a^2\left(1+\frac{b_1}{b_0}a+\cdots\right)} = -b_0 \int_\mu^Q d\ln\mu^2 = -b_0 \ln\frac{Q^2}{\mu^2}$$

$$= \int_{a(\mu)}^{a(Q)} da \left\{ \frac{1}{a^2} - \frac{b_1}{b_0}\frac{1}{a} + \left(\frac{b_1}{b_0}\right)^2 \frac{1}{1+\frac{b_1}{b_0}a} \right\}$$

$$= \left[-\frac{1}{a} - \frac{b_1}{b_0}\ln a + \frac{b_1}{b_0}\ln\left(1+\frac{b_1}{b_0}a\right) \right]_{a(\mu)}^{a(Q)}$$

$$= \left[-\frac{1}{a} + \frac{b_1}{b_0}\ln\left(\frac{1}{a}+\frac{b_1}{b_0}\right) \right]_{a(\mu)}^{a(Q)}$$

(704)″
$$\begin{cases} \dfrac{1}{a(Q)} - \dfrac{b_1}{b_0}\ln\left(\dfrac{1}{a(Q)}+\dfrac{b_1}{b_0}\right) = b_0 \ln\dfrac{Q^2}{\Lambda^2} & \cdots\ a(Q)\text{ の }Q\text{ 依存性} \\[2ex] \dfrac{1}{a(\mu)} - \dfrac{b_1}{b_0}\ln\left(\dfrac{1}{a(\mu)}+\dfrac{b_1}{b_0}\right) = b_0 \ln\dfrac{\mu^2}{\Lambda^2} & \cdots\ \Lambda\text{ の定義} \end{cases}$$

(704)″は逐次解くことができて．

$$(705)\quad a(Q) = \frac{1}{b_0 \ln\frac{Q^2}{\Lambda^2}} \frac{1}{1+\frac{b_1}{b_0} a(Q) \ln\left(\frac{1}{a(Q)}+\frac{b_1}{b_0}\right)}$$

$$= \frac{1}{b_0 \ln\frac{Q^2}{\Lambda^2}} \left[1 - \frac{b_1}{b_0}\frac{1}{b_0 \ln\frac{Q^2}{\Lambda^2}} \ln\left(b_0 \ln\frac{Q^2}{\Lambda^2}+\frac{b_1}{b_0}\right) + \cdots\right]$$

$$= \frac{1}{b_0 \ln\frac{Q^2}{\Lambda^2}} \left[1 - \frac{b_1}{b_0}\frac{1}{b_0 \ln\frac{Q^2}{\Lambda^2}} \ln\left(b_0 \ln\frac{Q^2}{\Lambda^2}\right)\left(1+\frac{b_1}{b_0}\frac{1}{b_0 \ln\frac{Q^2}{\Lambda^2}}\right) + \cdots\right]$$

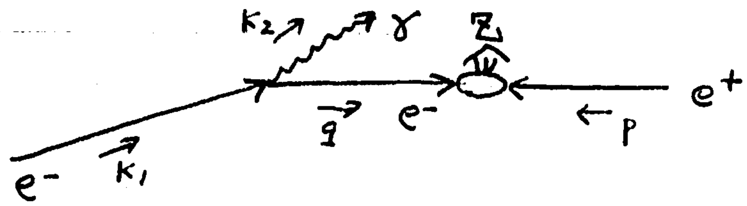
$$(705)'\quad = \frac{1}{b_0 \ln\frac{Q^2}{\Lambda^2}} - \frac{b_1}{b_0^2}\frac{\ln\left(b_0 \ln\frac{Q^2}{\Lambda^2}\right)}{\left(b_0 \ln\frac{Q^2}{\Lambda^2}\right)^2} + O\left(\frac{\ln^2\left(b_0 \ln\frac{Q^2}{\Lambda^2}\right)}{\left(b_0 \ln\frac{Q^2}{\Lambda^2}\right)^3}\right)$$

(705)′式の第二項でtruncateした式をNLOとして使うことが多いが，NLOのくり込み群方程式［(704)式で $b_1 a^3$ まで］の解としては誤差が大きい。$a^3 \ln^2(\frac{1}{a})$ を無視するためである．(705)の第一式を逐次的に解けば，高次の項を足しあげることができる．私はいつも（と言っても25年位前のことですけれど）$a(Q)$ の数値解をNLOの $\overline{\mathrm{MS}}$ 結合としていたが，(705)′のtruncationの誤差が大きいため，$\Lambda = \Lambda_{\overline{\mathrm{MS}}}$ の数値に有意な差が現れました。他の方の結果と比較するためには，結局，(705)′の表式を使わざるを得ませんでした．NNLO（$\beta_{\overline{\mathrm{MS}}} = -b_0 a^2 - b_1 a^3 - b_2 a^4$）にすると，数値的誤差は縮まります．$a^n (\ln^{n-1}\frac{1}{a})$ の様な大きな項を無視するのは良くないという論文を書きましたが無視されました。［KH, PLB118, 141 (1982)］．

さて、QEDにもどります。私がQEDを因子化の例として使うのは、QEDではm_eのスケールの物理も摂動論で取り扱えるため、分布関数の値そのものが摂動論で計算できるからです。

今度は$D_{e/e}(x, Q^2)$ (694)式の$O(\alpha)$項を求めます。例として

(706) $d\sigma(e^-e^+ \to \gamma Z) \approx D_{e/e}(x, Q^2 = m_Z^2)\, dx\, d\hat{\sigma}(e^-e^+ \to Z\,;\, m_Z^2 = sx)$



(707) $$M \sim \bar{v}(p, \bar{\lambda})\, \not{\epsilon}_Z^{*} (g_V^{Zee} - g_A^{Zee}\gamma_5) \frac{\not{q} + m_e}{q^2 - m_e^2} \not{\epsilon}_\gamma^{*} (-e)\, u(k_1, \lambda)$$

$$\sim \bar{v}(p, \bar{\lambda})\, \not{\epsilon}_Z^{*} (g_V - g_A\gamma_5) \frac{\sum_{\lambda'} u(q, \lambda')\bar{u}(q, \lambda')}{q^2 - m_e^2} \not{\epsilon}_\gamma^{*} (-e)\, u(k_1, \lambda)$$

$$\sim \underbrace{\bar{v}(p, \bar{\lambda} = -\lambda)\, \not{\epsilon}_Z^{*} (g_V - g_A\gamma_5)\, u(q, \lambda)}_{M(e^-e^+ \to Z)} \frac{1}{q^2 - m_e^2} \underbrace{\bar{u}(q, \lambda)\, \not{\epsilon}_\gamma^{*} (-e)\, u(k_1, \lambda)}_{M(e^- \to \gamma e^-)}$$

ここで伝播するe^-はvirtual ($|q^2| > m_e^2$)ですが、on-shell ($q^2 = m_e^2$)の近似（仮想実電子の近似）が$|q^2| < Q^2 \sim m_Z^2$まで良い近似となります。

kinematicsから

(708) $q^2 - m_e^2 = (k_1 - k_2)^2 - m_e^2$

$$= -2k_1 k_2 \qquad \begin{cases} k_1^\mu = \frac{\sqrt{s}}{2}(1, 0, 0, \beta) \\ k_2^\mu = \frac{\sqrt{s}}{2}(1-x)(1, \sin\theta, 0, \cos\theta) \end{cases}$$

$$= -\frac{s}{2}(1-x)(1-\beta\cos\theta)$$

(708)' $|q^2 - m_e^2|_{min} = \frac{s}{2}(1-x)(1-\beta) \simeq \frac{s}{2}(1-x)\frac{1-\beta^2}{1+\beta} \approx (1-x)m_e^2$

(709) $\frac{dD_{e/e}}{d|q^2|} = \frac{\alpha}{2\pi}\frac{1+x^2}{1-x}\frac{1}{|q^2 - m_e^2|}$

(709)' $D_{e/e}(x, Q^2) = \int_{|q^2 - m_e^2|_{min}}^{Q^2} d|q^2| \frac{dD_{e/e}(x)}{d|q^2|}$

$$= \frac{\alpha}{2\pi}\frac{1+x^2}{1-x}\ln\frac{Q^2}{(1-x)m_e^2}$$

これを (694) 式に足すと

(710) $D_{e/e}(x, Q^2) = \delta(1-x) + \frac{\alpha}{2\pi}\hat{P}_{e/e}(x)\ln\frac{Q^2}{m_e^2}$

ここまでの近似では「e^-中のe^-の数」は変化しないので

(711) $\int_0^1 dx\, D_{e/e}(x, Q^2) = 1$

を満たすように、規格化されたsplitting関数を

(712) $\int_0^1 dx\, P_{e/e}(x) = 0 \quad ; \quad P_{e/e}(x) = \hat{P}_{e/e}(x) = \frac{1+x^2}{1-x}$ at $x \neq 1$

の様に定義する。$\hat{P}(x)$ の $x=1$ での $\overbrace{\text{singularity}}^{\text{IR}}$ を正規化し、virtual correctionの効果を加えることに対応する。

(7/13)
$$\begin{cases} \displaystyle\int_0^1 dx\, \frac{f(x)}{(1-x)_+} \equiv \int_0^1 dx\, \frac{f(x)-f(1)}{1-x} \\[2ex] \displaystyle\frac{1}{(1-x)_+} = \frac{1}{1-x} \quad \text{at } x \neq 1 \end{cases}$$

で distribution $\frac{1}{(1-x)_+}$ を定義すると．

(7/14)
$$P_{e/e}(x) = \frac{1+x^2}{(1-x)_+} + \frac{3}{2}\delta(1-x)$$

(7/14)′
$$\int_0^1 dx\, P_{e/e}(x) = \int_0^1 dx\, \frac{(1+x^2)-2}{1-x} + \frac{3}{2} = -\int_0^1 dx\,(1+x) + \frac{3}{2} = 0$$

となる。分布関数

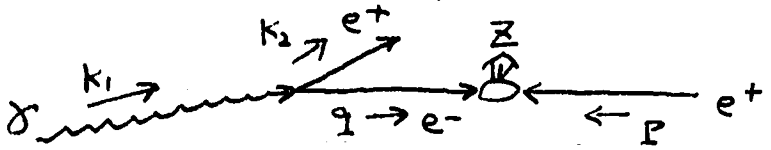
(7/15)
$$D_{e/e}(x, Q^2) = \delta(1-x) + \frac{\alpha}{2\pi} P_{e/e}(x) \ln\frac{Q^2}{m_e^2}$$

は規格化されている．
x=1を含めて

次に $\gamma \to e$ の splitting 関数 $\hat{P}_{e/\gamma}(x)$ と「γ中のe^-の分布関数」

$D_{e/\gamma}(x, Q^2)$を求めます。簡単な例は

(7/16)
$$d\sigma(\gamma e^+ \to e^+ Z) \approx D_{e^-/\gamma}(x, Q^2 = m_Z^2)\, dx\, d\hat{\sigma}(e^-e^+ \to Z;\ m_Z^2 = sx)$$



(7/16)′
$$M \sim \bar{v}(p,\bar{\lambda})\, \not\epsilon_Z^{*} (g_V^{Zee} - g_A^{Zee}\gamma_5) \frac{\not q + m_e}{q^2 - m_e^2} \not\epsilon_\gamma (-e)\, v(k_1, \lambda)$$

$$\approx \underbrace{\bar{v}(p, \bar{\lambda} = -\lambda)\, \not\epsilon_Z^{*} (g_V^{Zee} - g_A^{Zee}\gamma_5)\, u(q,\lambda)}_{M(e^-e^+ \to Z)} \frac{1}{q^2 - m_e^2} \underbrace{\bar{u}(q,\lambda)(-e\, \not\epsilon_\gamma)\, v(k_2, \lambda)}_{M(\gamma \to e^+e^-)}$$

2005. 9. 9

$\gamma \to e^+e^-$ の振幅 $-e\bar{u}(q,\lambda)\gamma^\mu v(k,\lambda)\,\epsilon_\mu(k_1,\lambda_1)$ は簡単に計算できて、

(7/7) $$\frac{dD_{e/\gamma}}{d|q^2|} = \frac{\alpha}{2\pi}\left[x^2+(1-x)^2\right]\frac{1}{|q^2-m_e^2|}$$

(7/7)' $$D_{e/\gamma}(x,Q^2) = \int_{|q^2-m_e^2|_{min}}^{Q^2} d|q^2|\,\frac{dD_{e/\gamma}(x)}{d|q^2|}$$
$$= \frac{\alpha}{2\pi}\left[x^2+(1-x)^2\right]\ln\frac{Q^2}{(1-x)m_e^2}$$

(7/7)'' $$\hat{P}_{e^-/\gamma}(x) = x^2+(1-x)^2 = \hat{P}_{e^+/\gamma}(x) = P_{e/\gamma}(x)$$

最後に

(7/8) $$\int_0^1 dx\left[P_{e/\gamma}(x)+P_{\gamma/\gamma}(x)\right] = 0$$

となるように $P_{\gamma/\gamma}(x) = A\,\delta(1-x)$ を規格化すると、

(7/8)' $$P_{\gamma/\gamma}(x) = -\frac{2}{3}\delta(1-x).$$

これで（$e^\pm$ と γ だけの）QED の分布関数の発展方程式が決定：

(7/9) $$\frac{d}{d\ln Q^2}D_{\gamma/a}(x,Q^2) = \frac{\alpha}{2\pi}\int_x^1\frac{dz}{z}\left\{P_{\gamma/e}(z)\left[D_{e^-/a}\left(\frac{x}{z},Q^2\right)+D_{e^+/a}\left(\frac{x}{z},Q^2\right)\right]\right.$$
$$\left.+P_{\gamma/\gamma}(z)\,D_{\gamma/a}\left(\frac{x}{z},Q^2\right)\right\}$$

(7/9)' $$\frac{d}{d\ln Q^2}D_{e^-/a}(x,Q^2) = \frac{\alpha}{2\pi}\int_x^1\frac{dz}{z}\left\{P_{e/e}(z)D_{e^-/a}\left(\frac{x}{z},Q^2\right)+P_{e/\gamma}(z)D_{\gamma/a}\left(\frac{x}{z},Q^2\right)\right\}$$

(7/9)'' $$\frac{d}{d\ln Q^2}D_{e^+/a}(x,Q^2) = \frac{\alpha}{2\pi}\int_x^1\frac{dz}{z}\left\{P_{e/e}(z)D_{e^+/a}\left(\frac{x}{z},Q^2\right)+P_{e/\gamma}(z)D_{\gamma/a}\left(\frac{x}{z},Q^2\right)\right\}$$

ここで、a は $a=e^-, e^+, \gamma$ でも $a=$ hadron でも良い。

QEDの splitting 関数は

(720)
$$\begin{cases} P_{e/e}(z) = \dfrac{1+z^2}{(1-z)_+} + \dfrac{3}{2}\delta(1-z) \\ P_{\gamma/e}(z) = \dfrac{1+(1-z)^2}{z} \\ P_{e/\gamma}(z) = z^2+(1-z)^2 \\ P_{\gamma/\gamma}(z) = -\dfrac{2}{3}\delta(1-z) \end{cases}$$

$$\left.\right\} \hat{P}_{e/e}(z) = \hat{P}_{\gamma/e}(1-z) = \frac{1+z^2}{(1-z)^2}$$

$$\hat{P}_{e/\gamma}(z) = z^2+(1-z)^2$$

$$\hat{P}_{\gamma/\gamma}(z) = 0$$

Leading Log $\left((\frac{\alpha}{\pi})^n \ln^n(Q^2/m_e^2) \right)$ の近似で、例えば、$D_{b/e}(x, Q^2)$ 分布関数は、初期条件

(721)
$$\begin{cases} D_{e/e}(x, Q^2=m_e^2) = \delta(1-x) \\ D_{\gamma/e}(x, m_e^2) = D_{e^+/e}(x, m_e^2) = 0 \end{cases}$$

から (719) によって求まる。やってみてください。又、より正確な分布関数、(691) や (710) を初期条件として、Q^2 発展を追うこともできる。

例として、(721) を出発点にして、(719) を $\frac{\alpha}{\pi}$ の逐次展開で解いてみます。

(719) を積分形にすると、

(722)
$$\begin{cases} D_{\gamma/e}(x,Q^2) - D_{\gamma/e}(x,m_e^2) = \dfrac{\alpha}{2\pi}\displaystyle\int_{m_e^2}^{Q^2} d\ln Q'^2 \int_x^1 \frac{dz}{z} \Big\{ P_{\gamma/e}(z)\Big[D_{e/e}(\tfrac{x}{z},Q'^2)+D_{e^+/e}(\tfrac{x}{z},Q'^2)\Big] \\ \qquad\qquad + P_{\gamma/\gamma}(z) D_{\gamma/e}(\tfrac{x}{z},Q'^2) \Big\} \\ D_{e/e}(x,Q^2) - D_{e/e}(x,m_e^2) = \dfrac{\alpha}{2\pi}\displaystyle\int_{m_e^2}^{Q^2} d\ln Q'^2 \int_x^1 \frac{dz}{z} \Big\{ P_{e/e}(z) D_{e/e}(\tfrac{x}{z},Q'^2) + P_{e/\gamma}(z) D_{\gamma/a}(\tfrac{x}{z},Q'^2) \Big\} \\ D_{e^+/e}(x,Q^2) - D_{e^+/e}(x,m_e^2) = \dfrac{\alpha}{2\pi}\displaystyle\int_{m_e^2}^{Q^2} d\ln Q'^2 \int_x^1 \frac{dz}{z} \Big\{ P_{e/e}(z) D_{e^+/e}(\tfrac{x}{z},Q'^2) + P_{e/\gamma}(z) D_{\gamma/a}(\tfrac{x}{z},Q'^2) \Big\} \end{cases}$$

(721)の初期条件(第0次解)を(722)式の右辺に代入すると、

(723)
$$
\begin{cases}
D^{(1)}_{\gamma/e}(x,Q^2) = \dfrac{\alpha}{2\pi} P_{\gamma/e}(x) \ln\dfrac{Q^2}{m_e^2} \\
D^{(1)}_{e/e}(x,Q^2) = \delta(1-x) + \dfrac{\alpha}{2\pi} P_{e/e}(x) \ln\dfrac{Q^2}{m_e^2} \\
D^{(1)}_{e^+/e}(x,Q^2) = 0
\end{cases}
$$

が得られる。(723)の第1次解を(722)式の右辺に代入すると第2次解

(724)
$$
\begin{cases}
D^{(2)}_{\gamma/e}(x,Q^2) = \left(\dfrac{\alpha}{2\pi}\ln\dfrac{Q^2}{m_e^2}\right) P_{\gamma/e}(x) \\
\qquad + \left(\dfrac{\alpha}{2\pi}\ln\dfrac{Q^2}{m_e^2}\right)^2 \dfrac{1}{2} \displaystyle\int_x^1 \dfrac{dz}{z}\left[P_{\gamma/e}(z)P_{e/e}\left(\dfrac{x}{z}\right) + P_{\gamma/\gamma}(z)P_{\gamma/e}\left(\dfrac{x}{z}\right)\right] \\
D^{(2)}_{e/e}(x,Q^2) = \delta(1-x) + \left(\dfrac{\alpha}{2\pi}\ln\dfrac{Q^2}{m_e^2}\right) P_{e/e}(x) \\
\qquad + \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\alpha}{2\pi}\ln\dfrac{Q^2}{m_e^2}\right)^2 \displaystyle\int_x^1 \dfrac{dz}{z}\left[P_{e/e}(z)P_{e/e}\left(\dfrac{x}{z}\right) + P_{e/\gamma}(z)P_{\gamma/e}\left(\dfrac{x}{z}\right)\right] \\
D^{(2)}_{e^+/e^-}(x,Q^2) = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\alpha}{2\pi}\ln\dfrac{Q^2}{m_e^2}\right)^2 \displaystyle\int_x^1 \dfrac{dz}{z}\left[P_{e/\gamma}(z)P_{\gamma/e}\left(\dfrac{x}{z}\right)\right]
\end{cases}
$$

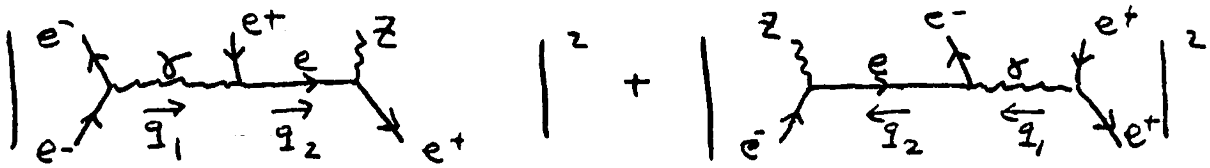
$\delta(1-x)$ や $\dfrac{1}{(1-z)_+}$ 等が入っているので、もう一歩計算が必要です。やってみてください。以後、逐次的に $\left(\dfrac{\alpha}{2\pi}\ln\dfrac{Q^2}{m_e^2}\right)^n$ の全ての項を足すことができます。(719)式の数値解は全ての項の足しあげになっているので、LL (leading Log) または LO (leading Order) と呼びます。

ところで (724) の第三式, $D^{(2)}_{e^+/e^-}(x, Q^2)$ は, $e^+e^- \to e^+e^- Z$ 過程の断面積を

(725) $d\sigma(e^-e^+ \to e^-e^+ Z) = \left[D^{(2)}_{e^+/e^-}(x, m_Z^2) + D^{(2)}_{e^-/e^+}(x, m_Z^2) \right] dx\, d\hat{\sigma}(e^+e^- \to m_Z^2)$

と近似したときに現れます。Feynman図は

(726) $\left| \right|^2 + \left| \right|^2$



左図の場合, e^+e^- は e^- ビームの向き, 右図のときは e^+ ビームの向きに放出されるので, 干渉は無視できます。左図の寄与は,

(727) $$[d\sigma]_{左図} = \int_{m_e^2}^{|q_2^2|} \frac{dD_{\gamma/e}(x_1)}{d|q_1^2|} d|q_1^2| dx_1 \int_{m_e^2}^{m_Z^2} \frac{dD(x_2)}{d|q_2^2|} d|q_2^2| dx_2 \; \underbrace{\hat{\sigma}(e^+e^- \to Z)}_{\propto\, \delta(m_Z^2 - s x_1 x_2)}$$

と評価されます。ここで, mass-ordering

(728) $|q_1^2| < |q_2^2|$

が決定的に重要な役割りをはたします。(727) 式は

(729) $$[d\sigma]_{左図} = \int_{m_e^2}^{m_Z^2} d|q_2|^2 D_{\gamma/e}(x_1, |q_2^2|) \frac{dD(x_2)_{e/\gamma}}{d|q_2^2|} dx_1 dx_2 d\hat{\sigma}_{e^+e^- \to Z}$$

$$= \left(\frac{\alpha}{2\pi}\right)^2 \int_{m_e^2}^{m_Z^2} \frac{d|q_2^2|}{|q_2^2|} \ln\frac{|q_2|^2}{m_e^2} P_{\gamma/e}(x_1) P_{e/\gamma}(x_2) dx_1 dx_2 d\hat{\sigma}_{e^+e^- \to Z}$$

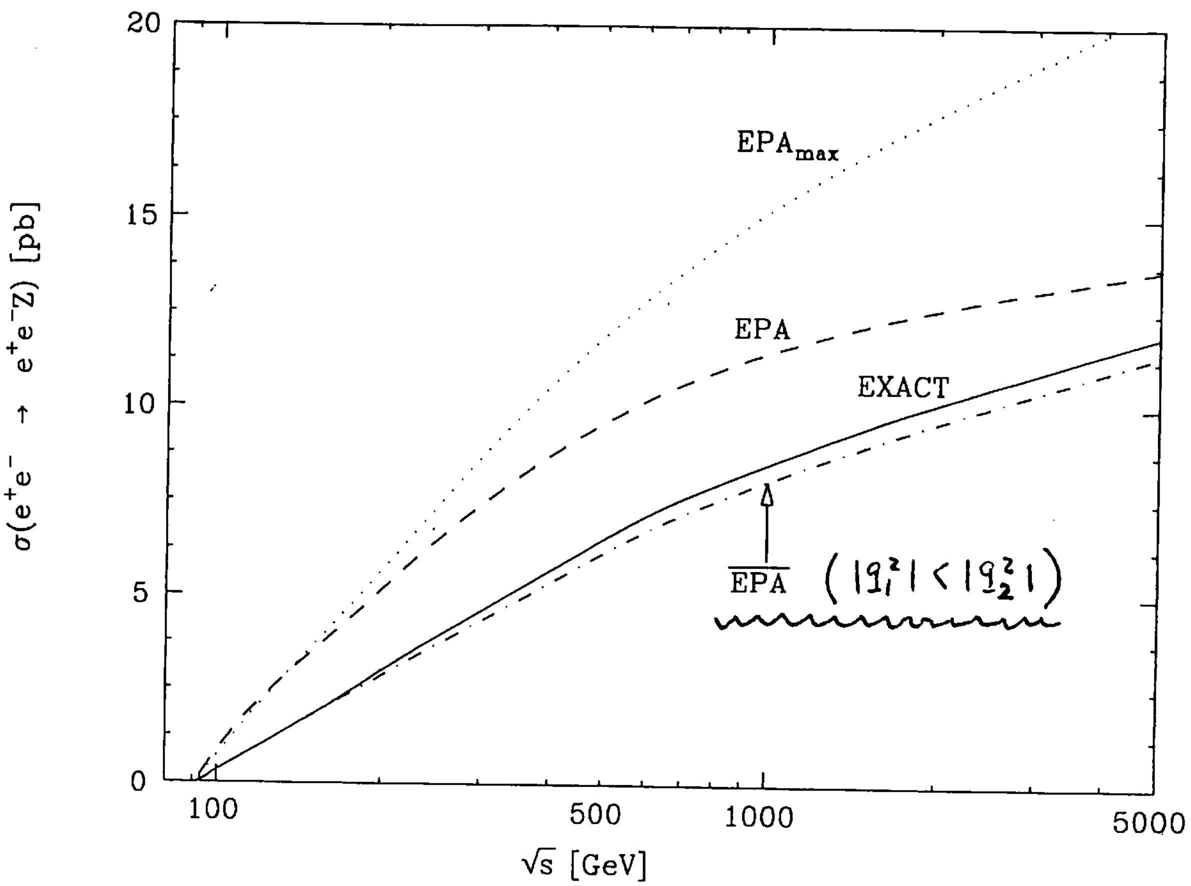
$$= \left(\frac{\alpha}{2\pi}\right)^2 \frac{1}{2} \left(\ln\frac{m_Z^2}{m_e^2}\right)^2 \int dx_1 dx_2 P_{\gamma/e}(x_1) P_{\gamma/e}(x_2) d\hat{\sigma}_{e^+e^- \to Z}$$

ここで, $\frac{1}{2}$ の項が mass-ordering (728) の帰結であることを確認してください。(724) 式の $\frac{1}{2}$ の origin は mass-ordering にあるわけです。

Mass-ordering に留意せず、不用意に「仮想実粒子の分布関数」を使って、

$$(730)\quad [d\sigma]_{左図} = \int_0^1 dx_1 \int_0^1 dx_2\, D_{\gamma/e}(x_1, m_Z^2)\, D_{e/\gamma}(x_2, m_Z^2)\, d\hat{\sigma}_{e^+e^-\to Z}$$

とすると大幅な過大評価をしてしまいます。QED の exact な断面積が、mass-ordering (728) を考慮するだけで、良く近似されることを示したのが次の図です。[KH et al, NPB365, 544 (1991); Fig.8]



この論文では、(727)式の様に、$|q_1^2|$, $|q_2^2|$ の分布を使って、Z の P_T 分布, E分布等が数%の精度で計算できることを示しました。//

GL-AP 方程式

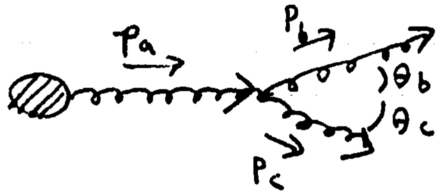
QEDの発展方程式をQCDにするために必要なのは $g \to g$ 分岐関数だけです。Helicity振幅から簡単に求まりますが、ここでは、

(731) R.K. Ellis, W.J. Stirling, B.R. Webber, QCD & Collider Physics, Cambridge U. Press (1996)

に従って、グルーオンのリニア偏極を考慮した導出をします。

グルオンのリニア(面)偏極はcollider物理で重要な役割りを果たすからです。time-like (jet)の分岐を考えます。

(732)



$$E_b = z E_a$$
$$E_c = (1-z) E_a$$
$$z \sin\theta_b = (1-z) \sin\theta_c \quad (全 p_T = 0)$$

$$p_a^2 = 2 E_b E_c (1-\cos\theta_{bc}) = E_a^2 z(1-z)\theta^2$$

$$\theta = \theta_b + \theta_c = \frac{1}{E_a}\sqrt{\frac{p_a^2}{z(1-z)}} = \frac{\theta_b}{1-z} = \frac{\theta_c}{z}$$

(733)
$$M_{n+1} = M_n \frac{1}{p_a^2} \varepsilon_a^{\alpha} \varepsilon_b^{\beta *} \varepsilon_c^{\gamma *} g f^{abc} \left[(p_a+p_b)_\gamma g_{\alpha\beta} + (-p_b+p_c)_\alpha g_{\beta\gamma} + (-p_c-p_a)_\beta g_{\gamma\alpha} \right]$$

$$= M_n \frac{2 g f^{abc}}{p_a^2} \left[(p_b\cdot\varepsilon_c^*)(\varepsilon_a\cdot\varepsilon_b^*) + (p_c\cdot\varepsilon_a)(\varepsilon_b^*\cdot\varepsilon_c^*) - (p_c\cdot\varepsilon_b^*)(\varepsilon_a\cdot\varepsilon_c^*) \right]$$

ここで、散乱(分岐)面内と面に垂直な偏極をベースにとると、

(734)
$$(\varepsilon_a^\mu)_{in} = (0, 1, 0, 0) \qquad (\varepsilon_a^\mu)_{out} = (0, 0, 1, 0)$$

$$(\varepsilon_b^\mu)^*_{in} = (0, 1, 0, -\theta_b) \qquad (\varepsilon_b^\mu)^*_{out} = (0, 0, 1, 0)$$

$$(\varepsilon_c^\mu)^*_{in} = (0, 1, 0, \theta_c) \qquad (\varepsilon_c^\mu)^*_{out} = (0, 0, 1, 0)$$

2005.9.9

(735) $p_b^\mu = E_a z(1, \theta_b, 0, 1)$, $p_c^\mu = E_a(1-z)(1, -\theta_c, 0, 1)$

(734),(735)より、θ^2項を無視して

(736)
$$\left.\begin{aligned} &\varepsilon_i^{in}\cdot\varepsilon_j^{in} = \varepsilon_i^{out}\cdot\varepsilon_j^{out} = -1 \\ &\varepsilon_i^{in}\cdot\varepsilon_j^{out} = \varepsilon_i^{out}\cdot p_j = 0 \end{aligned}\right\} \text{ for all } (i,j) = (a,b),(a,c),(b,c)$$

$$\varepsilon_a^{in}\cdot p_b = -E_a z(\underbrace{\theta_b}_{+\theta_c)}) = -E_a z\,\theta$$

$$\varepsilon_a^{in}\cdot p_c = E_a(1-z)\theta_b = E_a z(1-z)\theta$$

$$\varepsilon_b^{in}\cdot p_c = E_a(1-z)(\theta_c+\theta_b) = E_a(1-z)\theta$$

振幅が全てθに比例するので、propagator $1/p_a^2 = 1/E_a^2 z(1-z)\theta^2$ と合わせ、~~■~~ $1/\theta$ と振舞うのは、QEDと同じ。$1/E_a\theta$ を因子化すると、

(737)

ε_a	ε_b	ε_c	amp	$(amp)^2/z(1-z)$
in	in	in	$1-z(1-z)$	$(1-z)/z + z/(1-z) + z(1-z)$
in	out	out	$z(1-z)$	$z(1-z)$
out	in	out	$-(1-z)$	$(1-z)/z$
out	out	in	z	$z/(1-z)$

ε_aでaverage, $\varepsilon_b, \varepsilon_c$のスピンを足すと、

(738) $$\hat{P}_{g/g}(z) = C_A\left[\frac{1-z}{z} + \frac{z}{1-z} + z(1-z)\right]$$

が得られる。Helicity振幅を使うより、少し楽に計算できたように思います。文献(731)の紹介をした理由は、$\varepsilon_a(p_a, s_a)$がlinearに偏極した場合のsplittingをとり扱っているからです。散乱によって生成されたグルーオンは散乱面内に(linearに)偏極します。

今、散乱面が、上の(735)式の分岐面と ϕ だけずれているとしましょう。

(739) $\varepsilon_a^\mu(p_a, s_a) = (0, \cos\phi, \sin\phi, 0)$

このinitial stateの分岐は

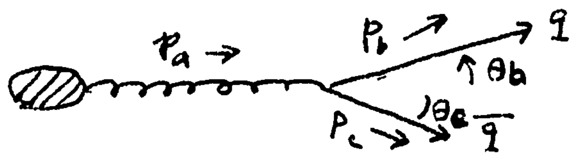
(740) $$\hat{P}_{g/g}(z,\phi) = \sum_{s_b, s_c} \left| \cos\phi\, M(\varepsilon_a^{in}, \varepsilon_b, \varepsilon_c) + \sin\phi(\varepsilon_a^{out}, \varepsilon_b, \varepsilon_c) \right|^2$$

$$= C_A \left\{ \cos^2\phi \left[\frac{1-z}{z} + \frac{z}{1-z} + 2z(1-z) \right] + \sin^2\phi \left[\frac{1-z}{z} + \frac{z}{1-z} \right] \right\}$$

$$= C_A \left\{ \frac{1-z}{z} + \frac{z}{1-z} + z(1-z)[1+\cos 2\phi] \right\}$$

ϕ について平均すれば(738)にもどりますが、僅かに($z=\frac{1}{2}$ のとき $\frac{1}{9} \approx 10\%$ 位)散乱面の中に分岐しやすいことがわかります。
僅かなのですが、この相関は $g \to q\bar{q}$ 分岐の場合と逆なので重要です。

この相関に気をつけながら $g \to q\bar{q}$ 分岐を計算します。

(741) 

(742) $$M_{n+1} = M_n \frac{1}{p_a^2} \varepsilon_a^\mu\, g T^a\, \bar{u}(p_b, \lambda) \gamma_\mu v(p_c, -\lambda)$$

$$= M_n \frac{1}{p_a^2} g T^a\, \varepsilon_a \cdot J_\lambda$$

(743) $J_+^\mu = u(p_b,+)_+^\dagger \sigma_+^\mu v(p_c,-)_+$

$= \sqrt{2E_b}\, \chi_+(\vec{p}_b)^\dagger \sigma_+^\mu (-\sqrt{2E_c})\, \chi_+(\vec{p}_c)$

$= -2\sqrt{E_b E_c}\, (\cos\frac{\theta_b}{2}, \sin\frac{\theta_b}{2})^\dagger \sigma_+^\mu \begin{pmatrix} \cos(\frac{-\theta_c}{2}) \\ \sin(\frac{-\theta_c}{2}) \end{pmatrix}$

$= -2\sqrt{E_b E_c}\, (1, \frac{\theta_b}{2})^\dagger \left[1, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \right] \begin{pmatrix} 1 \\ -\frac{\theta_c}{2} \end{pmatrix}$

$= -2E_a\sqrt{z(1-z)} \left[1, -\frac{\theta_c}{2} + \frac{\theta_b}{2}, i\frac{\theta_c}{2} + i\frac{\theta_b}{2}, 1 \right]$

$= -2E_a\sqrt{z(1-z)} \left[1, \frac{1-2z}{2}\theta, i\frac{\theta}{2}, 1 \right]$

Linear偏極の ε_a^μ (739)式との contraction は

(744) $\begin{cases} \varepsilon_a^\phi \cdot J_+ = 2E_a\sqrt{z(1-z)} \left\{ \frac{\theta}{2} \left[(1-2z)\cos\phi + i\sin\phi \right] \right\} \\ |\varepsilon_a^\phi \cdot J_+|^2 = E_a^2 z(1-z)\theta^2 \left[(1-2z)^2\cos^2\phi + \sin^2\phi \right] \end{cases}$

$|\varepsilon_a^\phi \cdot J_-|^2$も全く同じ（Parity）なので、カラー因子を考慮して

(745) $\hat{P}_{q/g}(z, \varepsilon_g^\phi) = T_R \left[(1-2z)^2\cos^2\phi + \sin^2\phi \right]$

$= T_R \left[z^2 + (1-z)^2 - 2z(1-z)\cos 2\phi \right]$

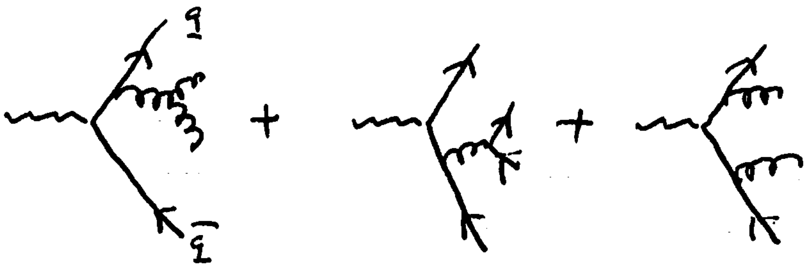
つまり、$g \to q\bar{q}$ 分岐は、散乱面（gのlinear偏極の面）と直角に起きやすい［$z=\frac{1}{2}$では100%！］わけです。

1988年、Bengtson-Zerwas［PLB208, 306 (1988)］はこの相関を利用した ggg 結合のテストを提案しました。

(746)
$$\begin{cases} e^+e^- \to 4j & E_1 > E_2 > E_3 > E_4 \\ \cos\chi_{BZ} = \dfrac{(\vec{p}_1 \times \vec{p}_2)\cdot(\vec{p}_3 \times \vec{p}_4)}{|\vec{p}_1 \times \vec{p}_2||\vec{p}_3 \times \vec{p}_4|} \end{cases}$$

$E_1 > E_2 > E_3 > E_4$ より、P_1 と P_2 が q と $\bar{q}$, P_3 と P_4 が $g \to gg$, $g \to q\bar{q}$

(747)

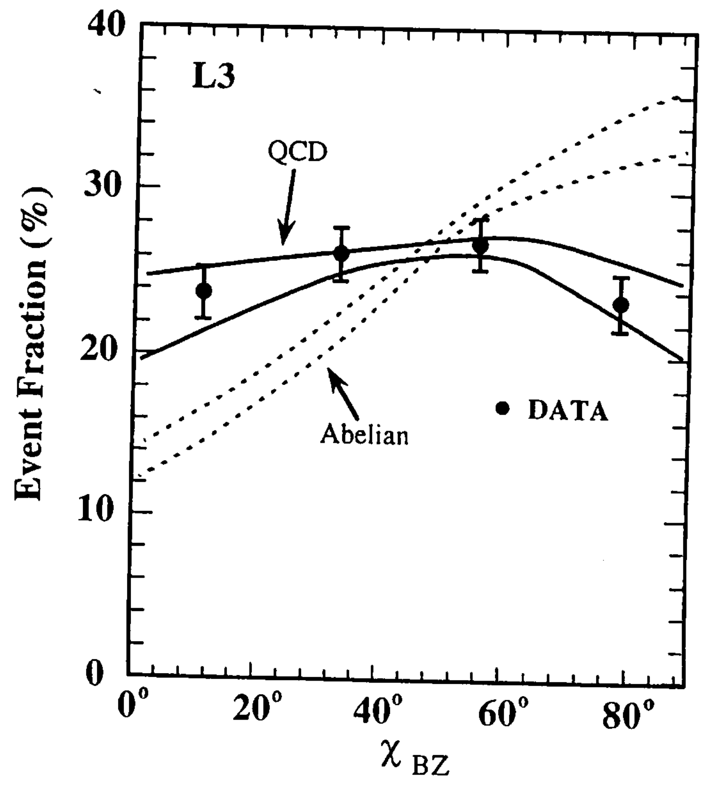


の分岐である確率が高いわけです。$\vec{P}_1 \times \vec{P}_2$ は $q\bar{q}g^*$ の散乱面、従って g^* の偏極面を定め、$\vec{P}_3 \times \vec{P}_4$ が分岐面を定めます。もし ggg 結合が無ければ (Abelian グルーオン模型) (745) により、$\chi_{BZ} \sim \phi \sim 90°$ に強い相関があるはずで、QCD では $C_A \gg T_F$ なので、この相関がうすまるはずです。

右図は L3 による検証です。

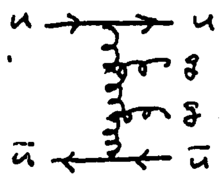
[L3, PLB248, 227 (1990)]

TRISTAN では 4-jet rate が増えるところまでいかできませんでした。



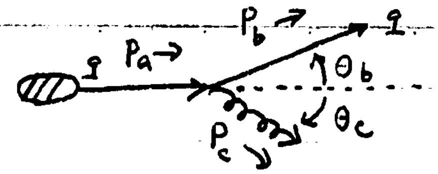
2005. 9. 10

余談：(740)で　g→gg 分岐は g の linear pol. の面（一般に g 生成事象の散乱面）内に 10%程度出やすいことが分かったが、これは事実上、軸対称として良いと思う。第一回の 6-jet background の平面性は、従って、g→gg 分岐では説明できない。t-channel 過程、例えば 4jet なる、



$u\bar{u} \to u\bar{u}gg$ 等の相関を調べる必要があります。$u \to ug$ 分岐のとき、g は散乱（分岐）面内に強く偏極する（次に導きます）ので、以前の $gg \to gg$ 散乱振幅が入射 g の linear 偏極によってどう変化するのかを調べるのが良いように思います。ヘリシティー振幅だけでなく、linear pol. 振幅も役に立つことを学びました。（グルオンと光子だけですけれど。）いずれにしても、$t\bar{t}$ background の 6jet の平面性が、現在の shower MC（特に Herwig）で再現されるのかどうか、どなたか至急 check して report して下さい。このあたりが key point になるような気がします。

$g \to gg$ 分岐は $e \to e\gamma$ 分岐と同じだし、すぐ前にやった $g \to q\bar{q}$ 分岐の crossing なのだけれど、initial state の g の linear pol. を final state の g の linear pol. にどう cross (analytic continuation) すれば良いか分からないので（ヘリシティー振幅の crossing でさえ non-trivial なのに、今度は相対位相まで考慮しなければなりません）、あらためて計算します。（場の理論って本当に便利です。考えても分からないことでも、計算すれば良いのだから。）

(748) 

(749) $$M_{n+1} = M_n \frac{1}{p_a^2} \bar{u}(p_b,\lambda)\gamma^\mu u(p_a,\lambda)\, g T^a \varepsilon_\mu^*(p_c, s_c)$$
$$= M_n \frac{1}{p_a^2}\, g T^a J_\lambda \cdot \varepsilon^*$$

(750) $$J_+^\mu = u(p_b,+)_+^\dagger \sigma_+^\mu u(p_a,+)_+$$
$$= \sqrt{2E_b}\,\chi_+(\vec{p}_b)^\dagger \sigma_+^\mu \sqrt{2E_a}\,\chi_+(\vec{p}_a)$$
$$= 2\sqrt{E_a E_b}\,(\cos\tfrac{\theta_b}{2}, \sin\tfrac{\theta_b}{2})^\dagger \left[1, \begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0&-i\\i&0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1&0\\0&-1\end{pmatrix}\right]\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$$
$$= 2E_a\sqrt{z}\,(1, \tfrac{\theta_b}{2})^\dagger \left[\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\i\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}\right]$$
$$= 2E_a\sqrt{z}\left[1, \frac{\theta_b}{2}, \frac{\theta_b}{2}i, 1\right]$$

(751) $$\varepsilon^{*\mu}(p_c,\phi) = \cos\phi\, \varepsilon^\mu(p_c)_{in} + \sin\phi\, \varepsilon^\mu(p_c)_{out}$$
$$= \cos\phi\,(0,1,0,\theta_c) + \sin\phi\,(0,0,1,0) \qquad \because (734)$$
$$= (0, \cos\phi, \sin\phi, \theta_c\cos\phi)$$

(752) $$J_+\cdot\varepsilon_\phi^* = 2E_a\sqrt{z}\left[0 - \frac{\theta_b}{2}\cos\phi - \frac{\theta_b}{2} i\sin\phi - \theta_c\cos\phi\right]$$
$$= -E_a\sqrt{z}\left[(\theta_b + 2\theta_c)\cos\phi + i\theta_b\sin\phi\right]$$
$$= -E_a\sqrt{z}\,\theta\left[(1+z)\cos\phi + i(1-z)\sin\phi\right]$$

(753) $$|J_+\cdot\varepsilon_\phi^*|^2 = E_a^2 z\theta^2\left[(1+z)^2\cos^2\phi + (1-z)^2\sin^2\phi\right] = E_a^2 z\theta^2\left[1+z^2+2z\cos 2\phi\right]$$

(754) $$\hat{P}_{g/q}(z, \varepsilon_g^\phi) = C_F\frac{1+z^2+2z\cos 2\phi}{1-z}$$

生成された hard $(z>\frac{1}{2})$ グルーオンは強く(~100%)分岐面内に偏極する。//

ここまでで、全ての bare な (tree-level の IR singularities が正則化されておらず、且つ、loop からの効果による IR の相殺がされていない) 分岐関数 $\hat{P}_{b/a}(z)$ [$a \to b$ の分岐を表わす] がそろったので、まず、GL-AP 方程式を書き下し、次に、IR の相殺を体現する full の分岐関数 $P_{b/a}(z)$ と $\hat{P}_{b/a}(z)$ との関係を定めます。まず GL-AP 方程式ですが、分布関数として次のものを用います。

(755)
$$\begin{cases} q(x, Q^2) = D_{q/p}(x, Q^2), \quad \bar{q}(x, Q^2) = D_{\bar{q}/p}(x, Q^2) \\ u(x, Q^2) = D_{u/p}(x, Q^2) = D_{\bar{u}/\bar{p}}(x, Q^2) = D_{d/n}(x, Q^2) \\ g(x, Q^2) = D_{g/p}(x, Q^2) = D_{g/\bar{p}}(x, Q^2) = D_{g/n}(x, Q^2) \end{cases}$$

GL-AP 方程式は

(756)
$$\frac{d}{d\ln Q^2} q(x, Q^2) = \frac{\alpha_s}{2\pi} \int_x^1 \frac{dz}{z} \left[P_{q/q}(z) q\left(\frac{x}{z}, Q^2\right) + P_{q/g}(z) g\left(\frac{x}{z}, Q^2\right) \right]$$

(756)′
$$\frac{d}{d\ln Q^2} \bar{q}(x, Q^2) = \frac{\alpha_s}{2\pi} \int_x^1 \frac{dz}{z} \left[P_{q/q}(z) \bar{q}\left(\frac{x}{z}, Q^2\right) + P_{q/g}(z) g\left(\frac{x}{z}, Q^2\right) \right]$$

(756)″
$$\frac{d}{d\ln Q^2} g(x, Q^2) = \frac{\alpha_s}{2\pi} \int_x^1 \frac{dz}{z} \left[P_{g/q}(z) \sum_q (q + \bar{q})\left(\frac{x}{z}, Q^2\right) + P_{g/g}(z) g\left(\frac{x}{z}, Q^2\right) \right]$$

となります。ここで

(757) $q = u, d, s, c, b \quad , \quad \bar{q} = \bar{u}, \bar{d}, \bar{s}, \bar{c}, \bar{b}$

ですが、(755) であげた C 不変性、I 不変性以外は、$c \approx \bar{c}$, $b \approx \bar{b}$ が PQCD で

予想される程度で、他は実験で定めることになります。特に

(758) $s \neq \bar{s}$

は予想されることなので［$p \to K^+ \to \bar{s}$ が $p \to K^- \to s$ より large x で大きいことは殆ほとんど疑いようもないことに思われるのですが、多くのPDFは $s=\bar{s}$ を仮定してしまっているようです。νTeV anomaly もそのあたりの理論 anomaly だろうと思っています。$s \neq \bar{s}$ を前提にした charm production 等の解析が必要と思います。］

一般論としては、私は、b と $\bar{b}$ を除き（つまり、$b \to g$ を出発点とする shower の効果を無視する）、残りを全て同等に取り扱うのがLHCでは良い（Tevatronでも多分）近似だろうと思います。［$b\bar{b}$ への分岐は最後にくっつけるだけの方が近似が良いだろうという意味です。］ そうすると、(756)は $4\times2+1=9$ で 9×9 の行列の形の evolution equation です。

(759)
$$
\frac{d}{d\ln Q^2}\begin{pmatrix} u \\ d \\ s \\ c \\ \bar{u} \\ \bar{d} \\ \bar{s} \\ \bar{c} \\ g \end{pmatrix}
= \frac{\alpha_s}{2\pi}\int\frac{dz}{z}
\begin{pmatrix}
P_{qq} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & P_{qg} \\
0 & P_{qq} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & P_{qg} \\
0 & 0 & P_{qq} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & P_{qg} \\
0 & 0 & 0 & P_{qq} & 0 & 0 & 0 & 0 & P_{qg} \\
0 & 0 & 0 & 0 & P_{qq} & 0 & 0 & 0 & P_{qg} \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & P_{qq} & 0 & 0 & P_{qg} \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & P_{qq} & 0 & P_{qg} \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & P_{qq} & P_{qg} \\
P_{gq} & P_{gq} & P_{gq} & P_{gq} & P_{gq} & P_{gq} & P_{gq} & P_{gq} & P_{gg}
\end{pmatrix}
\otimes
\begin{pmatrix} u \\ d \\ s \\ c \\ \bar{u} \\ \bar{d} \\ \bar{s} \\ \bar{c} \\ g \end{pmatrix}
$$

Shower MC の基礎がGL-AP方程式なので、この構造をしっかりと理解しておいてください。MC では、$m_c \neq 0$ による輻射の抑制を取り入れることも可能です。

歴史的には GL-AP (756)、(759) はまず DIS 分布関数 (PDF) の解析に使われたので、PDF について少し説明しておきます。[以後の講義では、GL-AP はもっぱら QCD shower-MC の基礎として使うので、気をつけてください。]

GL-AP を PDF に用いるときには次のことが役に立ちます。

(760)
$$\begin{cases} q_v(x, Q^2) \equiv q(x, Q^2) - \bar{q}(x, Q^2) & ; \ q = u, d, s, c \\ q_S(x, Q^2) \equiv \sum\limits_{q=u,d,s,c} \left[q(x, Q^2) + \bar{q}(x, Q^2) \right] & \end{cases}$$

の二種類の（q_v が 4ヶ, q_S が 1ヶ）PDF を考えると、GL-AP が簡単化します。

(761)
$$\frac{d}{d\ln Q^2} q_v(x, Q^2) = \frac{\alpha_s}{2\pi} \int_x^1 \frac{dz}{z} P_{q/q}(z)\, q_v(x, Q^2) \qquad ; \ q = u, d, s, c$$

これは 1行1列です。

(762)
$$\frac{d}{d\ln Q^2} \begin{pmatrix} q_S(x, Q^2) \\ g(x, Q^2) \end{pmatrix} = \frac{\alpha_s}{2\pi} \int_x^1 \frac{dz}{z} \begin{pmatrix} P_{q/q}(z) & P_{q/g}(z) \\ P_{g/q}(z) & P_{g/g}(z) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} q_S(\frac{x}{z}, Q^2) \\ g(\frac{x}{z}, Q^2) \end{pmatrix}$$

こちらは 2行2列です。いくつか sum rule が証明できます（後でします）。

(763)
$$\int_0^1 dx\, q_v(x, Q^2) = n_{q_v} \qquad (= 2 \text{ for } u_v, = 1 \text{ for } d_v, = 0 \text{ for } s_v, c_v)$$

(764)
$$\int_0^1 dx\, x \left[q_S(x, Q^2) + g(x, Q^2) \right] = 1 \qquad (\text{Energy Sum Rule})$$

上記二つの sum rule は PDF の normalization を規定する大変重要な sum rule です。(763) で $n_{s_v} = n_{c_v} = 0$ ですが、これは $s_v(x, Q^2) = 0$ とは全く異なることを忘れないでください。$c_v(x, Q^2) \approx \alpha_s(m_c)^3 \approx 0$ は OK と想像します。

Sum rule を導出する前にまず, virtual (loop) 補正の入った分岐関数を求めなければなりません。QEDのときと同様, 分岐による粒子数の変化を再規格化することで, (loop計算をせずに) 求めることができます。[より物理的に, tree 分岐の IR 発散を正則化したうえで再規格化する方法を, 次回に説明し, Shower MC を導きます。今日の $\frac{1}{(1-z)_+}$ や $\delta(1-z)$ は解析的計算には向いていますが, MC には向きません。]

(765) $$P_{q/q}(z) = C_F\left[\frac{1+z^2}{(1-z)_+} + \frac{3}{2}\delta(1-z)\right]$$

は QED と全く同じなのでくり返しません。$P_{g/g}(z)$ を $\hat{P}_{g/g}(z)$ (738) から求めます。

(766) $$P_{g/g}(z) = C_A\left[\frac{z}{(1-z)_+} + \frac{1-z}{z} + z(1-z)\right] + A\,\delta(1-z)$$

とおいて A を求めます。g数の保存 (gの波動関数の再規格化) 条件は

(767) $$\int_0^1 dz\left[P_{g/g}(z) + n_f P_{q/g}(z)\right] = 0$$

(768) $$\int_0^1 dz\, P_{q/g}(z) = \int_0^1 dz\, \hat{P}_{q/g}(z) = \int_0^1 dz\, T_R\left[z^2+(1-z)^2\right] = \frac{2}{3}T_R$$

(769) $$\int_0^1 dz\, P_{g/g}(z) = C_A\int_0^1 dz\left[\frac{z}{(1-z)_+} + \frac{1-z}{z} + z(1-z)\right] + A$$
$$= 2C_A\int_0^1 dz\,\frac{z}{(1-z)_+} + C_A\int_0^1 dz\,(z-z^2) + A$$
$$= 2C_A\int_0^1 dz\,\frac{z-1}{1-z} + C_A\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right) + A$$
$$= C_A\left(-2+\frac{1}{6}\right) + A = -\frac{11}{6}C_A + A$$

(768) と (769) を (767) に代入し

(770) $$-\frac{11}{6}C_A + A + \frac{2}{3}T_R n_f = 0 \Rightarrow A = \frac{11C_A - 4n_f T_R}{6} = 2b_0$$; (703)参

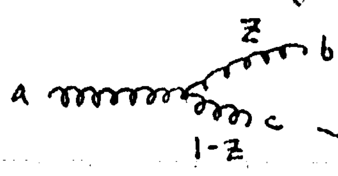
QCD for Collider Physics XI

2005. 9. 30

前回の講義でGL-AP方程式 (756), (759) を導き、規格化された分岐関数 $P_{q/q}(z)$ (765), $P_{g/q}(z)=\hat{P}_{g/q}(z)=\hat{P}_{g/q}(z)$ (754) [(注) (754)式の左辺は $\hat{P}_{g/q}(z,\epsilon_g^{\phi})$ の誤りで、$z=\frac{E_b}{E_a}$ は q中の q のエネルギー比です。従って gluon 偏極が大きいのは $z\sim 1$ ですから soft $(1-z\sim 0)$ の場合です。p.260の (754)式とその下の文を訂正しておいてください。この修正をすれば、$e^+e^-\to q\bar{q}(g\to q\bar{q})$ で 'soft' な $q\bar{q}$ が散乱面と直角に生成されやすいという Abelian-gluon-model の予言 (p.258 の下の図の χ_{BZ} 分布の点線) が定性的に理解できます。], $P_{q/g}(z)=\hat{P}_{q/g}(z)$ (745), $P_{g/g}(z)$ (766)–(770) を求めました。

が、(766)式は規格化が2倍間違っていました。分岐関数 $\hat{P}_{g/g}(z)$ (738) が正しいのに、規格化された分岐関数 $P_{g/g}(z)$ (766) が2倍間違ってしまった理由は、GL-AP方程式 (756) による $P_{g/g}(z)$ の定義にあります。$g\to gg$ 分岐による寄与だけを書くと、

(771) ≈ (756)″
$$\underbrace{\Delta g(x,Q^2)}_{(\text{from } g\to gg)} = (\Delta \ln Q^2)\frac{\alpha_s}{2\pi}\int_x^1 \frac{dz}{z}\, P_{g/g}(z)\, g\left(\frac{x}{z},Q^2\right)$$
$$= (\Delta \ln Q^2)\frac{\alpha_s}{2\pi}\int_0^1 \frac{dz}{z}\, \hat{P}_{g/g}(z)\left\{g\left(\frac{x}{z},Q^2\right)+g\left(\frac{x}{1-z},Q^2\right)\right\} \underbrace{+\cdots}_{(z=1\text{の規格化項})}$$



2005. 9. 30

となります。つまり、$g \to gg$ 分岐ではエネルギー比 z のグルオンの効果と、$1-z$ のグルオンの効果の和が GL-AP 方程式の一個の分岐関数 $\hat{P}_{g/g}(z)$ で表現されているわけです。一方

$$\hat{P}_{g/g}(1-z) = \hat{P}_{g/g}(z) = C_A\left[\frac{1-z}{z} + \frac{z}{1-z} + z(1-z)\right] \tag{772}$$

ですから、(771) の第二行は

$$\begin{aligned}(773)\quad &\int_0^1 \frac{dz}{z}\,\hat{P}_{g/g}(z)\left[g\left(\frac{x}{z},Q^2\right) + g\left(\frac{x}{1-z},Q^2\right)\right] + \cdots \\ &= \int_0^1 \frac{dz}{z}\left[\hat{P}_{g/g}(z)\,g\left(\frac{x}{z},Q^2\right) + \hat{P}_{g/g}(1-z)\,g\left(\frac{x}{1-z},Q^2\right)\right] + \cdots \\ &= \int_0^1 \frac{dz}{z}\,2\hat{P}_{g/g}(z)\,g\left(\frac{x}{z},Q^2\right) + \cdots \\ &= \int_x^1 \frac{dz}{z}\,2\hat{P}_{g/g}(z)\,g\left(\frac{x}{z},Q^2\right) + \cdots\end{aligned}$$

ここで2倍の因子が表れました。$+\cdots$ は $z=1$ の規格化項ですが、この計算 [redacted] は (766)〜(770) で正しいことが分かります。これは、上の (773) 式で第一項だけが（つまり半分だけが）$z \to 1$ の発散を持つからです。(770) が正しかったために、規格化の誤りを見つけるのに手間取ってしまいました。

ここで GL-AP 方程式の規格化された分岐関数を整理しておきましょう。

2005. 9. 30

まず 'bare' な分岐関数は

(774)
$$
\begin{cases}
\hat{P}_{q/q}(z) = C_F \dfrac{1+z^2}{1-z} \\
\hat{P}_{g/q}(z) = C_F \dfrac{1+(1-z)^2}{z} = \hat{P}_{q/q}(1-z) \\
\hat{P}_{q/g}(z) = T_F \left(z^2+(1-z)^2\right) = \hat{P}_{\bar{q}/g}(z) = \hat{P}_{q/g}(1-z) \\
\hat{P}_{g/g}(z) = C_A \left[\dfrac{z}{1-z} + \dfrac{1-z}{z} + z(1-z)\right] = \hat{P}_{g/g}(1-z)
\end{cases}
$$

GL-AP 方程式に表われる規格化された分岐関数は

(775)
$$
\begin{cases}
P_{q/q}(z) = C_F \left[\dfrac{1+z^2}{(1-z)_+} + \dfrac{3}{2}\delta(1-z)\right] \\
P_{g/q}(z) = C_F \dfrac{1+(1-z)^2}{z} \qquad = \hat{P}_{g/q}(z) = \hat{P}_{q/q}(1-z) \\
P_{q/g}(z) = T_F \left[z^2+(1-z)^2\right] \qquad = \hat{P}_{q/g}(z) = \hat{P}_{q/g}(1-z) \\
P_{g/g}(z) = 2C_A \left[\dfrac{z}{(1-z)_+} + \dfrac{1-z}{z} + z(1-z)\right] + 2b_0\,\delta(1-z)
\end{cases}
$$

$$
b_0 = \frac{11C_A - 4n_f T_F}{12}
$$

規格化された分岐関数が次の和則(保存則)を満たすことを確認してください。

(776) $\displaystyle\int_0^1 dz\, P_{q/q}(z) = 0$ … $q \to qg$ で q 数保存

(776)' $\displaystyle\int_0^1 dz \cdot z \left[P_{q/q}(z) + P_{g/q}(z)\right] = 0$ … $q \to qg$ でエネルギー保存

(776)'' $\displaystyle\int_0^1 dz \cdot z \left[P_{g/g}(z) + 2n_f P_{q/g}(z)\right] = 0$ … $g \to gg$ と $g \to q\bar{q}$ でエネルギー保存

(776) は QED の電子数保存 (711), (712), (714) と同じです。(776)' と (776)'' は

2005. 9. 30

collinear
エネルギー保存を表します。やってみましょう。

$$(777)\quad \int_0^1 dz\cdot z\, P_{q/q}(z) = C_F\int_0^1 dz\left[\frac{z+z^3}{(1-z)_+}+\frac{3}{2}z\,\delta(1-z)\right]$$

$$= C_F\left\{\int_0^1 dz\,\frac{(z-1)+(z^3-1)}{1-z}+\frac{3}{2}\right\}$$

$$= C_F\left\{-\int_0^1 dz\,(1+1+z+z^2)+\frac{3}{2}\right\}$$

$$= C_F\left\{-\left(2+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\right)+\frac{3}{2}\right\} = -\frac{4}{3}C_F$$

$$(777)'\quad \int_0^1 dz\cdot z\, P_{g/q}(z) = C_F\int_0^1 dz\left[1+(1-z)^2\right]$$

$$= C_F\int_0^1 dz\,(1+z^2) = C_F\left(1+\frac{1}{3}\right) = \frac{4}{3}C_F$$

$$(777)''\quad \int_0^1 dz\cdot z\, P_{g/g}(z) = 2C_A\int_0^1 dz\left[\frac{z^2-1}{1-z}+1-z+z^2(1-z)\right]+2b_0$$

$$= 2C_A\int_0^1 dz\left[\cancel{-1}-z+\cancel{1}-z+z^2-z^3\right]+2b_0$$

$$= 2C_A\left(-1+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)+\frac{11}{6}C_A-\frac{2}{3}n_f T_F$$

$$= 2C_A\left(-\frac{11}{12}\right)+\frac{11}{6}C_A-\frac{2}{3}n_f T_F$$

$$= -\frac{2}{3}n_f T_F$$

$$(777)'''\quad \int_0^1 dz\cdot z\, P_{q/g}(z) = T_F\int_0^1 dz\left[z^3+z(1-z)^2\right]$$

$$= T_F\int_0^1 dz\left[z-2z^2+2z^3\right]$$

$$= T_F\left(\frac{1}{2}-\frac{2}{3}+\frac{2}{4}\right)$$

$$= \frac{1}{3}T_F$$

エネルギー和則 (776)′と(776)″が導かれました。

ここで GL-AP 方程式が、分布関数のモーメントに対しては単純な因子化（行列）になることを示しておきましょう。(761)と(762)をもう一度：

(778)=(761) $$\frac{d}{d\ln Q^2}\, q_V(x,Q^2) = \frac{\alpha_s}{2\pi}\int_x^1 \frac{dz}{z}\, P_{q/q}(z)\, q_V\!\left(\frac{x}{z},Q^2\right)$$

←(762)も訂正してください。

(779)=(762) $$\frac{d}{d\ln Q^2}\begin{pmatrix} q_S(x,Q^2) \\ g(x,Q^2)\end{pmatrix} = \frac{\alpha_s}{2\pi}\int_x^1 \frac{dz}{z}\begin{bmatrix} P_{q/q}(z) & \overbrace{P_{q/g}(z)}^{2n_f} \\ P_{g/q}(z) & P_{g/g}(z)\end{bmatrix}\begin{bmatrix} q_S(\frac{x}{z},Q^2) \\ g(\frac{x}{z},Q^2)\end{bmatrix}$$

でした。ここで n 次のモーメント

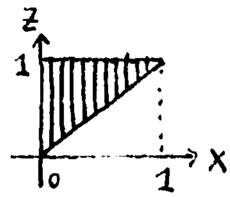
(780) $$\begin{cases} q_V^n(Q^2) = \int_0^1 dx\; x^{n-1} q_V(x,Q^2) \\ q_S^n(Q^2) = \int_0^1 dx\; x^{n-1} q_S(x,Q^2) \\ g^n(Q^2) = \int_0^1 dx\; x^{n-1} g(x,Q^2) \end{cases}$$

(780)' $$P_{b/a}^n = \int_0^1 dz\; z^{n-1} P_{b/a}(z)$$

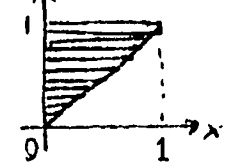
を定義して、たたみ込み積分の性質

(781) $$\int_0^1 dx\; x^{n-1}\int_x^1 \frac{dz}{z}\; P(z)\, D\!\left(\frac{x}{z}\right)$$

$$= \int_0^1 dx \int_x^1 dz\; \frac{1}{z}\left\{ P(z)\cdot x^{n-1} D\!\left(\frac{x}{z}\right)\right\}$$



$$= \int_0^1 dz \int_0^z dx \cdot \frac{1}{z}\left\{ z^{n-1} P(z)\cdot \left(\frac{x}{z}\right)^{n-1} D\!\left(\frac{x}{z}\right)\right\}$$



$$= \int_0^1 dz \int_0^1 d\!\left(\frac{x}{z}\right)\left\{ z^{n-1} P(z)\cdot \left(\frac{x}{z}\right)^{n-1} D\!\left(\frac{x}{z}\right)\right\}$$

$$= \left\{\int_0^1 dz\; z^{n-1} P(z)\right\}\cdot\left\{\int_0^1 dx'\; x'^{\,n-1} D(x')\right\} \equiv P^n \cdot D^n$$

を用いると、(778)、(779) はそれぞれ、

(782) $$\frac{d}{d\ln Q^2} q_V^n(Q^2) = \frac{\alpha_s}{2\pi} P^n_{q/q} \cdot q_V^n(Q^2)$$

(783) $$\frac{d}{d\ln Q^2} \begin{pmatrix} q_S^n(Q^2) \\ g^n(Q^2) \end{pmatrix} = \frac{\alpha_s}{2\pi} \begin{pmatrix} P^n_{q/q} & \overbrace{P^n_{q/g}}^{2n_f} \\ P^n_{g/q} & P^n_{g/g} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} q_S^n(Q^2) \\ g^n(Q^2) \end{pmatrix}$$

これらは解析的に解くことができて、例えば (782) は

(784) $$\frac{d\, q_V^n(Q^2)}{q_V^n(Q^2)} = \frac{\alpha_s(Q^2)}{2\pi} P^n_{q/q}\, d\ln Q^2$$

(784)′ $$\int_{Q_0^2}^{Q^2} d\ln q_V^n(Q'^2) = \int_{Q_0^2}^{Q^2} d\ln Q'^2 \frac{\alpha_s(Q^2)}{2\pi} P^n_{q/q}$$

ここで、$\alpha_s(Q^2)/\pi$ に $\overline{MS}$ を使うと、β 関数が Q^2 に顕わによらないので、

(785) $$\frac{d}{d\ln Q^2} \frac{\alpha_s(Q^2)}{\pi}\overline{MS} = \beta_{\overline{MS}} = -\left\{ b_0\left(\frac{\alpha_s}{\pi}\right)^2 + b_1\left(\frac{\alpha_s}{\pi}\right)^3 + \cdots \right\}$$ p. 244 (703)

(785)′ $$d\ln Q^2 = \frac{d\frac{\alpha_s(Q^2)}{\pi}\overline{MS}}{\beta_{\overline{MS}}} = -\frac{da}{b_0 a^2 + b_1 a^3 + \cdots} \quad ; \ a = \frac{\alpha_s(Q^2)}{\pi}\overline{MS}$$

これを (784)′ に代入すると

(786) $$\ln \frac{q_V^n(Q^2)}{q_V^n(Q_0^2)} = \int_{a(Q_0^2)}^{a(Q^2)} \frac{da}{-b_0 a^2 - b_1 a^3 + \cdots} \frac{a}{2}\left[P^{n(0)}_{q/q} + \frac{a}{2} P^{n(1)}_{q/q} + \cdots \right]$$
$$= -\frac{1}{2b_0} \int_{a(Q_0^2)}^{a(Q^2)} \frac{da}{a} \left[P^{n(0)}_{q/q} + a\left(\frac{1}{2}P^{n(1)}_{q/q} - \frac{b_1}{b_0} P^{n(0)}_{q/q}\right) + \cdots \right]$$
$$= -\frac{1}{2b_0}\left\{ \ln\frac{a(Q^2)}{a(Q_0^2)} P^{n(0)}_{q/q} + \left(\ '' \ \right)\left[a(Q^2) - a(Q_0^2)\right] + \cdots \right\}$$

(787) $$q_V^n(Q^2) = q_V^n(Q_0^2)\exp\left\{-\frac{1}{2b_0}P_{q/q}^{n(0)}\ln\frac{a(Q^2)}{a(Q_0^2)} + \cdots\right\}$$
$$= q_V^n(Q_0^2)\left(\frac{a(Q^2)}{a(Q_0^2)}\right)^{-\frac{1}{2b_0}P_{q/q}^{n(0)}} + \cdots$$

となります。$+\cdots$ は高次項で、b_1/b_0, $P_{q/q}^{n(1)}$ 等で簡単に表現されます。

ここで、$P_{q/q}^{n(0)} \neq 0$ で Q^2 依存性が表われる（スケール則が破れる）ので、

$P_{q/q}^n$ 等のことを異常次元（次元スケール則を破る量子効果）と呼びます。

計算してみましょう。

(788) $$P_{q/q}^{n(0)} = \int_0^1 dz\, z^{n-1} P_{q/q}^{(0)}(z)$$
$$= \int_0^1 dz\, z^{n-1}\, C_F\left[\frac{1+z^2}{(1-z)_+} + \frac{3}{2}\delta(1-z)\right]$$
$$= C_F\left\{\int_0^1 dz\,\frac{z^{n-1}+z^{n+1}}{(1-z)_+} + \frac{3}{2}\right\}$$
$$= C_F\left\{-\int_0^1 dz\left[\frac{1-z^{n-1}}{1-z} + \frac{1-z^{n+1}}{1-z}\right] + \frac{3}{2}\right\}$$
$$= C_F\left\{-\left[\sum_{k=0}^{n-2}\int_0^1 dz\, z^k + \int_0^1 dz\sum_{k=0}^{n} z^k\right] + \frac{3}{2}\right\}$$
$$= C_F\left\{-\sum_{k=0}^{n-2}\frac{1}{k+1} - \sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k+1} + \frac{3}{2}\right\}$$
$$= C_F\left\{-\sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{k} - \sum_{k=1}^{n+1}\frac{1}{k} + \frac{3}{2}\right\}$$
$$= C_F\left\{\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} - 2\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k} + \frac{3}{2}\right\}$$
$$= C_F\left[\frac{3}{2} + \frac{1}{n(n+1)} - 2\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}\right\}$$

(789)
$$\left\{\begin{aligned} P_{q/q}^{1(0)} &= C_F\left[\frac{3}{2} + \frac{1}{2} - 2\cdot 1\right] = 0 \\ P_{q/q}^{2(0)} &= C_F\left[\frac{3}{2} + \frac{1}{2\cdot 3} - 2\left(1+\frac{1}{2}\right)\right] = -\frac{4}{3}C_F \end{aligned}\right.$$

2005. 9. 30

ここで $P^{1(0)}_{q/q}=0$ は クォーク数の保存 (776) ですが 実際、(787) で

(790) $q_V^1(Q^2)=q_V^1(Q_0^2)$ $\quad : \int_0^1 dx\, q_V(x,Q^2)=\int_0^1 dx\, q_V(x,Q_0^2)$

(クォーク)−(反クォーク) の全エネルギーは保存しません、(787) で $n=2$ とおくと

(791) $$q_V^2(Q^2)=q_V^2(Q_0^2)\left(\frac{a(Q^2)}{a(Q_0^2)}\right)^{-\frac{1}{2b_0}P^{2(0)}_{q/q}}+\cdots$$

$$=q_V^2(Q_0^2)\left(\frac{1}{b_0\ln(Q^2/\Lambda^2)}\Big/\frac{1}{b_0\ln(Q_0^2/\Lambda^2)}\right)^{-\frac{1}{2b_0}(-\frac{4}{3}C_F)}+\cdots$$

$$=q_V^2(Q_0^2)\left(\frac{\ln(Q_0^2/\Lambda^2)}{\ln(Q^2/\Lambda^2)}\right)^{\frac{2}{3b_0}C_F}+\cdots$$

ここで running coupling の leading の表式 ((705)の第一項) を使いました。

$b_0=\frac{33-2n_f}{12}=\frac{23}{12}$ $(n_f=5)$ と $C_F=\frac{4}{3}$ を代入すると

(792) $$\int_0^1 dx\, x\,q_V(x,Q^2)=\int_0^1 dx\, x\,q_V(x,Q_0^2)\cdot\left(\frac{\ln(Q_0^2/\Lambda^2)}{\ln(Q^2/\Lambda^2)}\right)^{\frac{32}{69}}$$

となり、例えば $u_V(x,Q^2)=u(x,Q^2)-\bar{u}(x,Q^2)$ の全エネルギーは Q^2と共に減少し、$Q^2\to\infty$ ではゼロになることが分かります。又、

(793) $$\frac{\ln(Q_0^2/\Lambda^2)}{\ln(Q^2/\Lambda^2)}=\frac{\ln(Q_0^2/\Lambda^2)}{\ln(Q_0^2/\Lambda^2)+\ln(Q^2/Q_0^2)}$$

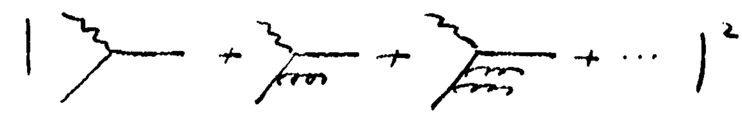
$$=\left(1+\frac{\ln(Q^2/Q_0^2)}{\ln(Q_0^2/\Lambda^2)}\right)^{-1}$$

$$=\left(1+b_0\frac{\alpha_s}{\pi}(Q_0^2)\ln\frac{Q^2}{Q_0^2}\right)^{-1}$$

$$=1+\sum_{k=1}^{\infty}\left(-b_0\frac{\alpha_s(Q_0^2)}{\pi}\ln\frac{Q^2}{Q_0^2}\right)^k$$

から、GL-AP方程式の解が $\left(\frac{\alpha_s(\mu)}{\pi}\ln\frac{Q^2}{\mu^2}\right)^k$ の項全ての足し上げになっていることが再確認できます。又、ここで、$P^{n(0)}_{q/q}$ がツイスト2, スピン n の $\bar{q}\cdots q$ オペレータの異常次元になっていることを直感的に見てみましょう。

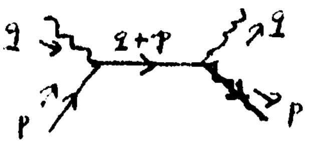
GL-AP方程式は $q\to qg$ 分岐の効果を足し上げたもの

(794) 

ですが、これを $\gamma^* q\to\gamma^* q$ の前方散乱振幅の虚数部（ユニタリティー）ととらえて、前方散乱に寄与するオペレータ

(795)
$$J^\mu_{EM}(x)\,J^\nu_{EM}(0) = \bar\psi(x)\gamma^\mu\psi(x)\,\bar\psi(0)\gamma_\mu\psi(0) = \sum_{k=0}^{\infty}C^k(x\cdot\partial)^k\,O^{(k)}(0)$$

の $x\to 0$（短距離）極限を考えます。運動量空間の摂動の第0次は、

(796) 

$$\sim \bar u(p)\gamma^\nu\frac{\not q+\not p}{(q+p)^2}\gamma^\mu u(p)$$
$$\sim \bar u(p)\gamma^\nu\frac{\not q}{Q^2-2q\cdot p}\gamma^\mu u(p)$$
$$\sim \bar u(p)\gamma^\mu\frac{\not q}{Q^2}\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{2q\cdot p}{Q^2}\right)^k\gamma^\mu u(p)$$

ですが、全ての k $(=0,\cdots,\infty)$ の項がパートン模型の極限で寄与します。

$k=n-1$ の項に寄与するオペレータは、p^μ が $n-1$ 個あるので微分を $n-1$ 個持ち、且つ γ^μ が最低一つ必要（そうでないとカイラリティー保存が破れて m_q が現れる）なので $\bar\psi(0)\gamma^{\mu_1}\partial^{\mu_2}\cdots\partial^{\mu_n}\psi(0)$ の様なスピン n, 次元 $(n-1)+3=n+2$

のオペレータです。パートン模型の極限に寄与するオペレータは全てツイスト

(797) $t = (次元) - (スピン) = 2$

を持つので、ツイスト2オペレータと呼びます。ツイスト3だと(m/Q)、

一般に$(m/Q)^{t-2}$で高ツイストオペレータの寄与は小さくなります。

ツイスト2，スピンnのオペレータ$O^{(n)}(0)$の異常次元【オペレータのくり込み定数の対数のスケール依存性：$\gamma^n = \frac{d}{d\ln\mu}\ln Z^{(n)}$；$O^{(n)}_B(0) = Z^{(n)} O_R(0)$】を計算すると，

(798) $\gamma^n = P^{n(0)}_{q/q} = \int_0^1 dz\, z^{n-1} P^{(0)}_{q/q}(z)$

が得られます。γ^nの計算はオペレータの規格化定数ZのUV発散から得られますから，

(799) 

$\otimes = O^{(n)}(0) = \bar{\psi}(0)\gamma^{\mu_1}\partial^{\mu_2}\cdots\partial^{\mu_n}\psi(0) - \text{trace}$

の計算になります。QCDに於けるハドロンの構造関数のスケール依存性は、この様にして、パートンモデルに依らずに導れました。

DISでは、オペレータ展開((795)の右辺)による短距離部分(係数関数C^k)と長距離部分($\langle p|O^{(k)}(0)|p\rangle$)の分離が、摂動QCDの因子化(697)に対応していました。オペレータのくり込み点依存性を表わすくり込み群方程式が、パートン分布の因子化スケール依存性を表わすGL-AP

方程式に対応していたわけです。オペレータ展開はDIS構造関数にしか役にたたない歴史的遺産ですが［場の理論の基礎としては、理論の短距離極限の振る舞いを調べるツールとして重要です］、摂動QCDの振幅・断面積の因子化(697)は、はるかに広い適用範囲を持ち、GL-AP方程式［一般形は(699)］はその全ての適用において最重要な役割りを果たします。従って、GL-AP方程式の導出過程(p.246～p.267)とその基本的性質(p.267～)を理解することが、摂動QCDの高エネルギーコライダー実験への適用法をマスターすることの鍵であることを認識してください。

念のため、全ての異常次元をリストしておきましょう。簡単な計算ですのでcheckしてください。

$$
\left\{
\begin{aligned}
&P_{q/q}(n) = C_F\left[-\frac{1}{2}+\frac{1}{n(n+1)}-2\sum_{k=2}^{n}\frac{1}{k}\right] && (800a)\\
&P_{g/q}(n) = C_F\left[\frac{2+n+n^2}{n(n+1)(n-1)}\right] && (800b)\\
&P_{q/g}(n) = T_F\left[\frac{2+n+n^2}{n(n+1)(n+2)}\right] && (800c)\\
&P_{g/g}(n) = 2C_A\left[-\frac{1}{12}+\frac{1}{n(n-1)}+\frac{1}{(n+1)(n+2)}-\sum_{k=2}^{n}\frac{1}{k}\right]-\frac{2}{3}n_f T_F && (800d)
\end{aligned}
\right.
$$

(788)と(800a)の見かけが異るのは、kの和をk=2からに変更したためです。

又、モーメントの次数（オペレータのスピン）nを（ ）の中に入れて中味と区別しました。

$n=1, 2, \infty$ のモーメントは覚えておくと良いです。

(801)
$$P_{q/q}(1)=0 \qquad P_{q/q}(2)=C_F\cdot\left(-\frac{4}{3}\right) \qquad P_{q/q}(n)\xrightarrow{n\to\infty} C_F(-2\ln n)$$
$$P_{g/q}(1)=C_F\cdot\frac{2}{n-1} \qquad P_{g/q}(2)=C_F\cdot\left(\frac{4}{3}\right) \qquad P_{g/q}(n)\to 0$$
$$P_{q/g}(1)=T_F\cdot\frac{2}{3} \qquad P_{q/g}(2)=T_F\cdot\frac{1}{3} \qquad P_{q/g}(n)\to 0$$
$$P_{g/g}(1)=C_A\cdot\frac{2}{n-1} \qquad P_{g/g}(2)=T_F\cdot\left(-\frac{2}{3}n_f\right) \qquad P_{g/g}(n)\to C_A(-2\ln n)$$

$n=1$ の pole は g の multiplicity が発散することを表わしています。高次効果を入れた $P_{g/q}(n)$ の $n\to 1$ の振るまいが、q-jet や g-jet の 'multiplicity'（適当に定義された 'jet' の数、ハドロンの数）のエネルギー依存性を定めます。このmultiplicity のスケール依存性がどの程度「正しく」再現されるかどうかが、シャワーMCプログラムを例えば Z や Tevatron のスケールで tune したときに、その LHC への extrapolation がうまく行くかどうかの鍵になります。ジェットの数 $\langle n_J\rangle$ や数分布（$n_J-\langle n_J\rangle$ の分散など）のスケール依存性は、ジェットの定義が適当なものであれば、QCD の予言に従うはずです。LHC への外挿を考えるとき、これらの振舞いが決定的に重要だ、ということを肝に銘じておいてください。

$n=2$ の結果は、エネルギー和則

(802)
$$\frac{d}{d\ln Q^2}\int_0^1 dx\, x\left[q_S(x,Q^2)+g(x,Q^2)\right]=\frac{\alpha_s}{2\pi}\left\{\underbrace{\left[P_{q/q}(2)+P_{g/q}(2)\right]}_{=0}q_S^{(2)}+\left[\overbrace{P_{q/g}(2)}^{2n_f}+P_{g/g}(2)\right]g^{(2)}\right\}$$

を導きます。又、$q_s^{(2)}$ と $g^{(2)}$ についての GL-AP 方程式

(803) $$\frac{d}{d\ln Q^2}\begin{pmatrix} q_s^{(2)}(Q^2) \\ g^{(2)}(Q^2) \end{pmatrix} = \frac{\alpha_s}{2\pi}\begin{pmatrix} P_{q/q}(2) & \overbrace{P_{q/g}(2)}^{2n_f} \\ P_{g/q}(2) & P_{g/g}(2) \end{pmatrix}\begin{pmatrix} q_s^{(2)}(Q^2) \\ g^{(2)}(Q^2) \end{pmatrix}$$

$$= \frac{\alpha_s}{2\pi}\begin{pmatrix} -\frac{4}{3}C_F & \frac{2}{3}n_f T_R \\ \frac{4}{3}C_F & -\frac{2}{3}n_f T_R \end{pmatrix}\begin{pmatrix} q_s^{(2)}(Q^2) \\ g^{(2)}(Q^2) \end{pmatrix}$$

となり、2×2の行列は固有値 0（固有関数 $q_s^{(2)}+g^{(2)}$；(802)）と、

(804) $$\frac{d}{d\ln Q^2}\left[q_s^{(2)}(Q^2)-\frac{n_f T_R}{2C_F}g^{(2)}(Q^2)\right] = \frac{\alpha_s}{2\pi}\left[-\frac{4}{3}C_F-\frac{2}{3}n_f T_R\right]\left[q_s^{(2)}-\frac{n_f T_R}{2C_F}g^{(2)}\right]$$

とに対角化されます。(804)は(787)同様に簡単に解けて

(805) $$q_s^{(2)}(Q^2)-\frac{n_f T_R}{2C_F}g^{(2)}(Q^2) = \left[q_s^{(2)}(Q_0^2)-\frac{n_f T_R}{2C_F}g^{(2)}(Q_0^2)\right]\left[\frac{a(Q^2)}{a(Q_0^2)}\right]^{\frac{1}{2b_0}\left(\frac{4}{3}C_F+\frac{2}{3}n_f T_R\right)}$$

$$\xrightarrow[Q^2\to\infty]{} 0$$

を得ます。(805)式は $Q^2\to\infty$ 極限では、クォークとグルオンのエネルギー比は初期状件によらずに定まり、和が1で不変であることを考慮すると

(806) $$q_s^{(2)}(Q^2) : g^{(2)}(Q^2) \xrightarrow{Q^2\to\infty} \frac{n_f T_R}{2C_F+n_f T_R} : \frac{2C_F}{2C_F+n_f T_R}$$

$$= \frac{3n_f}{16+3n_f} : \frac{16}{16+3n_f}$$

$$= \begin{cases} \frac{3}{7} : \frac{4}{7} & (n_f=4) \\ \frac{15}{31} : \frac{16}{31} & (n_f=5) \end{cases}$$

となることがわかります。グルオンのエネルギー比は約50%程度まで大きくなるわけです。

2005. 9. 30

(801)式の $n\to\infty$ の振る舞い，$P_{q/q}(n)\to -2\ln n\, C_F$，$P_{g/g}(n)\to -2\ln n\, C_A$ は，$x\to 1$ 極限（exclusive極限）の振る舞いに大きな係数 $\ln n$ が表われることを意味します。展開パラメータが $\frac{\alpha_s}{\pi}\ln\frac{Q^2}{Q_0^2}\ln n \sim \frac{\alpha_s}{\pi}\ln\frac{Q^2}{Q_0^2}\ln\frac{1}{1-x}$ となることを意味しており，double-log項の足し上げをしないと，摂動展開がこわれてしまいます。double-log項はexponentialに足し上がることが知られており(QED)，足し上げたものをSudakov形状因子と呼びます。このSudakov因子を用いることにより，GL-AP方程式をMC法によって数値的に解くことが可能となり，高エネルギー過程の解析の必須のツール，シャワーMCが作られます。シャワーMCによる多ジェット(パートン)生成断面積は，GL-AP方程式の導出から明らかなように，多ジェット生成のQCD振幅の近似になっています。このことに着目し，QCD振幅の持つ(普遍的な)コヒーレンスの効果を取り入れて分岐関数を改良したものが，現在のシャワーMCの基礎となっています。この改良はジェットの数分布($n\to 1$)とexclusive極限($n\to\infty$)を共に改良します。過程に依存した高次補正は，この改良されたMC断面積と，摂動QCDのNLO計算とのずれを「数値的に」補正することによって得られます。

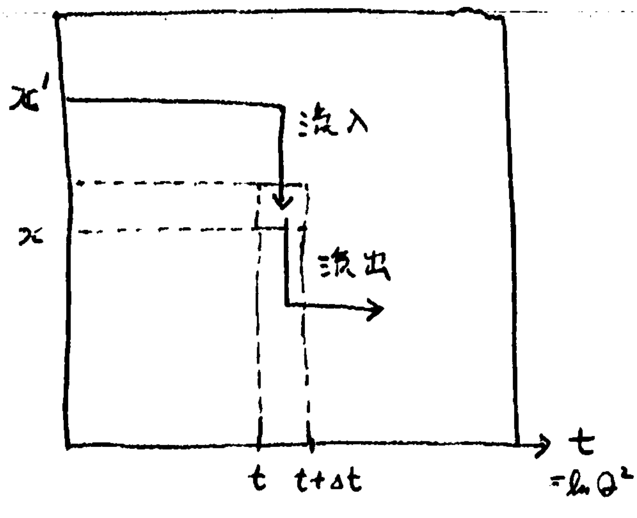
2005. 9. 30

原理はこの様に簡単なのですが、実際に役に立つツールにまでもって行くのには、多くの理論家の努力の積み重ねが必要であったようです。最近10年間の進展が、LHC準備の鍵となること、その進展がどうして必要なのか、最も役に立ちそうなツールは何か、今後数年(1~2年)の発展の方向はどうか、といった問題について、やっと、全体像がつかめて来たところです。これらの課題について、私が理解できたところまでを、次回の講義で説明しようと思います。

今日は、GL-AP方程式のMC法による解と、分岐関数の改良(angular ordering)までを解説します。

まず、GL-AP方程式を、bareな分岐関数だけ($\hat{P}_{a/b}(z)$)を使って表わすことから出発します。クォークとグルオンのそれぞれについて、分岐による分布の変化は、$x'>x$ のクォーク、グルオン分布からの流入分と、$x'<x$ への流出分との差であることに着目して、

(807) $\delta q(x,Q^2)^{in}$ ：流入分



$$= \frac{dQ^2}{Q^2}\int_x^1 dx' \int_0^1 dz\, \frac{\alpha_s}{2\pi}\left[\hat P_{q/q}(z)\, q(x,Q^2) + \hat P_{q/g}(z)\, g(x,Q^2)\right] \times \delta(x - zx')$$

$$= \frac{dQ^2}{Q^2}\int_0^1 \frac{dz}{z}\, \frac{\alpha_s}{2\pi}\left[\hat P_{q/q}(z)\, q\left(\frac{x}{z},Q^2\right) + \hat P_{q/g}(z)\, g\left(\frac{x}{z},Q^2\right)\right]$$

流出分は、$q\to q$ と $q\to g$ の和で、

(808) $$\delta q(x,Q^2)^{out} = \frac{dQ^2}{Q^2}\, q(x,Q^2)\int_0^x dx' \int_0^1 dz\, \frac{\alpha_s}{2\pi}\left[\hat P_{q/q}(z) + \hat P_{g/q}(z)\right]\delta(x'-zx)$$

$$= \frac{dQ^2}{Q^2}\, q(x,Q^2)\int_0^1 \frac{dz}{z}\, \frac{\alpha_s}{2\pi}\left[\hat P_{q/q}(z) + \hat P_{g/q}(z)\right]$$

$q(x,Q^2)$ の変化は

(809) $$\delta q(x,Q^2) = \delta q(x,Q^2)^{in} - \delta q(x,Q^2)^{out}$$

$$= \frac{dQ^2}{Q^2}\int_x^1 \frac{dz}{z}\, \frac{\alpha_s}{2\pi}\left[\hat P_{q/q}(z)\, q\left(\frac{x}{z},Q^2\right) + \hat P_{q/g}(z)\, g\left(\frac{x}{z},Q^2\right)\right]$$

$$- \frac{dQ^2}{Q^2}\, q(x,Q^2)\int_0^1 \frac{dz}{z}\, \frac{\alpha_s}{2\pi}\left[\hat P_{q/q}(z) + \hat P_{g/q}(z)\right]$$

全く同様に $\bar q(x,Q^2)$ についての式と、

(810) $$\delta g(x,Q^2) = \frac{dQ^2}{Q^2}\int_x^1 \frac{dz}{z}\, \frac{\alpha_s}{2\pi}\left[\hat P_{g/q}(z)\overbrace{\left(q\left(\frac{x}{z},Q^2\right)}^{+\bar q\left(\frac{x}{z},Q^2\right)\Big)} + \hat P_{g/g}(z)\, \overbrace{g\left(\frac{x}{z},Q^2\right)}^{\times 2}\right]$$

$$- \frac{dQ^2}{Q^2}\, g(x,Q^2)\int_0^1 \frac{dz}{z}\, \frac{\alpha_s}{2\pi}\left[\hat P_{g/g}(z) + \cancel{2}\, n_f\, \hat P_{q/g}(z)\right]$$

が得られる。ここで、bare な分岐関数 $\hat P_{a/b}(z)$ の積分は $\epsilon < z < 1-\epsilon$

の様に正則化しておく。$\epsilon \to 0$の極限で、(809)-(810)は、GL-AP方程式に帰着すること、特に、規格化(775)が得られることを確認してください。流入、流出による定式化は、クォーク数の保存、分岐によるエネルギーの保存を満たしているので、正則化によらず、$\epsilon \to 0$極限でGL-AP方程式を再現するのです。

次に Sudakov 因子、

(811a) $$\Delta_q(Q^2) = \exp\left\{ -\int_{Q_0^2}^{Q^2} \frac{dQ'^2}{Q'^2} \int_\epsilon^{1-\epsilon} \frac{dz}{z} \frac{\alpha_s(Q'^2)}{2\pi} \left[\hat{P}_{q/q}(z) + \hat{P}_{g/q}(z) \right] \right\}$$

(811b) $$\Delta_g(Q^2) = \exp\left\{ -\int_{Q_0^2}^{Q^2} \frac{dQ'^2}{Q'^2} \int_\epsilon^{1-\epsilon} \frac{dz}{z} \frac{\alpha_s(Q'^2)}{2\pi} \left[\hat{P}_{g/g}(z) + n_f \hat{P}_{q/g}(z) \right] \right\}$$

を定義すると、GL-AP方程式(809)-(810)が

(812a) $$\frac{d}{d\ln Q^2} q(x,Q^2) = \int_x^1 \frac{dz}{z} \left[\hat{P}_{q/q}(z) q\left(\frac{x}{z},Q^2\right) + \hat{P}_{q/g}(z) g\left(\frac{x}{z},Q^2\right) \right] \frac{\alpha_s}{2\pi} + q(x,Q^2) \frac{d}{d\ln Q^2} \ln \Delta_q(Q^2)$$

(812b) $$\frac{d}{d\ln Q^2} g(x,Q^2) = \int_x^1 \frac{dz}{z} \frac{\alpha_s}{2\pi} \left[\hat{P}_{g/q}(z) \left(q\left(\frac{x}{z},Q^2\right) + \bar{q}\left(\frac{x}{z},Q^2\right) \right) + \hat{P}_{g/g}(z) g\left(\frac{x}{z},Q^2\right) \times 2 \right] + g(x,Q^2) \frac{d}{d\ln Q^2} \ln \Delta_g(Q^2)$$

となることを確認し、再に、

(813a) $$\frac{d}{d\ln Q^2}\left(\frac{q(x,Q^2)}{\Delta_q(Q^2)}\right)=\frac{1}{\Delta_q(Q^2)}\int_x^{1-\epsilon}\frac{dz}{z}\frac{\alpha_s}{2\pi}\Big[\hat{P}_{q/q}(z)\,q\left(\frac{x}{z},Q^2\right)+\hat{P}_{q/g}(z)\,g\left(\frac{x}{z},Q^2\right)\Big]$$

(813b) $$\frac{d}{d\ln Q^2}\left(\frac{g(x,Q^2)}{\Delta_g(Q^2)}\right)=\frac{1}{\Delta_g(Q^2)}\int_x^{1-\epsilon}\frac{dz}{z}\frac{\alpha_s}{2\pi}\Big[\hat{P}_{g/q}(z)\left[q\left(\frac{x}{z},Q^2\right)+\bar{q}\left(\frac{x}{z},Q^2\right)\right]+2\hat{P}_{g/g}(z)\,g\left(\frac{x}{z},Q^2\right)\Big]$$

が得られます。上の表式は、あらかじめ $z=0,1$ の特異性を正則化してスダコフ因子 $\Delta_q(Q^2)$, $\Delta_g(Q^2)$ を計算しておけば、同じ正則化を用いたbareな分岐関数 $\hat{P}_{a/b}(z)$ を用いて、$\ln Q^2$ 依存性を計算できることを意味します。更に、積分形にすると、

(814a) $$q(x,Q^2)=\Delta_q(Q^2)\,q(x,Q_0^2)+\int_{Q_0^2}^{Q^2}\frac{dQ'^2}{Q'^2}\frac{\Delta_q(Q^2)}{\Delta_q(Q'^2)}\int_x^{1-\epsilon}\frac{dz}{z}\frac{\alpha_s}{2\pi}\Big[\hat{P}_{q/q}(z)\,q\left(\frac{x}{z},Q'^2\right)+\hat{P}_{q/g}(z)\,g\left(\frac{x}{z},Q'^2\right)\Big]$$

(814b) $$g(x,Q^2)=\Delta_g(Q^2)\,g(x,Q_0^2)+\int_{Q_0^2}^{Q^2}\frac{dQ'^2}{Q'^2}\frac{\Delta_g(Q^2)}{\Delta_g(Q'^2)}\int_x^{1-\epsilon}\frac{dz}{z}\frac{\alpha_s}{2\pi}\Big[\hat{P}_{g/q}(z)\left(q\left(\frac{x}{z},Q'^2\right)+\bar{q}\left(\frac{x}{z},Q'^2\right)\right)+2\hat{P}_{g/g}(z)\,g\left(\frac{x}{z},Q'^2\right)\Big]$$

MC法によって解くことができます。(840a), (840b) をじっとながめて、パートンシャワーができるのが分かりますか？ //

QCD for Collider Physics XII

2005. 10. 14

LHC実験から新しい物理を探り出すために必要な、QCDの基礎知識を実験の方々と共に学びたいと思って始めた今回の講義シリーズですが、一応、今日で区切りをつけ、少しお休みをいただきたいと思います。当初は、現在世界中のいくつものグループが精力的に取り組んでいる、LHCのためのイベントジェネレータの中身について ある程度解説がしたいと思っていたのですが、90年代からの過去15年位の期間にわたって多くの研究者が積みあげて来た蓄積が思いの他大きくて、やっと、2〜3年前までにどのような仕事がなされ、今、どのような発展が期待されるか、そして、これから、どのように解析の準備を進め、専門の研究者の方々（小平さん、栗原さん、川村さん、そしてWebberさん、Frixioneさん、Kraussさん 等々）から何を学べば良いのかが、おぼろげに分かってきたところです。おぼろげですけれど、それを今日、話させていただきたいと思います。

LHCの物理のシミュレータに要求されること:

① $(V, VV, VVV, t\bar{t}, t\bar{b}, H, HV, t\bar{t}H, b\bar{b}H, Hj, Hjj, jj) + nj$
$n = 0, 1, 2, 3, 4$
等のイベントを生成できること。

ここで $V = W, Z, \gamma$,　j は high p_T jet (b, q, g)

SM過程さえできれば、new physics は通常簡単です。

② j の「太さ」と $p_{T_{min}}$ とを決めたときに、$n = 0, 1, 2, 3, 4, \cdots$
のイベントの生成比が概ね正しいこと。

③ $n = 0, 1, 2, 3, 4, \cdots$ を全て足し上げたときの $(\ldots) + X$ の
断面積の大きさが概ね正しいこと。

④ ③で $(\ldots)$ の系の p_T 分布が概ね正しいこと。
さらに、$n = 0$ と 1 の場合の $(\ldots)$ 系の p_T 分布も概ね正しいこと。

⑤ シグナルが $(\ldots) + mj$　(m は最小の j 数) の場合、SMバックグランド
$(\ldots) + nj$ の分布が $n = 0, 1, 2, \cdots, m+1$ まで概ね正しいこと。

⑥ 個々の j のプロファイル (ハドロンの運動量分布、数の分布等)
が現実のハドロンジェットと大きく異なることがなく、「良い」クラスター法
を用いれば、実際のジェットとの一致が期待できること。

上の条件を全てみたすシミュレータを準備できれば、あとは、その使
用法に精通し、実際の観測と比較しながら tune していけば良いと思います。

一方、①〜⑥のどれが欠けても、解析（実際のLHCイベントを利用したシミュレータの改良）は大変困難になると思います。欠ける可能性が大きな部分については、あらかじめ、LHCのデータを使って補う戦術を組み立てておく必要があります。順番に検討していきましょう。

①については全く問題がありません。断面積計算プログラムがいくつもあって、相互チェックが何重にもできるでしょう。使いやすくて早いプログラムをいくつかマスターしておけばOKです。⑤に関連する、(ll) + n j イベントのイベントシェイプ等が、パートン分布、因子化スケール、ジェットの定義（「太さ」、$P_{T\,min}$ 等）、くり込みスケール（α_s^n だったら、n個のくり込みスケールがとれます。$\alpha_s^n \to \alpha_s(Q_1^2)\alpha_s(Q_2^2)\cdots\alpha_s(Q_n^2)$）、等でどう変化するか、等の事前解析は絶対に必要で、そのためには早くて使いやすいプログラムが有利です。

②は決定的に重要ですが、大変難しい問題です。①で使ったパートン断面積計算プログラムを使うと、n=0のときの断面積をσ^0として、n jet は $\sigma^0 \times \alpha_s^n$ の様になりそうですが、そうはなりません。

実際に計算すると，$\sigma((\ldots)+nj)$ は jet の定義に強く依存し，例えば $n=1$ のときは $\frac{\alpha_s}{\pi}\ln\frac{s}{p_{T\,min}^2}$ の様な振るまい，$n=2$ 以上では $\left(\ln\frac{s}{p_{T\,min}^2}\right)^n$ に加えて jet の「太さ」を R とすると $\ln\frac{1}{R}$ の様な因子がかかり，$n=0,1,2,$ と足していくと，どんどん大きな断面積になるという，おかしなことが起こります。これは，tree level の断面積計算プログラムが，ループ補正（虚輻射）を計算しないからです。例として，$e^+e^-\to\gamma^*\to(q\bar{q})+nj$ を考えると良いでしょう。実グルオン輻射だけを $n=1,2,3$ と計算すると，断面積はどんどん増えてしまうけれど（正則化しておかないと全て ∞），虚輻射補正（virtual correction）を加えると，有限となり，$\sigma_{tot}=\sigma_0+\sigma_1+\sigma_2+\cdots=\sigma_{tot}^{(0)}(1+\frac{\alpha_s}{\pi}+\cdots)$ となるのでした。このとき，単純な摂動論では

$$(815)\quad \begin{aligned}
\sigma_0 &= \sigma_{tot}^{(0)}\left(1+\frac{\alpha_s}{\pi}A_1+\left(\frac{\alpha_s}{\pi}\right)^2A_2+\left(\frac{\alpha_s}{\pi}\right)^3A_3+\cdots\right)\\
d\sigma_1 &= \sigma_{tot}^{(0)}\left(\frac{\alpha_s}{\pi}B_1(x_1)+\left(\frac{\alpha_s}{\pi}\right)^2B_2(x_1)+\left(\frac{\alpha_s}{\pi}\right)^3B_3(x_1)+\cdots\right)\\
d\sigma_2 &= \sigma_{tot}^{0}\left(\left(\frac{\alpha_s}{\pi}\right)^2C_2(x_1,x_2)+\left(\frac{\alpha_s}{\pi}\right)^3C_3(x_1,x_2)+\cdots\right)\\
d\sigma_3 &= \sigma_{tot}^{0}\left(\left(\frac{\alpha_s}{\pi}\right)^3D_3(x_1,x_2,x_3)+\cdots\right)
\end{aligned}$$

の様に表され，A_1, A_2, A_3 は $-\infty$ の virtual 補正，$\int B_1(x_1)dx_1$，$\int C_2(x_1,x_2)dx_1dx_2$ 等は $+\infty$，「正しく」正則化しておくと，虚（ループ）と実（ツリー）の大きな補正は相殺し

(816) $\underset{1\text{-ループ}}{A_1} + \underset{\text{ツリー}}{\int B_1(x_1)dx_1} = a_1$

$\underset{2\text{-ループ}}{A_2} + \underset{1\text{ループ}}{\int B_2(x_1)dx_1} + \underset{\text{ツリー}}{\int C_2(x_1, x_2)dx_1 dx_2} = a_2$

$\underset{3\text{-ループ}}{A_3} + \underset{2\text{ループ}}{\int B_3(x_1)dx_1} + \underset{1\text{ループ}}{\int C_3(x_1, x_2)dx_1 dx_2} + \underset{\text{ツリー}}{\int D_3(x_1, x_2, x_3)dx_1 dx_2 dx_3} = a_3$

で、a_1, a_2, a_3 は有限の数になるわけです。a_1 を NLO、a_2 を NNLO、a_3 を N^3LO の補正項と呼びます。和は有限ですが、$\int d\sigma_1$, $\int d\sigma_2$, 等は全て発散していて、n-jet 断面積は議論できません。jetの「太さ」を導入して、積分を cut off してそれぞれの断面積を有限にしても、$\int d\sigma_n$ は $\left(\frac{\alpha_s}{\pi}\right)^n \ln^n \frac{1}{\text{太さ}}$ の様に振舞い、全断面積の規格(ユニタリティー)

(817) $\sigma_0 + \sigma_1 + \sigma_2 + \cdots = \sigma_{tot} = \sigma_{tot}^{(0)}\left[1 + a_1\frac{\alpha_s}{\pi} + a_2\left(\frac{\alpha_s}{\pi}\right)^2 + a_3\left(\frac{\alpha_s}{\pi}\right)^3 + \cdots\right]$

は再現されません。

さて、ここで p.282 (814) を MC法 (Monte Carlo法) で解いて得られる PS (Parton Shower) は、$n = 0, 1, 2, \cdots, k_{max}$ パートン生成断面積を全て有限に与え、

(818) $\sigma_{(0)} + \sigma_{(1)} + \sigma_{(2)} + \cdots + \sigma_{(k_{max})} \approx \sigma_{tot}^{(0)}$

を得ます。ここで、通常 $k_{max} \sim \frac{Q}{Q_0}$ は大きな数 ($Q_0 = 1\,\mathrm{GeV}$ で $Q = 100\,\mathrm{GeV}$ だったら原理的には $k_{max} \sim 100$ も可能。phase space が急激に減るので

$k > k_{max}/2$ だったら $\sigma_{(k)}/\sigma^{(0)}_{tot} \approx 0$ と思います。実際のPSジェネレータで、Q_0とQを動かして $\sigma_{(k)}/\sigma^{(0)}_{tot} = P_{(k)}$ の分布を調べてみてください。

(819) $$\sum_k P_{(k)} = P_{(0)} + P_{(1)} + P_{(2)} + \cdots + P_{(k_{max})} \approx 1$$

が常に成立し(ユニタリティー=確率の保存)しますが、PSが現実のハドロンジェットの良い近似になっているかどうかは、Q/Q_0の変化(より物理的には、Q_0を固定して、Qを大きくしていったときに)、$P_{(k)}$の分布がどうかわるか、それがQCDの予言(=現実)をどの位忠実に再現するか、が鍵になります。例えば

(820) $$\sum_k k P_{(k)} = \langle k \rangle$$

は生成されるパートンの平均の数ですが、これのQ依存性は、実際のハドロンの multiplicity $\langle n_h \rangle$ のQ依存性に比例しなければなりません。そのための努力については⑥で説明します。

PSは、(818)、(819)を実現するために、k-パートン生成断面積(815) $d\sigma_k$ に重要な簡単化を行い(GL-AP方程式のLL近似)

(821) $$B_1(x_1) \approx \frac{1}{k_{1T}^2}\hat{P}(z_1)\cdot z_1$$

$$C_2(x_1,x_2) \approx \left(\frac{1}{k_{1T}^2}\overset{z_1}{\cancel{\hat{P}}}(z_1)\right)\Theta(k_{1T}^2-k_{2T}^2)\left(\frac{1}{k_{2T}^2}\overset{z_2}{\cancel{\hat{P}}}(z_2)\right)$$

$$D_3(x_1,x_2,x_3) \approx \left(\frac{1}{k_{1T}^2}\overset{z_1}{\cancel{\hat{P}}}(z_1)\right)\Theta(k_{1T}^2-k_{2T}^2)\left(\frac{1}{k_{2T}^2}\overset{z_2}{\cancel{\hat{P}}}(z_2)\right)\Theta(k_{2T}^2-k_{3T}^2)\left(\frac{1}{k_{3T}^2}\overset{z_3}{\cancel{\hat{P}}}(z_3)\right)$$

これが猛烈な近似であることは、phase space dX_1, $dX_1 dX_2$, 等が

(822) $$dX_1 \sim \frac{d^3k_1}{(2\pi)^3 2E_1} \sim \frac{dk_{1\parallel} d^2k_{1T}}{16\pi^3 E_1} \sim \frac{dz_1 \frac{1}{2} dk_{1T}^2 d\phi_1}{16\pi^3 z_1} = \frac{1}{16\pi^2} \cdot dk_{1T}^2 \frac{dz_1}{z_1} \frac{d\phi_1}{2\pi}$$

(ここで $\frac{1}{16\pi^2}$ の因子は、matrix element の方の g_s^2 とまとめて、$\frac{\alpha_s}{4\pi}$ の因子として顕わに(815)に書かれています)の様に、$dX_1 \cdots dX_K$ は $\phi_1, \cdots, \phi_K$ の依存性を持つのに、それらが完全に無視されていること、$|M_K|^2$ が(821)の形に極端に簡略化されていることから分かります。唯一重要なことは、(後で述べる angular ordering と $\alpha_s \to \alpha_s(k_T^2)$ の変更をした上で)、(821)の分布が、全てのパートンがソフト($z_K \ll 1$)で且つコリニア-($k_{iT}^2 \ll Q^2$)の極限で、QCDの予言に従うと期待されることです。摂動QCDの断面積はこの極限で発散するわけですから、物理的なカットオフ(現実の世界では $\frac{1}{\Lambda}$ 程度の大きさを持つハドロンの拡がりがカットオフですが、P-QCDでは $\frac{\alpha_s}{\pi}(Q_0) \ll 1$ を保持しなければならないので $Q_0 = 1 \sim 2$ GeV のカットオフが必要です)付近の振舞いが再現され、従って、パートンの数や、数分布等の本質的なジェットの性質のQ依存性が再現されると期待できるのです。PSの方法では、カットオフ Q_0 を導入することで全ての k-パートン断面積を有限にしますが、(821)の仮定の結果、

(822) $$\frac{\sigma_{(0)}}{\sigma^{(0)}_{tot}} = \Delta(Q,Q_0)$$

$$\frac{\sigma_{(1)}}{\sigma^{(0)}_{tot}} = \Delta(Q,Q_0)\int_{Q_0} B_1(x_1)dx_1\frac{\alpha_s}{\pi}$$

$$\frac{\sigma_{(2)}}{\sigma^{(0)}_{tot}} = \Delta(Q,Q_0)\int_{Q_0} C_2(x_1,x_2)dx_1 dx_2\left(\frac{\alpha_s}{\pi}\right)^2$$

$$= \Delta(Q,Q_0)\frac{1}{2!}\left(\int_{Q_0} B_1(x_1)dx_1\frac{\alpha_s}{\pi}\right)^2$$

$$\frac{\sigma_{(3)}}{\sigma^{(0)}_{tot}} = \Delta(Q,Q_0)\int_{Q_0} D_3(x_1,x_2,x_3)\,dx_1 dx_2 dx_3\left(\frac{\alpha_s}{\pi}\right)^3$$

$$= \Delta(Q,Q_0)\frac{1}{3!}\left(\int_{Q_0} B_1(x_1)dx_1\frac{\alpha_s}{\pi}\right)^3$$

...

ここで、$\Delta(Q,Q_0)$ は $k_T>Q_0$ のパートンを放出しない確率ですが、LOのGL-AP方程式の近似で、ユニタリティーから

(823) $$1 = \frac{\sum_k \sigma_{(k)}}{\sigma^{(0)}_{tot}} = \Delta(Q,Q_0)\left\{1+\int_{Q_0} B_1(x_1)dx_1\frac{\alpha_s}{\pi}+\frac{1}{2!}\left(\int_{Q_0} B(x_1)dx_1\frac{\alpha_s}{\pi}\right)^2+\cdots\right\}$$

$$= \Delta(Q,Q_0)\ \exp\int_{Q_0} B(x_1)dx_1\frac{\alpha_s}{\pi}$$

(824) $$\Delta(Q,Q_0) = \exp\left\{-\int_{Q_0} B(x_1)dx_1\frac{\alpha_s}{\pi}\right\}$$

$$= \exp\left\{-\int_{Q_0^2}^{Q^2}\frac{dk_{1T}^2}{k_{1T}^2}\int_{Q_0^2/Q^2} dz_1\,\hat{P}(z_1)\frac{\alpha_s(k_T^2)}{\pi}\right\}$$

(824)はp.281(811)で導入したSudakov因子です。k_T^2 序列の結果、$\frac{1}{n!}$ の因子が出ることは分かりますね。[(811)式で $\frac{dz}{z}$ は dz の誤りです。(808),(809),(810)で $\int dx'\,\underbrace{\delta(x'-xz)}_{(=1)}$ を誤って $\frac{1}{z}$ と書いてしまったエラーです]

ここで $\Delta(Q,Q_0)$ が $P(k)$ の分布、パートンの数や数分布、平均のエネルギーや k_T、拡がり等、ジェットのプロファイルを規定するので、PSの心臓で

あることが分かります。一方、もともとのLOのGL-AP方程式から、単純に

$\Delta(Q,Q_0)$ を求めると、$\frac{\alpha_s(Q^2)}{\pi}$ を $\frac{\alpha_s(\mu^2)}{\pi}$ で置きかえて

(825) $$\Delta(Q,Q_0)^{LO} = \exp\left\{-\frac{\alpha_s(\mu^2)}{\pi}\ln^2\frac{Q^2}{Q_0^2}\right\}$$

の形となり、$\frac{\alpha_s}{\pi}=a$, $\ln\frac{Q^2}{Q_0^2}=L$ とおいたときに $(aL^2)^k$ の項の

足し上げとなっています。このままだと、この近似が良いのは

(826) $$a\cdot(aL^2)^k \ll 1 \quad , \quad k=1,\cdots,k_{max}$$

のときとなり、

(827) $$aL^2 \lesssim 1$$

です。Lが大きくなるので、これでは全く信頼性がありません。

もっと系統的な足し上げをしなければなりませんが、ソフト・コリニヤー

領域の正則化（パートン、ジェットの定義）として適当なものを用いると、

系統的な足し上げ（exponentiation）が可能です、

(828) $$\Delta(Q,Q_0) = \exp\left\{-L f_1(aL) - f_2(aL) - a f_3(aL) - \cdots\right\} + O(a)$$

ここで $f_i(aL)$ は aL の（通常は）性質の良い関数です。$f_2(aL)$ まで

求まれば（NLLと呼びます）、誤差は

(829) $$a \ll 1$$

のときに小さくなるので、信頼性が格段に増します。いくつかの

ジェットの定義について、解析的な計算が行われていて、

(830) 例えば S. Catani, L. Trentadue, G. Turnock, B.R. Webber, NPB407, 3 (1993)
B. Bonciani, S. Catani, M.L. Mangano, P. Nason, PLB575, 268 (2003)

これらの結果を再現する様に、GL-AP 分岐の計算も改良されました。

その結果、ソフト・コリニアー領域で、次の改良をすれば良いことが分かりました。

(831a) 独立輻射の仮定を $k_{T_1}^2 > k_{T_2}^2 > k_{T_3}^2 > \cdots > k_{T_n}^2$

ではなく、$\theta_1 > \theta_2 > \theta_3 > \cdots > \theta_n$ とする。

(831b) $\alpha_s(Q^2) \to \alpha_s(k_T^2)$ とする。更に $\alpha_s(k_T^2) = \alpha_s(\mu = \frac{k_T}{1.57})_{\overline{MS}}$

上の二つの改良をした分岐関数を用いると、LO の GL-AP 方程式から導かれる PS が、soft-collinear limit で正しいジェットの振る舞い（基本的に $\Delta(\theta,\theta_0)$ の振る舞い）を再現するのです。

(832) S. Catani, B.R. Webber, G. Marchesini, NPB349, 635 (1991) 他。

この改良を加えた PS は $\Delta(\theta,\theta_0)$ の式 (824) で、dk_T^2/k_T^2 を $d\theta/\theta$ に置き換え、且つ、α_s を $\alpha_s(\mu = \frac{k_T}{1.57})_{\overline{MS}}$ と置いております。

$\alpha_s(\mu)$ のスケールが定ったことにより、ジェットのソフト・コリニアー領域のプロファイルが、基本パラメータ $\alpha_s(m_Z)_{\overline{MS}}$ の大きさによって定まることになります。このことを利用して TRISTAN, LEP のジェットの形の解析 (T~1

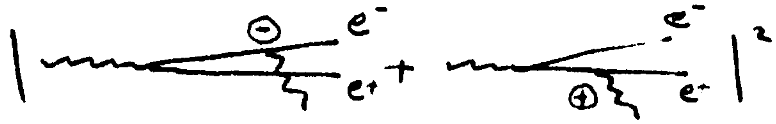
附近での $d\sigma/dT$ など）から $\alpha_s(m_Z)_{\overline{MS}}$ を求める試みがなされましたが、$T \sim 1$ 附近では LEPエネルギーでさえ、非摂動効果が無視できないようで、「大体良さそうだ」という感触です。Tevatron や LHC でのより高エネルギーのジェットの形は、より明瞭に P-QCD の予言と一致するだろうと思います。

角度オーダリングは、QEDの $\gamma \to e^+e^- \to e^+e^-\gamma$ 輻射の場合が一番顕著です。下図で

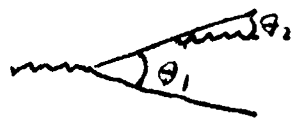
(832) 

$\theta_1 < \theta_2$

とすると、二つの振幅

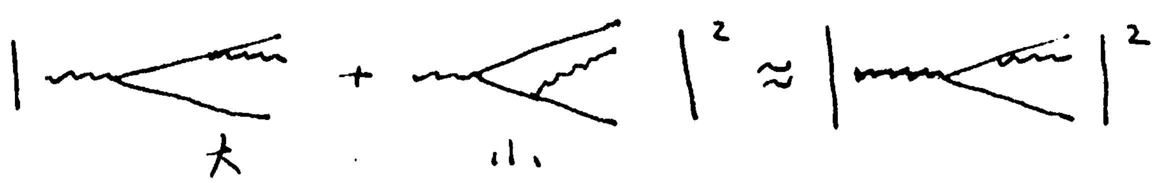
(833) 

が相殺し、振幅は消えてしまいます。一方

(834) 

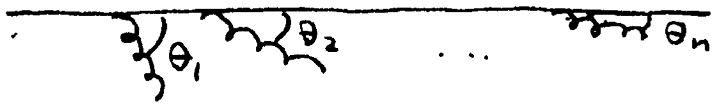
$\theta_1 > \theta_2$

の場合は

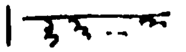
(835) 

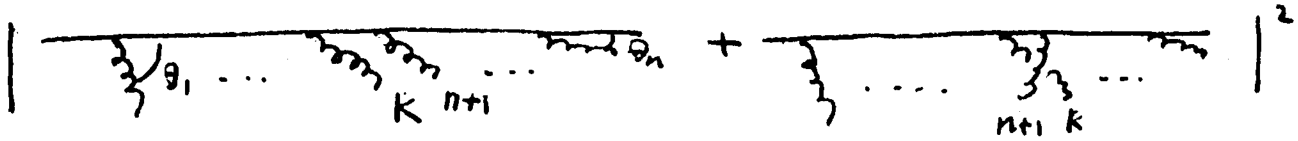
となって強い（$\frac{d\theta}{\theta}$ に比例する）輻射を出すわけです。

$\alpha_s \to \alpha_s(k_T^2)$ は次の様に理解できます。nグルオン放出が

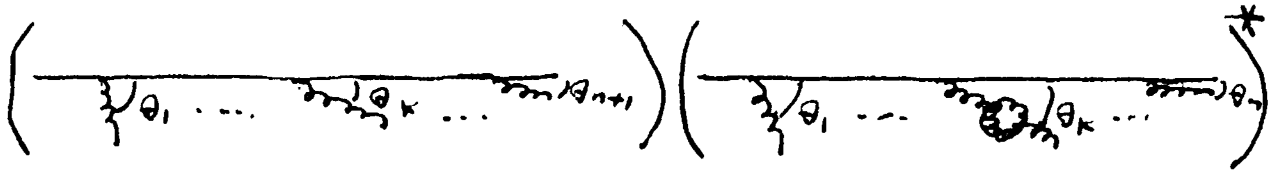
(836) 

$$\ln\theta_1 \gg \ln\theta_2 \gg \cdots \gg \ln\theta_n$$

のときには、他のダイアグラムは干渉しません。nグルオン放出断面積は上の図の  で与えられます。今、$n+1$個めのグルオンが $\theta \sim \theta_k$ に放出されたとします。

(837) 

今度はクロスした diagram が干渉します。一方 $\theta \sim \theta_k$ なので、この２グルオン系は、(836)の k番目のグルオンと重って一つのジェットと見られるかも知れません。α_sのオーダーとしては、

(838) 

(837)と(838)を足し上げると、nグルオン放出振幅(836)の二乗の式で、k番目の放出の結合を、$\dfrac{\alpha_s(\mu^2)}{\pi} + \left(\dfrac{\alpha_s(\mu^2)}{\pi}\right)^2 b_0 \ln\dfrac{k_T^2}{\mu^2} = \dfrac{\alpha_s(k_T^2)}{\pi}$ で置き換えたものになります。同様に、全ての(836)のグルオンと近い角度に表われる剰余グルオンの効果は、$\alpha_s \to \alpha_s(k_T^2)$ で吸収され、オーダリングが保存されて exponentiate するわけです。今の議論で

2005. 10.14

azymuthal angle, $\phi_1, \cdots, \phi_n$ はそろっているかの様に話しましたが(紙が平面ですから…)、全ての様々な$\{\phi_1, \cdots, \phi_n\}$の組みについて同様な議論をすることができるようです。

さて、この様にして作られたPS (Herwig, Pythia etc) は、ソフト・コリニアー領域で、NLO+NLLの近似を持ち、従ってジェットの最も重要な特性(ジェットがジェットらしく見えるときの特性)を再現します。このことがPSに最も要求されることであったので、この部分の改良が90年代初めになされました。これらの改良は、TRISTAN, LEP, LEP2のテストでtuneされているので、Q₀/Q効果の名残りを除いて、LHCでも通用すると思います。

欠点があるとすると、LOの形はそのままにして、soft-collinearの極限でNLL-NLOの結果を再現するようにしたので、hard-collinearな場合には必ずしもNLL-NLOとの一致が良いかどうか分からないことです。(GL-AP方程式がもとなので、hard-non-collinearはいずれにしろだめです。) hard-collinearな部分もNLLの効果を取り入れるのが、加藤・宗久のNLLジェットだと理解しています。歴史的に、

2005. 10.14

NLLジェットPSの開発と、上に述べたsoft-collinear領域の改良とが、同じ時期であったために、私は当時、この違いが全く理解できませんでした。既に述べたように、soft-collinear領域の改良は、PSが現実のジェットをシミュレートするために絶対に必要であったので、その部分の改良をした上で、hard-collinear領域のジェットプロファイルを改良することができたら、それを示すことができたら、NLLジェットは市民権を得られたのだろうと、(今は)思います。実のところ、どの程度の改良が期待できるのか、私には分かっていません。(実際の解析をなさっている栗原さんに教えていただきましょう。)分かっていないので、間違いかも知れませんが、私は今のところ、それ程重要な効果は期待できないのではないかと思っています。NLLで、hard-collinearな分岐が改良されますから、ジェット中のハードなハドロン、ミニジェットの分布が改良されるはずです。一方、collinearな極限では、hadronizationの効果を含めて、LEP等のデータを使って tuneされています。hardで且つnon-collinearな振るまいは、GL-APでは決して記述できないので、exactなmatrix elementを使って改良しなければなりません。その改良は結局は、PSで使われた分岐と、exactなmatrix elementによる分布との

「差」を評価することになります。(MC@NLO等)。どうせ差をとるのなら、通常のPSの簡単なLOの分岐関数との差を計算する方が、より複雑なNLLの分岐関数との差を計算するよりも楽なような気がします。次の2点が知りたいです。NLL分岐を使うと、MC@NLOを実施したときに、補正が小さい、negative weight event が少ない、等の利点があるか? もう一つは、HKKW法で exclusive なジェットを生成する場合、どうしても、一つ一つのジェットは充分 collinear とは言えなくなる。ある程度 non-collinear なジェットをPSで生成しなければならない。その領域で、NLLジェットは通常のPSより再現性が高いか? もし、これらの質問に対する答が肯定的であったなら、復権のチャンスはあると思うし、LHCの解析を有利に進めることができるかも知れません。過去の失敗は、soft-collinear 部分は非摂動的ハドロン化の部分だとして、その方向の改良に取り組まなかったことにあるのだと思います。あくまでも、まず soft-collinear, それがOKで始めて、hard-collinear の改良が光を浴びるのだと思います。

②にもどります。jの「太さ」は k_T-clustering algorithm で決めることになりますが（⑥で詳しく説明します）、(832)の様にユニタリティー(819)を満たす、$n=0,\cdots,k_{max}$ パートンイベントが生成されたら、その全てを出発点として、clustering-algorithm を用いて、①で必用とされる「太い」ジェットの生成断面積を評価します。この過程で

(839)

$$
\begin{array}{lcl}
\text{パートン数} & & \text{ジェットの数} \\
\sigma_{(0)} & \rightarrow & \sigma_0 \\
\sigma_{(1)} & \rightarrow & \sigma_0,\ \sigma_1 \\
\sigma_{(2)} & \rightarrow & \sigma_0,\ \sigma_1,\ \sigma_2 \\
\sigma_{(3)} & \rightarrow & \sigma_0,\ \sigma_1,\ \sigma_2,\ \sigma_3 \\
\vdots & & \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \\
\sigma_{(k_{max})} & \rightarrow & \sigma_0,\ \sigma_1,\ \sigma_2,\ \sigma_3,\cdots,\sigma_n \\
 & & \Downarrow \quad \Downarrow \quad \Downarrow \quad \Downarrow \quad\quad \Downarrow \\
 & & \sigma_0+\sigma_1+\sigma_2+\sigma_3+\cdots+\sigma_n = \sigma_{tot}^{(0)}
\end{array}
$$

の様に cluster 化されます。(839)の過程は、ハドロンを出発点にした cluster 化とあるレベルから一致することが要求されます。この要求を満たすのは、ジェット cluster algorithm が QCD の分岐過程の特性、特に soft-collinear な振る舞いを逆にたどる場合だけです。この点については⑥で再論します。

全断面積は $\sigma_{tot}^{(0)}$ からずれません（ユニタリティー(819)の結果）。

ジェットの数分分の正しさは30%程度でしょうか・・。

③がMC@NLOの出番です。

(840) S. Frixione, B.R. Webber, JHEP 06, 029 (2002)
S. Frixione, P. Nason, B.R. Webber, JHEP 08, 007 (2003)
S. Frixione, B.R. Webber, hep-ph/0506182 [MC@NLO 3.1]

まず、PQCDの予言の大きさ（断面積等の大きさ）はLOでは不定で、NLOではじめて定量的な予言が可能になることを復習しましょう。

①の過程 $pp \to (\cdots) + nj$ のどれかの微分断面積を

(841) $$d\sigma = \sum_{a,b} dx_1 D_{a/p}(x_1, \mu_F)\, dx_2 D_{b/p}(x_2, \mu_F)\, d\hat{\sigma}_{ab\to(\cdots)+\cdots}(sx_1x_2, \mu_F, \mu_R)$$

と因子化した形に書いてみましょう。μ_F は long-distance physics (PDF) の因子化スケール、μ_R は ultra-violet physics の因子化スケール（くり込み点）です。左辺は観測量ですから、μ_F、μ_R に依存しません。一方、long-distance physics を因子化した量(PDF)は μ_F に依存（GL-AP方程式）、ultra-violet physics を因子化した量（α_s）は μ_R に依存（くり込み群方程式）します。Hard-scattering part $d\hat{\sigma}$ は PQCDの摂動展開ができて

(842) $$d\hat{\sigma} = d\hat{\sigma}_{LO}\left\{1 + A_1 a + A_2 a^2 + \cdots\right\}; \quad a = \frac{\alpha_s(\mu_R)}{\pi}_{\overline{MS}}$$

まず、μ_F に関する非依存性が、PQCDでどのように実現されるかを考えます。(841)式で ~~$\mu_F \to \mu_F + \Delta\mu_F$ と…~~ $\mu_F \to k\mu_F$ と変更すると、当然、PDFの値が変わります。GL-AP方程式を摂動的

に解くと　[$\ln(k\mu_F)^2 = \ln\mu_F^2 + \ln k^2$ なので]

(843) $$\begin{cases} D_{a/p}(x_1, k\mu_F) = D_{a/p}(x_1, \mu_F) + \ln k^2 \cdot \frac{\alpha_s}{2\pi} \hat{P} \otimes D(x_1, \mu_F) \\ D_{b/p}(x_2, k\mu_F) = D_{b/p}(x_2, \mu_F) + \ln k^2 \cdot \frac{\alpha_s}{2\pi} \hat{P} \otimes D(x_2, \mu_F) \end{cases}$$

の様に変化します。 $\ln k^2 \cdot \frac{\alpha_s}{2\pi} = \ln k \cdot a$ と書きます。ここの α_s は

$\alpha_s(\mu_F)_{\overline{MS}}$ ですが、 $\frac{\alpha_s(\mu_F)}{\pi}_{\overline{MS}} = \frac{\alpha_s(\mu_R)}{\pi}_{\overline{MS}} + b_0 \ln\frac{\mu_F^2}{\mu_R^2}\left(\frac{\alpha_s(\mu_R)}{\pi}\right)^2 + \cdots$

なので違いは更に higher-order です。(843) は

(844) $$D_{a/p}(x_1, k\mu_F) \cdot D_{b/p}(x_2, k\mu_F) = D_{a/p}(x_1, \mu_F) \cdot D_{b/p}(x_2, \mu_F)$$
$$\times\left[1 + \ln k \cdot a\left\{\frac{1}{D_{a/p}(x_1, \mu_F)} \hat{P} \otimes D(x_1, \mu_F) + \frac{1}{D_{b/p}(x_2, \mu_F)} \hat{P} \otimes D(x_2, \mu_F)\right\}\right].$$

となります。観測量 $d\sigma$ の μ_F 非依存性は、PQCD の摂動展開で (844) 式の $\ln k \cdot a\{\cdots\}$ の項が、$d\hat{\sigma}$ の展開式 (842) の $A_1 a$ の項によって正確に相殺されることを意味します。つまり、NLO の計算をすると、補正項は必ず、

(845) $$A_1 = -\ln k\{\cdots\} + C$$

の形をしているはずです。~~一方、もし、A_1 の計算がなされなかったら、~~

$d\hat{\sigma}$ の摂動展開は、(845) 式の A_1 の値が小さい時にのみ収束が期待できます。C が小さければ k=1 が良いし、C が大きければ k を 1 からずらさなければなりません。一方、もし、A_1 の計算 (NLO) が

なされなかったとする。kをいくつにすれば摂動の第0項(LO)の予言が良いのかが全く分かりません。$d\hat{\sigma}$がちょっとでも複雑な過程であれば、$d\hat{\sigma}$の収束が良くなるkを予想することも困難になります。$\frac{1}{2}<k<2$，$\frac{1}{4}<k<4$、と動かしてみると、LO項だけの予言は大きく動き、$d\hat{\sigma}$の大きさが確定しません。

次にμ_R依存性を見ます。この場合は$d\hat{\sigma}_{LO}$の$\frac{\alpha_s}{\pi}$依存性が重要になります。

(846) $d\hat{\sigma}_{LO} = A_0 a^m \qquad a = \frac{\alpha_s(\mu_R)}{\pi}\overline{MS}$

としましょう。RGEは

(847) $\mu^2 \frac{d}{d\mu^2} a(\mu) = -b_0 a(\mu)^2 - b_1 a(\mu)^3 - \cdots$

ですから，$\mu_R \to \mu_R' = k'\mu_R$とすると、

(848) $a(k'\mu_R) = a(\mu_R) - b_0 \ln k'^2 a(\mu_R)^2 - \cdots$

と変化し、(846)から

(849) $d\hat{\sigma}_{LO}(k\mu_R) = d\hat{\sigma}_{LO}(\mu_R)\{1 - m b_0 \ln k'^2 a(\mu_R) - \cdots\}$

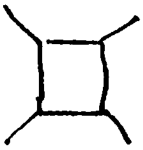
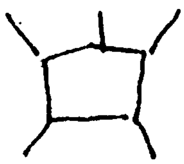
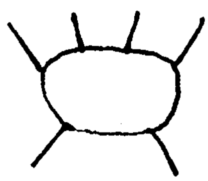
と変化します。$d\sigma$はμ_Rに依存しないので、(842)のA_1は必ず、

(850) $A_1 = m b_0 \ln k'^2 + C'$

の形をしているはずです。A_1の数値的値が小さくなるk'が「良い」スケール

となるわけです。C'が計算(NLO)されていなければ、K'を選ぶことができないので、$d\hat{\sigma}_{LO}$の値は大きな不定性($m=0$の場合は除きます。)を持つわけです。multi-jet生成断面積のmは大きいですから、この不定性は深刻です。

というわけで、①にあげた重要過程の全てについてNLO補正が欲しいです。終状態が3体までの計算はほぼ完成していると思いますが、それ以上になると、現在の計算法ではとても困難です。困難はループ計算にあり、

(851) $2 \to 2$  $2 \to 3$  $2 \to 4$ 

と加速度的に難しくなります。①にあげた$(\cdots)+mj$で$m>1$は事実上不可能と思います。(全く新しい計算法が開発されない限り、ですが。) NLO計算の最も標準的な技術は

(852) S. Catani, M.H. Seymour, NPB485, 291 (1997); E B510, 503 (1997)

です。最近の発展については、栗原さん、Vermaseren さん等に伺うのが良いかと思います。私は(852)は大変良く書けていると思います。

さて NLO 計算の idea を説明します。kinematical 変数を1変数（グルーオンの energy fraction か、$1-\cos\theta$ か と思ってください。）.

LO ではグルオンが放出されないので、微分断面積は

(853) $$\left(\frac{d\sigma}{dx}\right)_{LO} = A_0\,\delta(x)$$

です。real emission は

(854) $$\left(\frac{d\sigma}{dx}\right)_R = a\,\frac{R(x)}{x} \qquad ; \quad a = \frac{\alpha_s(\mu)_{\overline{MS}}}{\pi}\ , \quad R(0) = \text{finite}$$

kinematical 領域 (phase space) は $0 < x < 1$ とします。virtual correction はグルーオンを放出しないので分布は(853)と同じで

(855) $$\left(\frac{d\sigma}{dx}\right)_V = a\left(\frac{c}{\epsilon} + V\right)\delta(x)$$

ここで、IR発散を $D = 4-2\epsilon$ で正則化したと考え、発散項を $1/\epsilon$ で表示しました。$4 \to D$ への解析接続で

(856) $$\begin{cases} d^4k \longrightarrow d^Dk = k^{D-1}\,dk\,d\Omega^{D-1} & \cdots \text{virtual (loop) momenta} \\[2mm] \dfrac{d^3k}{2E} \longrightarrow \dfrac{d^{D-1}k}{2E} = \dfrac{k^{D-2}}{2E}\,dk\,d\Omega^{D-2} & \cdots \text{real emission} \end{cases}$$

ですが、x が momentum fraction のときも $\frac{1-\cos\theta}{2}$ のときも、一方は k^{D-2} から、一方は $d\Omega^{D-2}$ から、phase space は

(857) $dx \to x^{-2\epsilon} dx$

の様に変化します。(855)では結果だけを書いたのですが、real emission の(854)は $D=4-2\epsilon$ では

(858) $$\left(\frac{d\sigma}{dx}\right)_R = a\,\frac{R(x)}{x}\cdot x^{-2\epsilon} = a\,\frac{R(x)}{x^{1+2\epsilon}}$$

となります。UV発散は $D<4$ ($\epsilon>0$) で正則化されますが、IR、collinear発散は共に、$D>4$ ($\epsilon<0$) で正則化されることがわかります。[UVはkが分子にあるときの発散で、IRとcollinearは共に、$\frac{1}{E}$、$\frac{1}{1-\cos\theta}$ の様に~~分母~~の発散ですから、これはあたり前です。] (853), (855), (858) を用いて、NLOの計算をします。

まずは全断面積：

(859) $$\sigma_{LO} = \int_0^1 dx \left(\frac{d\sigma}{dx}\right)_{LO} = A_0$$

(859)′ $$\sigma_V = \int_0^1 dx \left(\frac{d\sigma}{dx}\right)_V = a\left(\frac{c}{\epsilon} + V\right)$$

(859)″ $$\begin{aligned}\sigma_R &= \int_0^1 dx \left(\frac{d\sigma}{dx}\right)_R = a\int_0^1 dx\,\frac{R(x)}{x^{1+2\epsilon}} \\ &= a\int_0^1 dx\left[\frac{R(0)}{x^{1+2\epsilon}} + \frac{R(x)-R(0)}{x^{1+2\epsilon}}\right] \\ &= a\left\{R(0)\left[\frac{x^{-2\epsilon}}{-2\epsilon}\right]_0^1 + \int_0^1 dx\,\frac{R(x)-R(0)}{x} + O(\epsilon)\right\} \\ &= a\left\{-\frac{R(0)}{2\epsilon} + \int_0^1 dx\,\frac{R(x)-R(0)}{x} + O(\epsilon)\right\}\end{aligned}$$

全て足しあげると

(860) $$\sigma_{NLO} = \sigma_{LO} + \sigma_V + \sigma_R$$
$$= A_0 + a\left(\frac{c}{\epsilon} + V\right) + a\left\{ -\frac{R(0)}{2\epsilon} + \int_0^1 dx \frac{R(x)-R(0)}{x} \right\}$$
$$= A_0 + a\left\{ \frac{1}{\epsilon}\left(c - \frac{R(0)}{2}\right) + V + \int_0^1 dx \frac{R(x)-R(0)}{x} \right\}$$
$$= A_0 + a\left\{ V + \int_0^1 dx \frac{R(x)-R(0)}{x} \right\}$$

となります。ここで、IR/collinear発散の相殺は

(861) $$c = \frac{R(0)}{2}$$

で保障されます。

さて、(859)→(860)の計算は、kinematical variables（今はxだけですが）に依存する全てのobservable $O(x)$ に対する予言に適用されます。

$O(x)$に対する唯一の[redacted]条件は

(862) $$O(x) = O(0) + \sum_{n=1}^{\infty} c_n x^n$$

です。つまり、$O(x)$は IR, collinearな極限($x=0$)で唯一つの値を持つ（IR, collinearな splittingで値を変えない）ことです。

IR/collinear safe observablesと呼びます。では$O(x)$に対するPQCDの予言を計算しましょう。

(863) $$\langle O(x) \rangle_{LO} = \int_0^1 dx\, O(x) \left(\frac{d\sigma}{dx}\right)_{LO} = A_0 O(0) \delta(x)$$

$\langle O(x)\rangle$の定義としては $\frac{1}{\sigma}$ で規格化するのが普通ですが、今は「わざと」規格化していません。次元がずれてしまうことには目をつぶって下さいね。(863)が$\langle\ \rangle$の定義です。さて、VとRの補正も足します。

(864) $$\langle O(x)\rangle_V = \int_0^1 dx\, O(x)\left(\frac{d\sigma}{dx}\right)_V = a\left(\frac{c}{\epsilon}+V\right)O(0)$$

(864)' $$\begin{aligned}\langle O(x)\rangle_R &= \int_0^1 dx\, O(x)\left(\frac{d\sigma}{dx}\right)_R \\ &= \int_0^1 dx\, O(x)\,\frac{R(x)}{x^{1+2\epsilon}}\cdot a \\ &= a\int_0^1 dx\left[\frac{O(0)R(0)}{x^{1+2\epsilon}}+\frac{O(x)R(x)-O(0)R(0)}{x^{1+2\epsilon}}\right] \\ &= a\left\{\frac{O(0)R(0)}{-2\epsilon}+\int_0^1 dx\,\frac{O(x)R(x)-O(0)R(0)}{x}+O(\epsilon)\right\}\end{aligned}$$

全ての寄与を足し上げて、(861)を考慮すると、

(865) $$\langle O(x)\rangle_{NLO} = A_0 O(0) + a\left\{V\,O(0)+\int_0^1 dx\,\frac{O(x)R(x)-O(0)R(0)}{x}\right\}$$

となるわけです。(865)を積分形（$\int_0^1 dx=1$を利用して）にして

(866) $$\langle O(x)\rangle_{NLO} = \int_0^1 dx\left\{O(x)\,\frac{aR(x)}{x}+O(0)\left[A_0+aV-\frac{aR(0)}{x}\right]\right\}$$

にしたものがMC@NLOの出発点です。(865)式の表式では最後の積分はmanifestに有限で、通常の$O(x)$の場合計算可能です。($O(x)$の解析的表式があれば常に可能です。) $O(x)=1$なら全断面積(860)ですし、

$O(x)=x$ なら $O(0)=0$ なので

(867) $\langle x \rangle_{NLO} = a\int_0^1 dx\, R(x)$

です。1-T (T=thrust) や jetの太さのように soft or collinear limit で 0になる量は $\langle\ \rangle_{LO}$ の値がゼロなので、$\langle\ \rangle_{NLO}$ の値が最初の有限項を与えます。通常のくりこみ群の議論では、摂動展開の最初のゼロでない項をLOと呼ぶことになっているので、(867)の $\langle\ \rangle_{NLO}$ のそえ字はその使い方とはずれてしまいます。このあたりのことは言葉の使い方、方言みたいなものですから慣れてしまってください。

さて、MC@NLO は $O(x)$ として、PS の event 全体を考えよう、というものです。とてつもなく複雑で、解析的表式もないですが、(865)、(866)で有限の NLO 補正が得られるに違いないことは理解できるでしょう? [PS が QCDの要請に従って soft な emission で変わらない $O(x) \xrightarrow{x_{soft}\to 0} O(0)$ は OK ですが、collinear emission の場合、initial state では PDF が変化し、final state では fragmentation function (jet profile) が変化します。final state は 'jet-cluster → jet' として この問題を回避し、initial state は PDF の変化分を GL-AP 方程式によって相殺します。] 但し、(865)の積分が有限になると言っても、PSの分布一つ毎に (それも'x'→0で全く

同じPSの分布）相殺されるわけですから、MC法では全く相殺されません、PSの生成自体は'x'も引数として生成したいからです。どうしても、$x \neq 0$ のときと、$x=0$ のときが別々になってしまいます。そこでまず(866)のように書き変えますが、第一項と第二項はそれぞれ発散していて $\int_0^1 dx$ 積分をMC法で相殺させることは不可能です。それに、第一項は$+\infty$のPSイベント、第二項は$-\infty$のPSイベントで、その和がNLOのPSイベントですから、何が何やら分かりません。(840)のMC@NLOの工夫は、(866)のそれぞれから、$x \to 0$のsingularityを相殺する解析的関数（$R(x)$のsingular部分の解析的表式はGL-AP方程式のsplitting関数を使って書けます）を引いて足します：

(868)
$$\frac{R(x)}{x} = \frac{Q(x) + R(x) - Q(x)}{x} = \frac{Q(x)}{x} + \frac{R(x)-Q(x)}{x} \quad ; \quad Q(0) = R(0)$$

(869)
$$\langle O(x) \rangle_{NLO} = \int_0^1 dx \left\{ O(x)\,\frac{a(R(x)-Q(x))}{x} + O(0)\left[A_0 + aV + a\,\frac{Q(x)-R(0)}{x}\right] \right\}$$

2005.10.14

(840) で提案された MC@NLO は、Vと R(x) が計算されている全ての過程について、inclusive な分布（通常は ① の過程で (…)+X の分布）は計算された NLO 分布に従い、且つ、+ kmax parton の PS を生成することができます。問題点をあげてみます（私の不勉強のせいかも知れません）

(870) I： (…)+nj が必要な場合、nj は PS から cluster 法で構成します。PS は soft-collinear な parton しか正しくないので、これらの jet の分布、correlation は正しくはでてきません。

II： (868) は subtraction を含むので、どうしても「負の weight」のイベントが生成されます。「(…)+ kmax partons が生成される」と言っても、それらは「正のイベント」から「負のイベント」の効果を差し引いた「分布」でしかあり得ません。イベント generator の役割は果たせないように思うのですが、違いますか？

上の II の ~~[illegible]~~ 疑問は本質的です。「(…)+k parton の分布」が計算できるのは、それはそれで良いことですが、得られた分布に従って event が生成できなければ余り役に立ちません。MC の全ての乱数の組みに対して「負」/「正」の比を覚えさせれば良いのですか？ // これが OK であれば、残る問題は (870)-I であり、これが p.284 の課題 ⑤ です。

p.284の課題④の解は．MC@NLOが代へします．(⋯)系のPT分布は(⋯)+Xのinclusive分布の1つですから，PSのintial radiationによって概ね正しく得られますし，その部分に対するNLO補正も入ります。n=0, n=1といったexclusiveのjetの数を固定した断面積は，(870)~Iの議論から，充分に正しいとは期待できませんが，それでも，(⋯)系のPT分布を，nに応じて調べることは可能です。parton→jetのclusteringが必要なので，面倒な作業にはなります．

さて，p.284の課題⑤に対する解答を，取り合えず③のNLOの精度を要求せずに(しかし，他の要請も全て)満たすのがHKKWです。

(871) S.Catani, F.Krauss, R.Kuhn, B.R.Webber, JHEP 111, 063 (2001)
F. Krauss, JHEP 208, 015 (2002)
F. Krauss, A.Schailicka, S.Schuman, G.Soft, hep-ph/0409106, 0504032 [W/Z+jets]

ここでは．

まず最初に，全てのeventを①のリストで

(872)
(⋯) + 0 jet events
(⋯) + 1 jet 〃
(⋯) + 2 jet 〃
⋮
(⋯) + n jet 〃

に分割します。jetの定義が重要ですが、soft-collinear領域でのQCDの分岐にconsistentな k_T-cluster algorithmを用います。

(873) S. Catani, Y.L. Dokschitzer, M. Olsson, G. Turnock, B.R. Webber, PLB269, 432 (1991)
S. Catani, Y.L. Dokschitzer, B.R. Webber, PLB285, 291 (1992)
★ S. Catani, Y.L. Dokschitzer, M.H. Seymour, B.R. Webber, NPB406, 187 (1993)

★は必読文献です。Clustering algorithmは k_T のハドロンまたはパートン運動量の集合

(874) $\{\vec{p}_i\} \quad i=1,\cdots,k$

から出発して、cluster (jet) をuniqueに定める方法です。まず全ての (i,j) の組（${}_kC_2$ あります）に対して、$\vec{p}_i$ と $\vec{p}_j$ の距離（jet 太さ）y_{ij} ~~(875) y_{ij}~~ を計算し、あらかじめ決めたjetの太さの最大値 y_{cut} と比較：

(875) $\min\{y_{ij}\} < y_{cut}$ なら $\vec{p}_i + \vec{p}_j = \vec{p}_{ij}$ $(E_i + E_j = E_{ij})$

とし、次のステップは、$\vec{p}_{ij}$ と残りの $k-2$ 個の組みについて (875) を繰り返します。(875) を満たす組がなくなったときに、algorithmは終了し、jetとその運動量（clusterされた全ての $\vec{p}_i$ のベクトル和）とエネルギー（全ての $|\vec{p}_i|$ の和）が定まります。y_{ij} として最少限度の条件（得られたjetの性質がP-QCDで解析可能）は

(876) $y_{ij} \to 0$ when $|\vec{p}_i| = 0$ または $|\vec{p}_j| = 0$ または $\vec{p}_i \cdot \vec{p}_j = 0$

つまり「soft・collinear な分岐を区別しない」ことです。P-QCD の soft-collinear な分岐が angular ordering に従うことを説明しましたが、k_T-algorithm はこの QCD の分岐の特性を生かして、得られた jet の性質が P-QCD の意味で「良い」振るまいをするようにとの考えから提案されました。

(877) $$y_{ij} = \min\{E_i^2, E_j^2\}\, 2(1-\cos\theta_{ij}) \qquad [\propto \min\{k_{Ti}^2, k_{Tj}^2\}]$$

k_T-clustering 又は Durham-algorithm と呼ばれます。P-QCD との相性が悪い（従って parton → hadron の機構の詳細に sensitive な）例は

(878) $$y_{ij}^{JADE} = (p_i + p_j)^2 = 2E_iE_j(1-\cos\theta_{ij})$$

です。(878) は明らかに (876) の最低条件を満たすのですが、(875) で $\min\{y_{ij}\}$ として ソフトな粒子（ハドロン、パートン）の対を、例え θ_{ij} が大きくても combine する確率が高くなります。これは angular-ordering と相入れないので、JADE-algorithm を使うと、QCD の分岐とは全く無関係の「ジェット」が偶然できてしまう確率が無視できないのです。結果、JADE-algorithm を使った jet 分布・評価額は、ハドロン化の機構に sensitive で且つ、その fluctuation にも sensitive となり、P-QCD について学んだ（α_s を測定）P-QCD の知識を利用して、わからないことへの依存性を少なくして、jet の物理から新しい物理を探す（LHC や ILC）目的のためには使ってはいけません。

2005.10.14

さて algorithm (875) が、unique にハドロン/パートンのクラスター化[(839)式参照]することが分かると思いますが、(873)★の論文で、ハドロン・コライダー実験に適用するための重要な発展がなされました。Observe された全てのハドロン/パートンの運動量の集合 $\{\vec{p}_i\}$ を考えることは同じですが、その全てについて、次の二種類の「太さ」を計算します。

$$(879)\quad \begin{cases} y_{kin} = E_K^2 \sin^2\theta_K \left(= p_{TK}^2\right) & \cdots n\text{個} \\ y_{K\ell} = E_K^2 \sin^2\theta_{KL} \approx E_K^2 \left[(\theta_K-\theta_\ell)^2 + (\phi_K-\phi_\ell)^2 \sin^2\theta_K \right] & \\ \qquad \approx p_{TK}^2 \left[(\eta_K-\eta_\ell)^2 + (\phi_K-\phi_\ell)^2 \right] & \cdots n(n-1)\text{個} \end{cases}$$

全ての組みを計算し、

$$(880)\quad \min\{y_{K,in},\ y_{K\ell}\} < y_{cut}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} y_{K,in} \text{ の場合は } \vec{p}_K \text{ は } p_{K\parallel} \text{ の向きのビームジェットに入れて} \\ y_{K\ell} \text{ の場合は } \vec{p}_K + \vec{p}_\ell = \vec{p}_{K\ell} \end{cases}$$

で、あとは (880) を繰り返します。