

格子QCDの理論的進展と フレーバー物理への応用II

S.Hashimoto, T.O. hep-lat/0403024

大野木 哲也(京大基研)

東北大学集中講義 2月17日-19日

内容

1. Overview
2. 格子QCDの定式化: 連続極限、Reflection Positivity
3. ゲージ作用
4. 格子フェルミオン: Wilson/Staggeredフェルミオン
5. 数値計算の手法: 相関関数、遷移行列、
演算子繰り込み、カイラル極限
6. フレーバー物理への応用: 電弱遷移行列クォーク質量、
7. 最近の進展
理論形式: Ginsparg-Wilson フェルミオン
理論的手法: 非摂動繰り込み、ハドロン2体崩壊
アルゴリズム: 奇数フレーバー、ドメイン分解法
新しい問題: 2体崩壊、 ϵ 領域からの低エネルギー一定数、 $g=2$ 、光円錐波動関数

軽いクォークについて

- 現実のモンテカルロ計算で軽いクォーク質量 m_q は典型的には $m_s/3 < m_q < 2m_s$ 程度である。

ここで m_s はストレンジクォーク質量。

実際のudクォーク質量 $m_{ud} \equiv \frac{m_u + m_d}{2}$ は

$$m_{ud} \sim m_s/25$$

のため、すべての物理量において

カイラル極限付近への外挿が必要。

どのような関数形で外挿すればよいか？

- 関数形の例: PCAC関係式

$$\partial_\mu A_\mu = 2m_q P$$

$$\Rightarrow f_\pi m_\pi^2 = 2m_q \langle 0 | P(0) | \pi \rangle$$

$$\Rightarrow m_\pi^2 \propto m_q \text{ up to higher order}$$

- より系統的な方法: カイラル摂動論 (ChPT)

カイラル対称性の自発的破れのNambu-Goldstone粒子である π 中間子のみを取り扱う有効理論。カイラル対称性に基づいて分類された系統的な作用(演算子)。繰り込み不可能であるため、無限個の項からなるが、クォーク質量と運動量の展開の有限次数までは有限個。

ChPTの作用

$$U = f^2 \text{Tr}[\partial_\mu U \partial_\mu U^\dagger] + B \text{Tr}[M_q U + h.c.] + \text{higher order}$$

ここで $U = e^{i\pi/f}$

1. この作用は各項の前の係数は自由なパラメータなので、ある固定されたクォーク質量での物理量の値は予言できない。ひとたびインプットをいれてパラメータを決めるとクォーク質量依存性は予言できる。
2. 運動量と質量の展開がきちんと収束する適用範囲があるはずであるがそれがどこかはわかっていない。

$$m_q < m_s? \quad m_q < m_s/2? \quad m_q < m_s/4?$$

■ カイラル摂動論の1-loop計算の例 擬スカラー質量のクォーク質量依存性

$$m_{PS}^2 = 2B_0m_q + \underbrace{\frac{1}{(4\pi f)^2 N_f} (2B_0m_q)^2 \ln(2B_0m_q)}_{\text{non-analytic part}} + O(m_q^2)$$

Non-analytic partは予言できる。軽い領域で重要な寄与であり、カイラル外挿の結果を10%程度は変える。
(Analytic partはカウンター項で変わりうるので十分な数の独立なインプットが必要。)

カイラル外挿の関数形が決まっても格子計算でカイラル対称性がなければ問題が生じる。

例 B_K の計算

$$\langle \bar{K}^0 | (\bar{s}d)(\bar{s}d) | K^0 \rangle = c_{2p_{\bar{K}^0 p_{K^0}}} \text{ と振舞うべし。}$$

ところがカイラル対称性がないと量子補正でV-A型の演算子はスカラー型 $(\bar{s}d)(\bar{s}d)$ と混合し大きな誤差を生じる。この誤差は連続極限に向かってべき的には消えない。

$$c_{2p_{\bar{K}^0 p_{K^0}}} \rightarrow \underbrace{c_0 + c_1 m_K^2}_{\text{dominant}} + c_{2p_{\bar{K}^0 p_{K^0}}}$$

これを避けるためには

1. 非摂動的に混合を消すカウンター項の係数を調節する。
2. カイラル対称性のある作用を用いる。
(Staggerd, Ginsparg-Wilson)

教訓:

正しいカイラル外挿を行うには

- (1) 正しい有効作用を用いて物理量のクォーク質量依存性の関数形を系統的に決定する。
- (2) 格子計算は対称性を保っていないと破れの効果が問題となる。
- (3) 格子計算の質量パラメータ領域は対応する有効理論の適用範囲内でなければならない。

重いクォークについて

現実的な格子のカットオフは以下の範囲。

クエンチ近似 ($n_f = 0$) なら $a^{-1} = 2 - 4 \text{ GeV}$ ($a = 0.05 - 0.1 \text{ fm}$)

動的フェルミオンがある場合 $a^{-1} = 1 - 2 \text{ GeV}$ ($a = 0.1 - 0.2 \text{ fm}$)

これは以下の2つの要請を同時に満たすための条件

1. ハドロン質量の有限体積誤差を3%以下に抑えるためには2 - 2.5 fmのサイズが必要。

2. 数値計算が現在の計算機でできるためには以下が必要

クエンチ近似なら サイズ < $20^4 - 40^4$

動的フェルミオンがある場合 サイズ < $10^4 - 20^4$

4 GeV以上の重いクォークは $O(am_Q)$ 誤差が100%

ボトムクォークの直接格子計算は現実的でない。

外挿？

前の教訓より:

正しい重いクォークへの外挿を行うには

(1) 正しい有効作用 (heavy meson effective theory)

を用いて物理量のクォーク質量依存性

の関数形を系統的に決定する。

(2) 格子計算は対称性を保っていないと破れの効果が問題となる。

(3) 格子計算の質量パラメータ領域は対応する有効理論の適用範囲内でなければならない。

通常のアプローチでこれを満たすのは難しい。

■ Heavy Quark Effective Theory (HQET)

B中間子のようなHeavy-light系はbクォークはほとんど静止
していて、軽い自由度のみが光速で運動。静止質量を除くと
典型的な運動量は $\Lambda_{QCD} \sim 300 \text{ MeV}$ 程度。

重いクォークの静止系の周りの運動量についての $1/m_Q$
展開をもちいた有効理論が構成できる。

$$L_{HQET} = h^\dagger \left[D_0 + c_1 \frac{\vec{D}^2}{2m_Q} + c_2 \frac{g\sigma \cdot \vec{B}}{2m_Q} + O(1/m_Q^2) \right] h$$

マッチング係数は摂動論で求めている。

■ Nonrelativistic QCD(NRQCD)

Υ 中間子のようなHeavy-heavy系はbクォークは非相対論的に運動。典型的な運動量は $m_Q \alpha(m_Q)$ 程度。非相対論的速度についての展開を用いた有効理論が構成できる。

$$L_{NRQCD} = Q^\dagger [D_0 + c_1 \frac{\vec{D}^2}{2m_Q} + O(v^4)] Q$$

マッチング係数は摂動論で求めている。

いくつかのアプローチ

- 通常フェルミオンをcharm領域に適用しbottomに外挿する。
- 格子上の有効理論を使う。
 1. Static極限
 2. 格子NRQCD
 3. Wilson フェルミオンの非相対論的再解釈

計算の手順のまとめ

- ゲージ配位を生成
- クォーク伝播関数を解いて、相関関数を求める。
- 長時間でexponential fit し遷移行列を求める。
- 軽いクォークについてカイラル外挿を行う。
(重いクォークについては有効理論をもちいる方がよい)
- 格子間隔を決める。
- 演算子の繰り込みを行う。
- 連続極限をとる。

ゲージ配位の生成法について

- クエンチ近似 $\det D = 1$ と近似する。
通常のスピン系のモンテカルロと同様(省略)
- 動的フェルミオン計算
よく用いられる方法: Hybrid Monte Carlo法

$$\begin{aligned} \int DAD\bar{\psi}D\psi \exp(-S_g(A) - \sum_{i=1}^2 \bar{\psi}D(A)\psi) &= \int DAdet(D(A))^2 e^{-S_g(A)} \\ &= \int DAD\phi^*D\phi \exp(-S_g(A) - \phi^*(D(A)^\dagger D(A))^{-1}\phi) \\ &= \int DAD\pi_A \underbrace{D\phi^*D\phi \exp(-(\pi_A^2/2 + S_g(A) + \phi^*(D(A)^\dagger D(A))^{-1}\phi))}_{\equiv \exp(-H(\pi_A, A))} \end{aligned}$$

- 全ページの系は (A, π_A, ϕ) からなるカノニカル分布
 1. ϕ についてのカノニカル分布はガウス分布型に帰着できる。各点独立にガウス乱数 $\xi(x)$ を作って $\phi(x) = (D(A)^\dagger \xi)(x)$ とすればよい。
 2. (A, π_A) に関する部分はミクロカノニカル(等エネルギー面を一様分布)を行いつつ異なるエネルギー間をカノニカル分布にしたがって分布させる。すなわち $H(\pi_A, A)$ をハミルトニアンとする正準運動方程式を解いてしばらく系を発展させつつときどき運動量 π_A をガウス乱数でリセットする。

正準運動方程式を解くところで各仮想時刻ごとに逆行列の計算が入る。ここがもっとも時間がかかる。

5. フレーバー物理への応用

Bの物理の結晶

■ $B^0 - \bar{B}^0$ 混合

クエンチ近似の崩壊定数

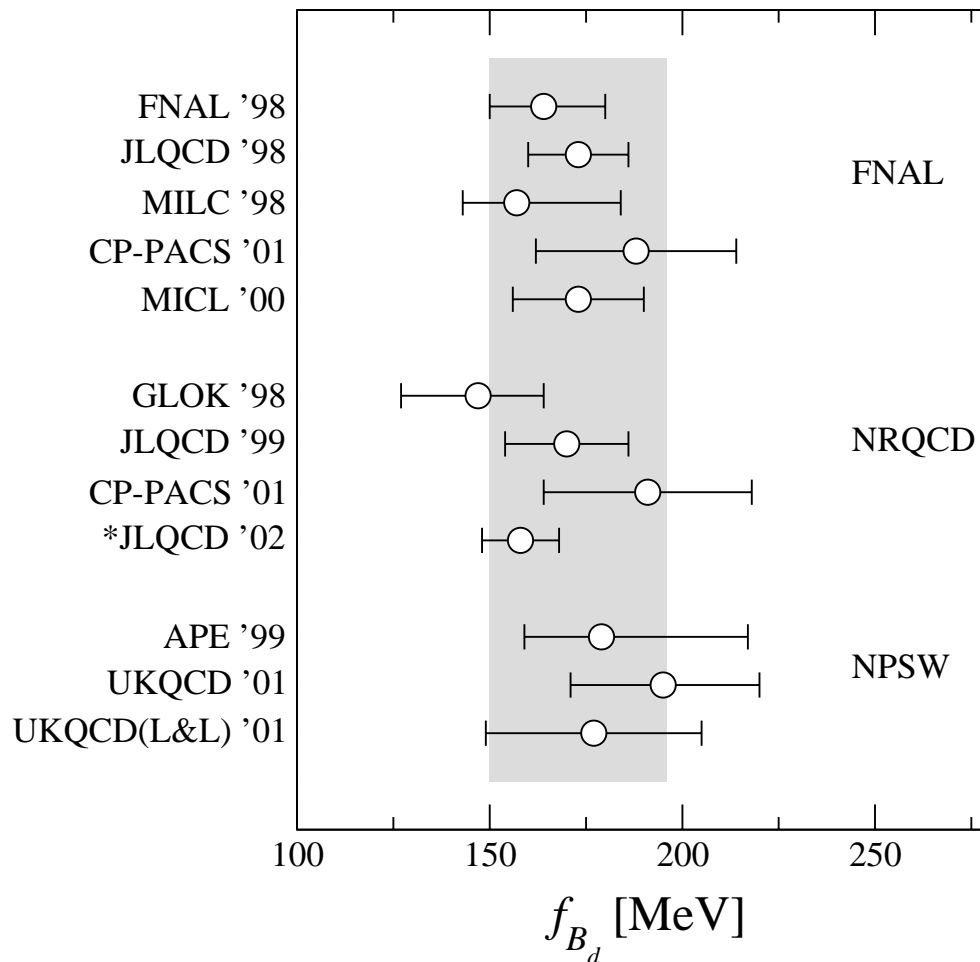
さまざまなアプローチの
結果がconsistent

$$f_{B_d}^{n_f=0} = 173(23)\text{MeV}$$

$$f_{B_s}^{n_f=0} = 200(20)\text{MeV}$$

$$f_{D_d}^{n_f=0} = 203(14)\text{MeV}$$

$$f_{D_s}^{n_f=0} = 230(14)\text{MeV}$$



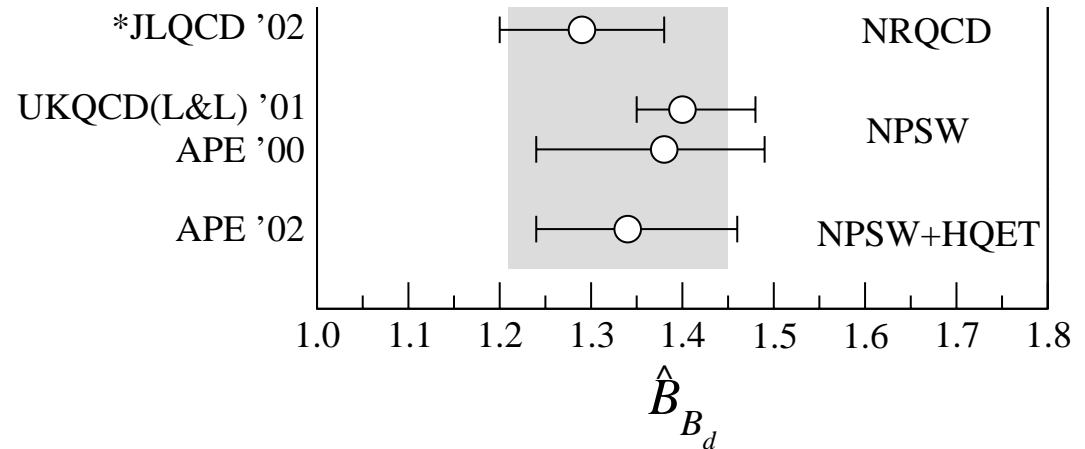
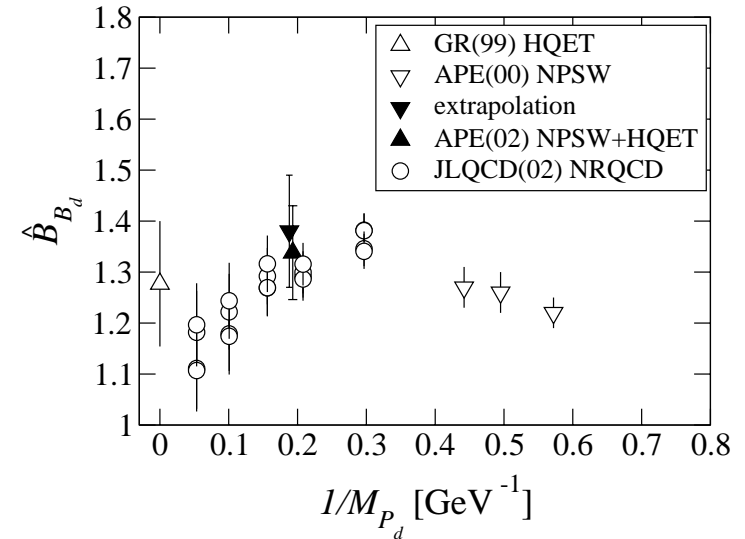
■ クエンチ近似のバク定数

NRQCDとstaticは一致

外挿法と比較すると

重いクォークの質量依存性が異なるように見える。

$$\hat{B}_{B_d}^{n_f=0} = 1.33(12)\text{MeV}$$



■ 2フレーバー崩壊定数

heavy meson 有効理論+カイラル摂動論によると
 軽いクォークの質量依存性のnon-analytic部は

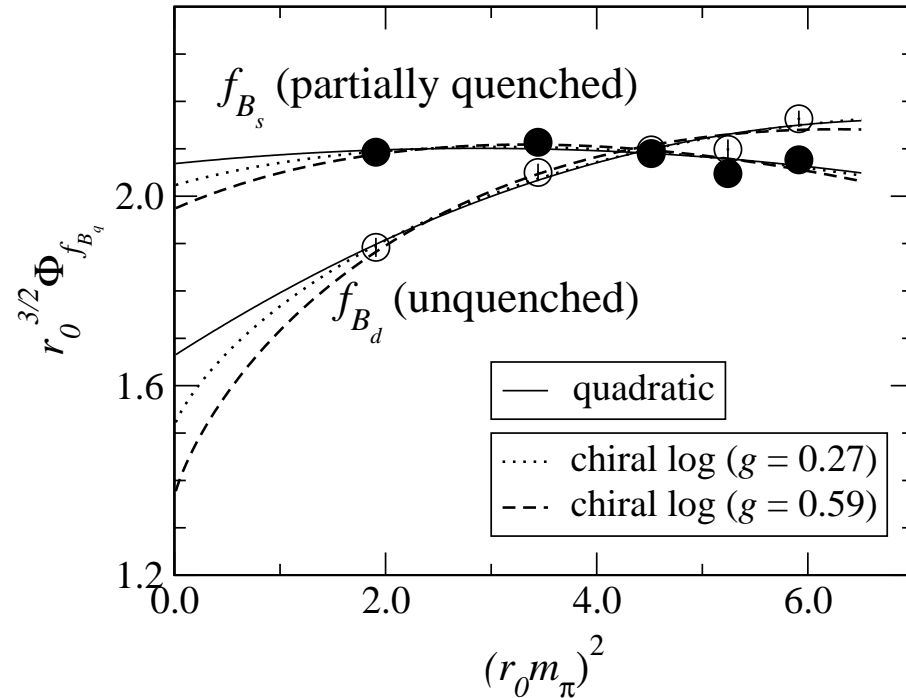
$$-(1 + 3g^2) \frac{m_{PS}^2}{(4\pi f)^2} \log(m_{PS}^2/\Lambda^2) \quad (g: B^* B \pi \text{ coupling})$$

カイラル外挿の不定性が大きい

$$f_{B_d}^{n_f=2} = 198({}_{-34}^{+0}) \text{ MeV}$$

$$f_{B_s}^{n_f=0} = 230(30) \text{ MeV}$$

$$(f_{B_s}/f_{B_d})^{n_f=2} = 1.16(5)({}_{-0}^{+24})$$



■ 2フレーバーバグ定数

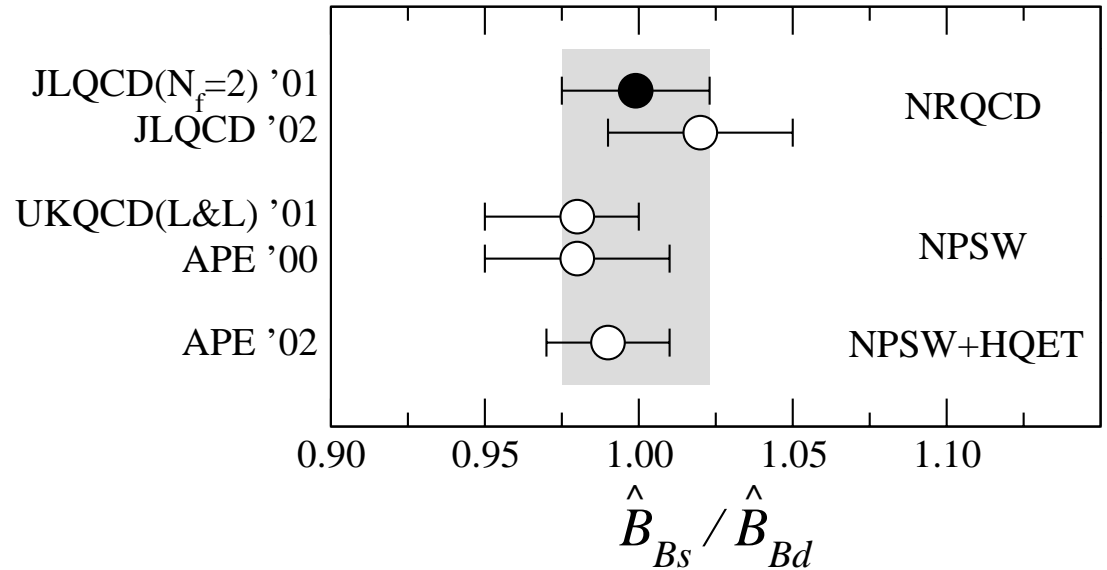
heavy meson 有効理論+カイラル摂動論によると
 軽いクォークの質量依存性のnon-analytic部は

$$-(1 - 3g^2) \frac{m_{PS}^2}{(4\pi f)^2} \log(m)$$

幸いなことに係数が小

$$\hat{B}_{B_d}^{n_f=0} = 1.34(13)$$

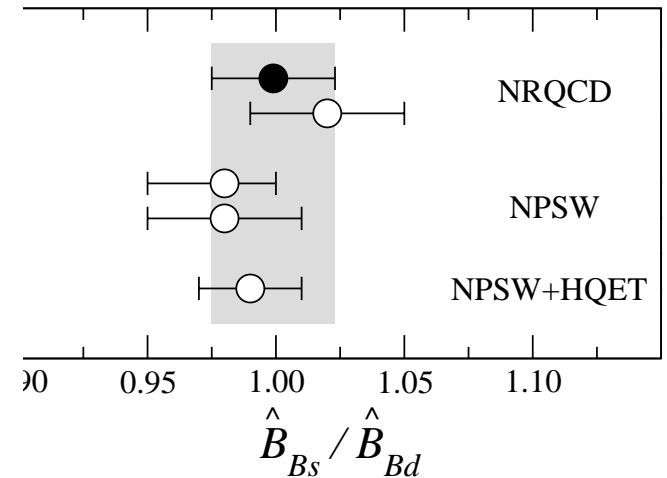
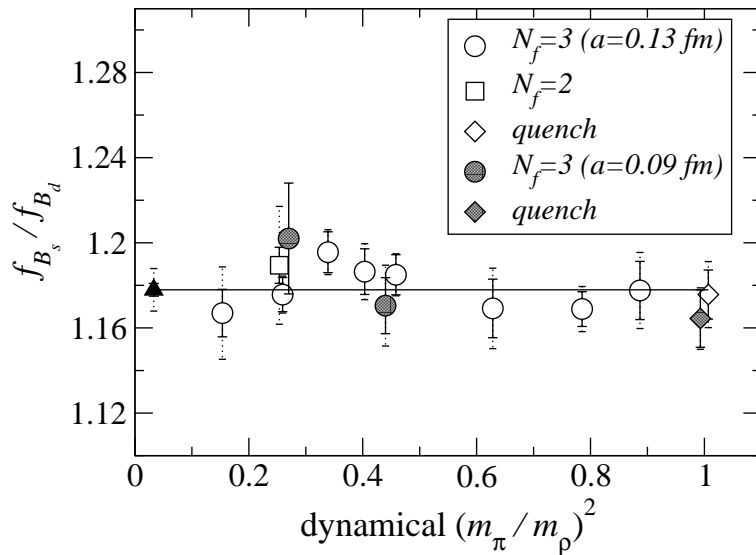
$$(B_{B_s}/B_{B_d})^{n_f=0} = 0$$



■ 2フレーバーでのSU(3)breaking

$$\frac{\Delta M_{B_s}}{\Delta M_{B_d}} = \frac{|V_{ts}|^2 M_{B_s} \xi^2}{|V_{td}|^2 M_{B_d}}$$

$$\begin{aligned} \xi &= (f_{B_s} \sqrt{B_{B_s}}) / (f_{B_d} \sqrt{B_{B_d}}) \\ &= 1.16(6) \left(\begin{array}{c} +24 \\ -0 \end{array} \right) \end{aligned}$$

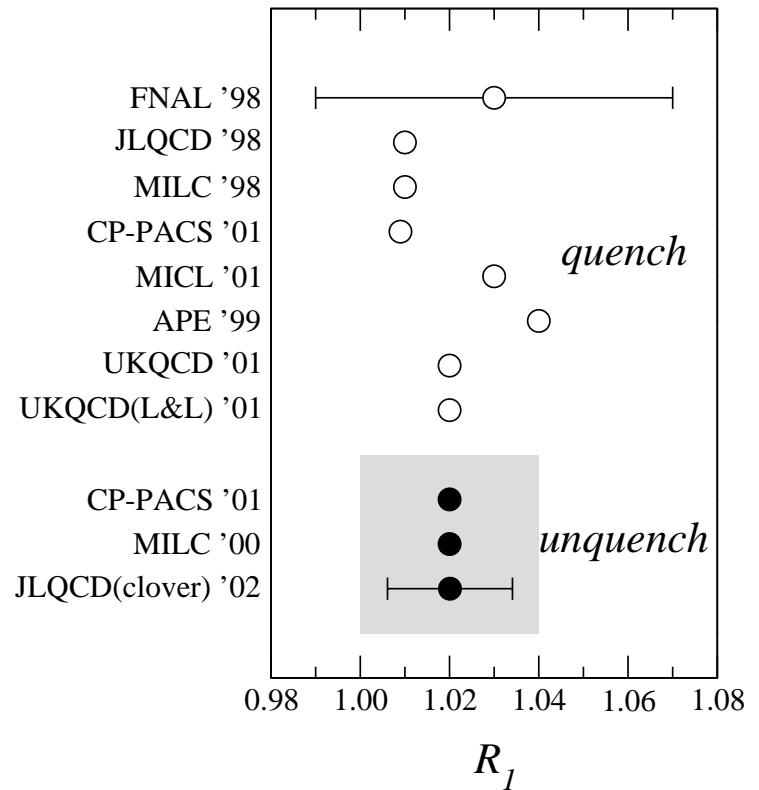
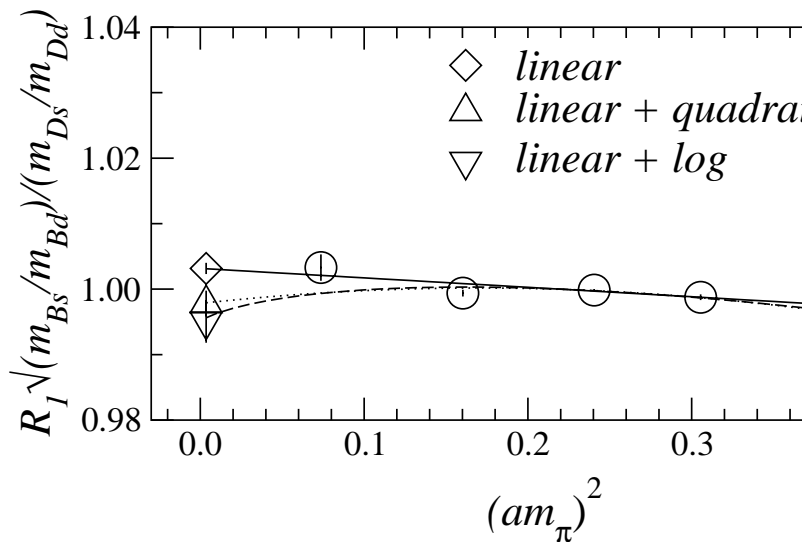


■ Grinstein Ratio

$$R_1 \equiv (f_{B_s}/f_{B_d})/(f_{D_s}/f_{D_d})$$

$$\frac{\Delta M_{B_s}}{\Delta M_{B_d}} = \frac{|V_{ts}|^2 M_{B_s} (f_{D_s}^2)}{|V_{td}|^2 M_{B_d} f_{D_d}^2} CLEO-c \left(\frac{B_{B_s} R_1^2}{B_{B_d}} \right)_{lattice}$$

$$R_1^{n_f=2} = 1.02(2)$$



- $B \rightarrow D^* l \nu$ 形状因子 (Ferimlab group)

$$\frac{d\Gamma}{d\omega} \propto |V_{cb}|^2 |\mathcal{F}_{B \rightarrow D^*}(\omega)|^2$$

Heavy quark 対称性から極限で1となるような
3点関数のdouble ratioをとってIsgur-Wise極限
からの1/m補正を計算する。

$$\mathcal{F}_{B \rightarrow D^*}^{n_f=0}(1) = 0.913_{-0.0173}^{+0.0238} + 0.0171_{-0.0302}$$

$B \rightarrow \pi^* l \nu$ 形

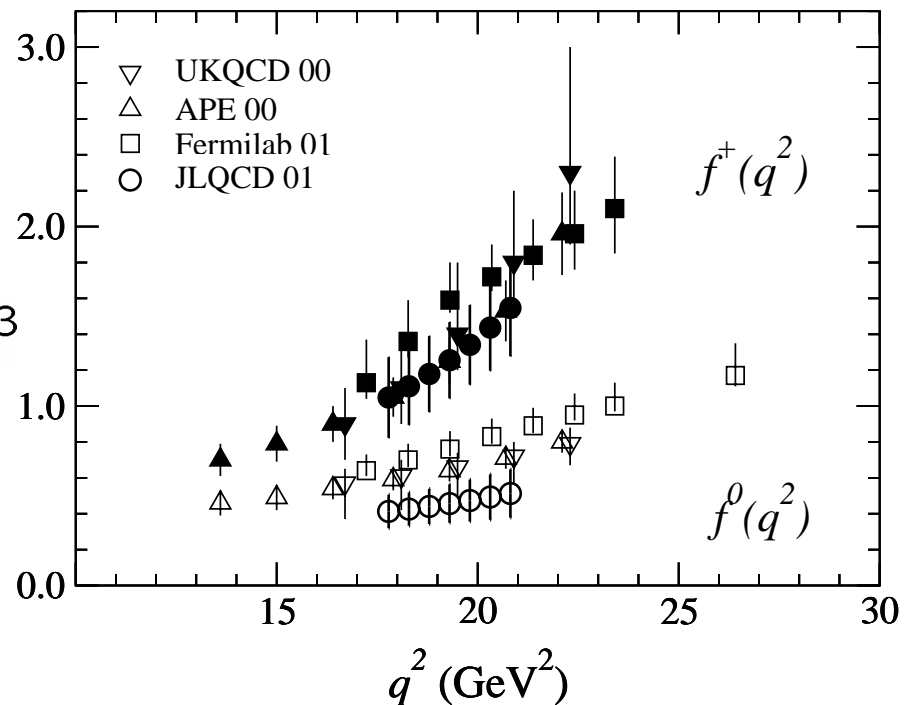
$$\langle \pi(k) | V_\mu(0) | B(p) \rangle = [(p+k) - \frac{m_B^2 - m_\pi^2}{q^2} q]_\mu f^+(q^2) + \frac{m_B^2 - m_\pi^2}{q^2} q_\mu f^0(q^2)$$

$$\frac{d\Gamma}{dq^2} \propto |V_{ub}|^2 |f^+(q^2)|^2$$

さまざまなアプローチ
クエンチ近似計算が
なされている。

$$|V_{ub}|^{(n_f=0)} = 2.9(7)(7) \times 10^{-3}$$

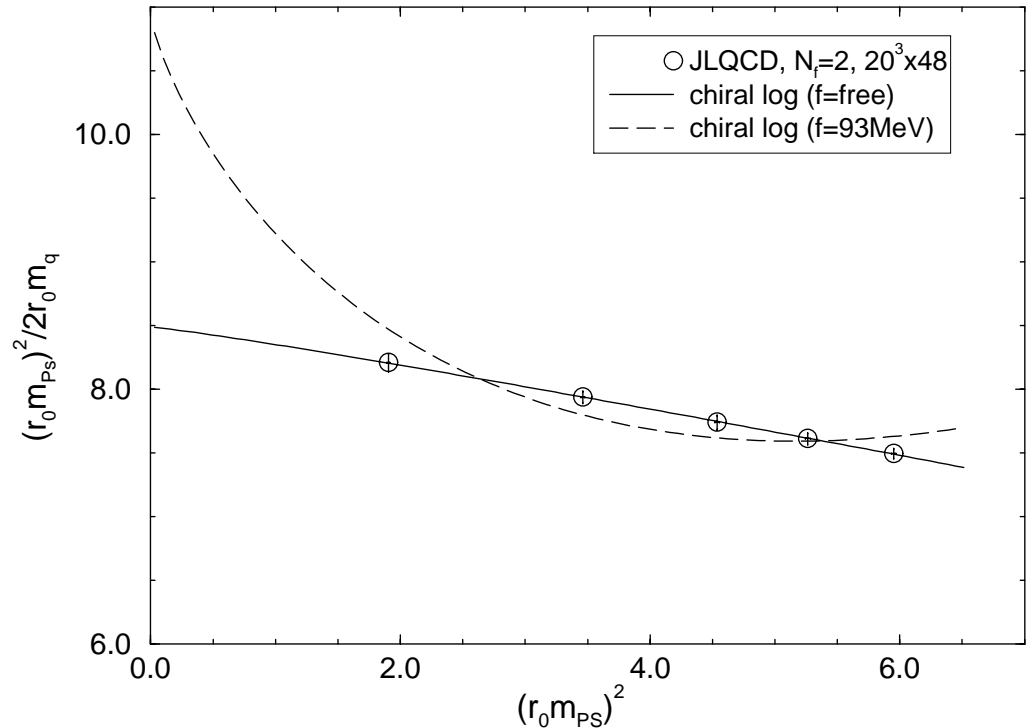
$$|V_{ub}|^{(n_f=2+1)} = 3.3(7)(4) \times 10^{-3}$$



Chiral logのテスト JLQCD $O(a)$ -Wilson 2フレーバー

$$\frac{m_{PS}^2}{2B_0m_q} = 1 + \underbrace{\frac{1}{(4\pi f)^2 N_f} (2B_0m_q) \ln(2B_0m_q)}_{\text{non-analytic part}} + O(m_q)$$

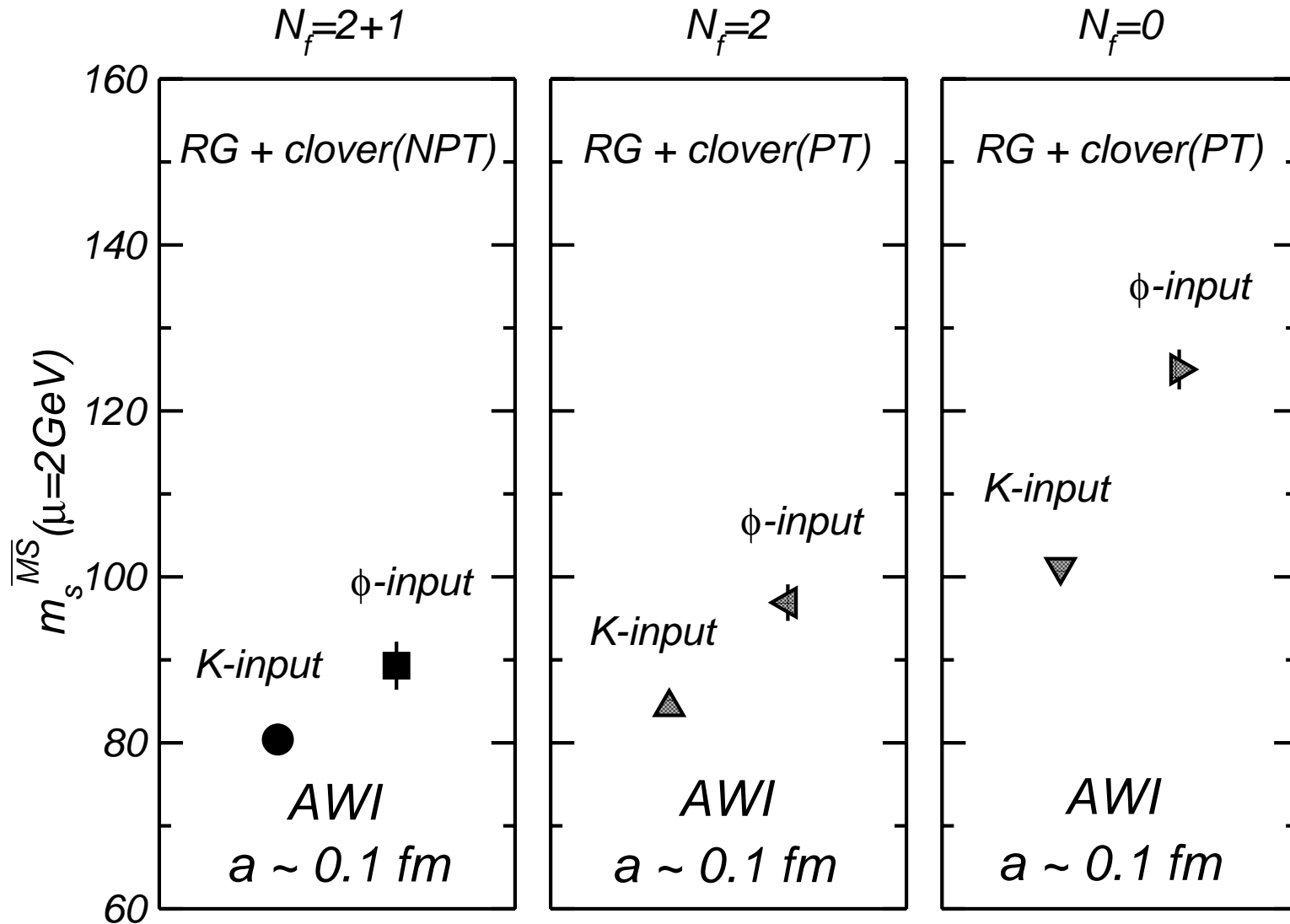
今のように重い質量ではうまくフィットできない。



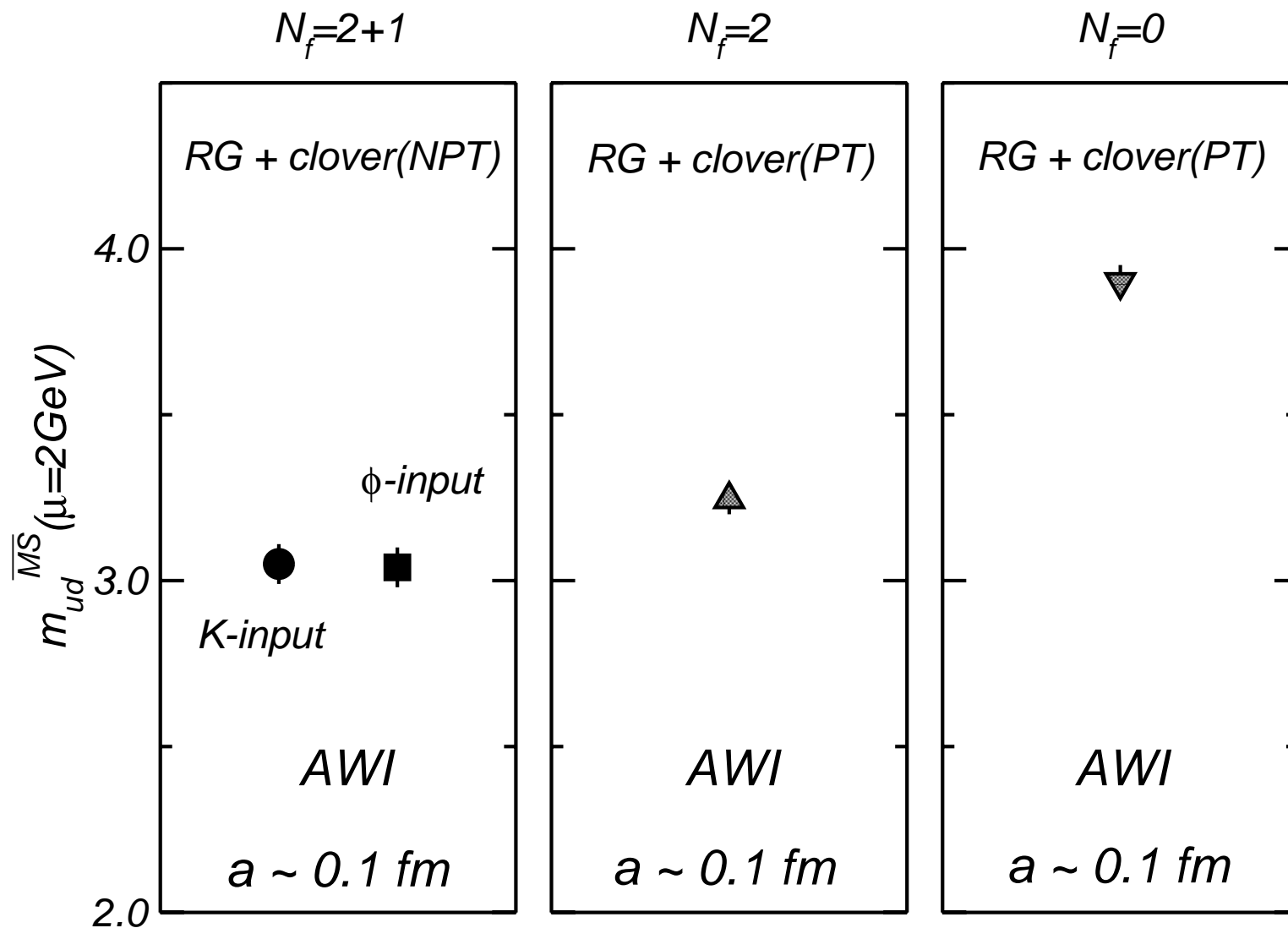
2 + 1 の動的フェルミオンの計算

- MILC Collaboration
Staggard fermion
- JLQCD
O(a)-improved Wilson fermion

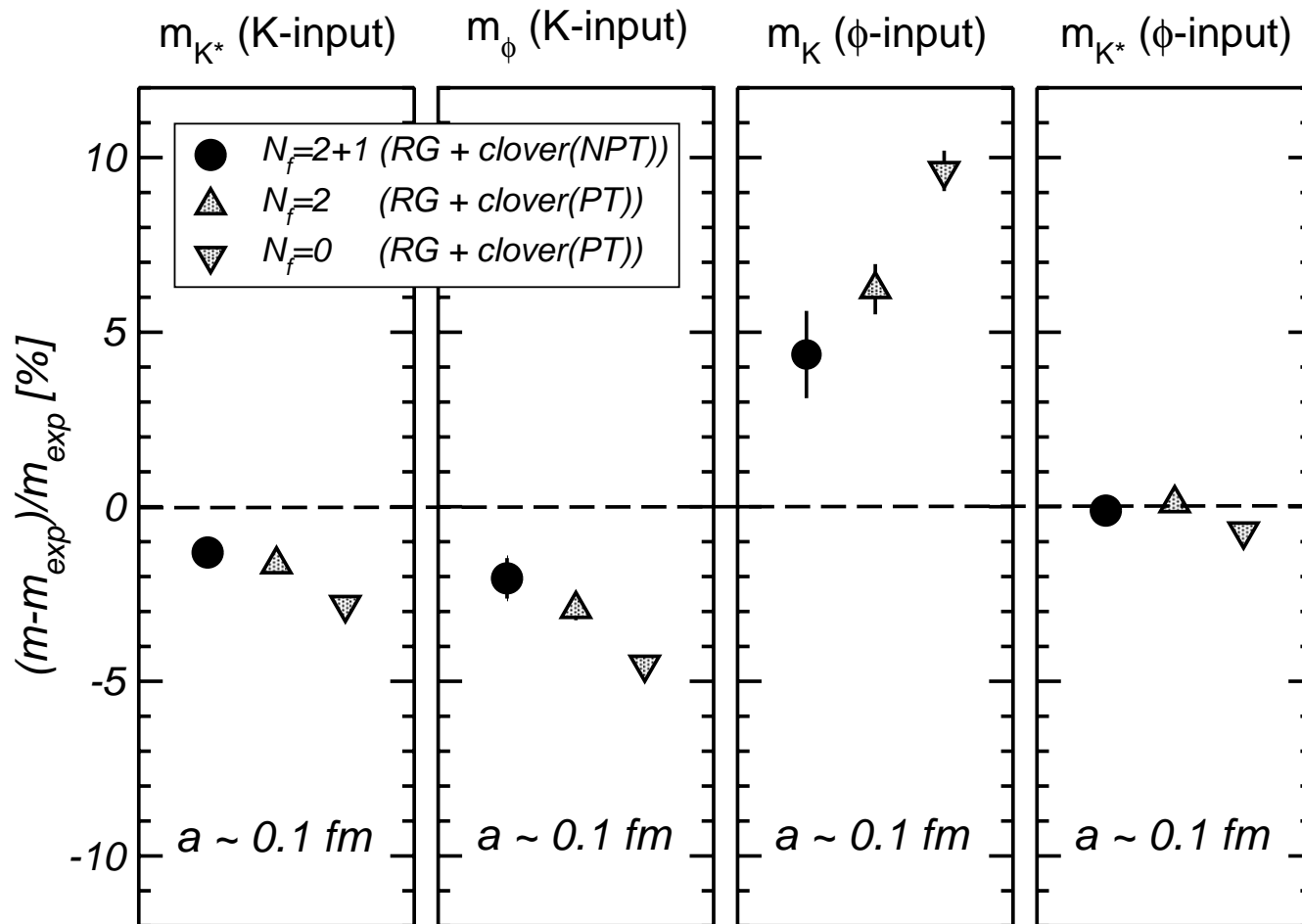
ILOCD strange quark mass



JLQCD ud quark mass

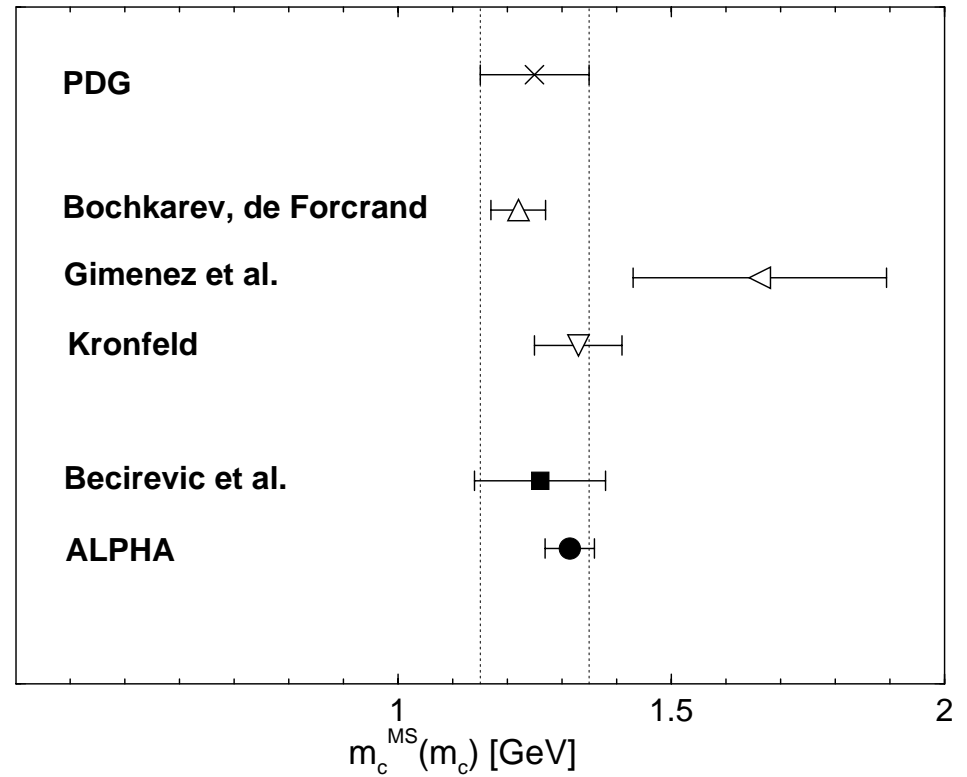


JLQCD K meson spectrum



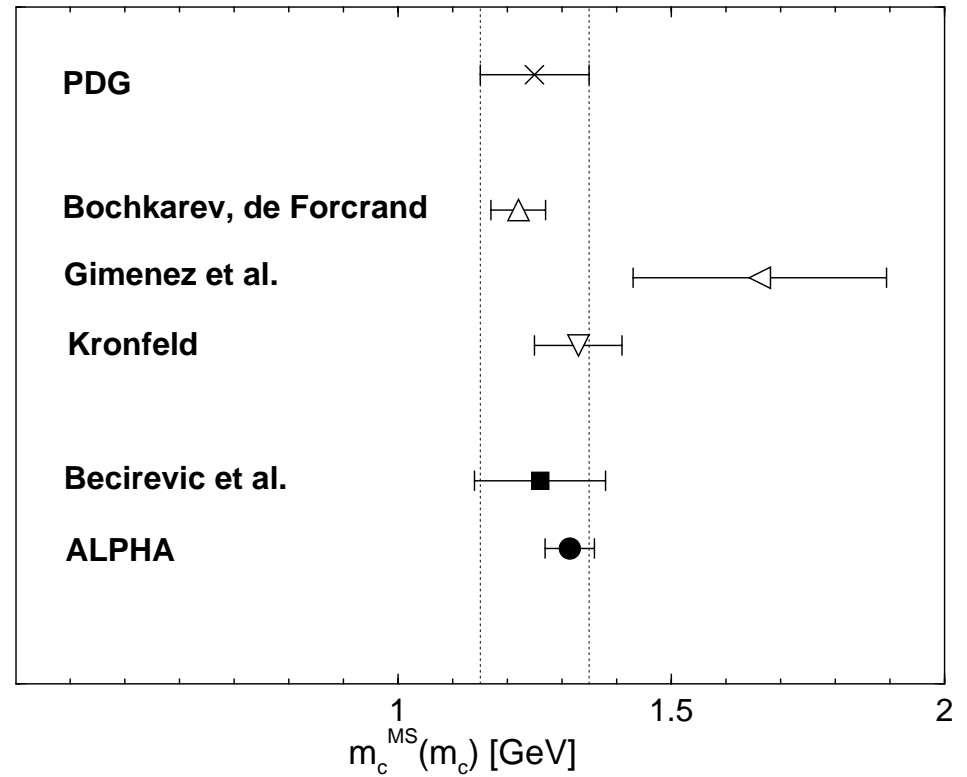
■ Bottom mass

B and upsilon

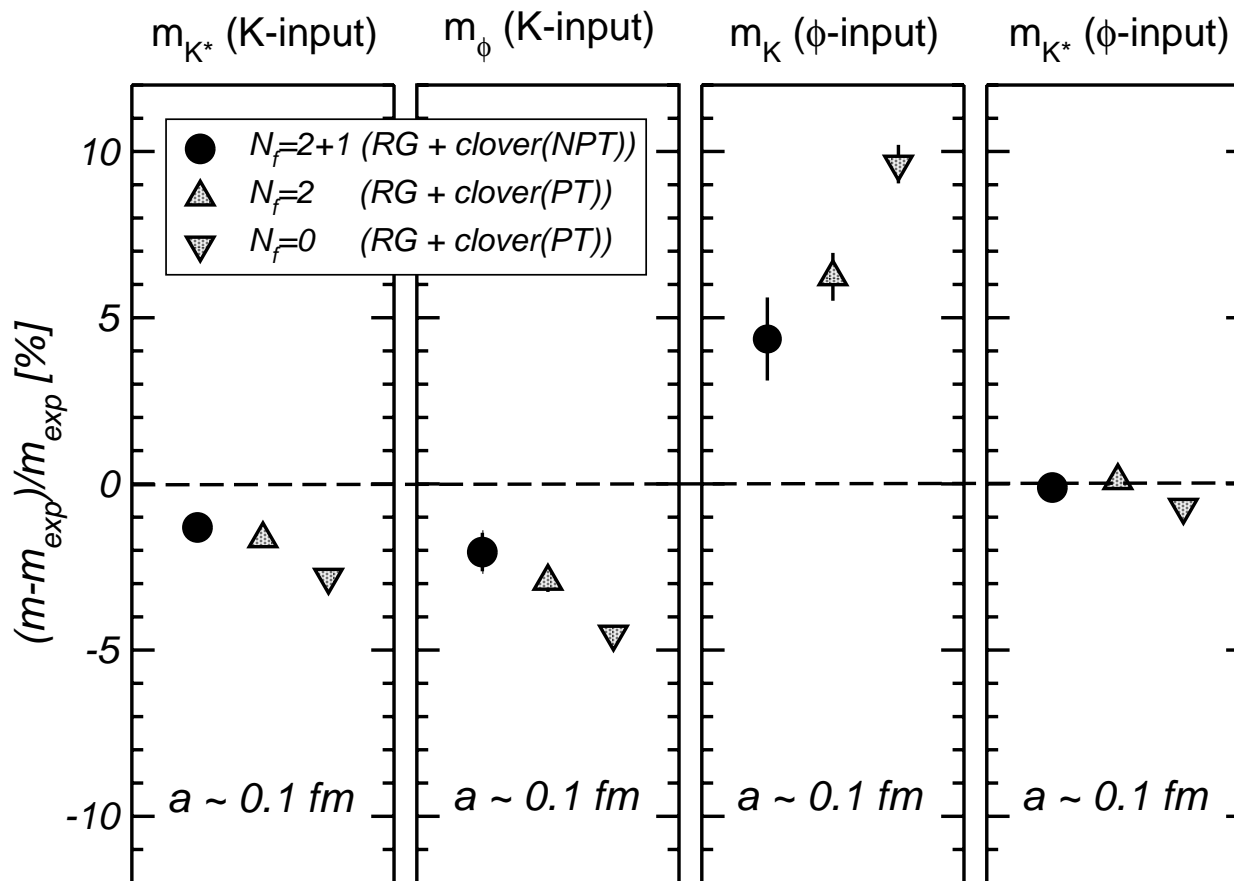


■ Charm

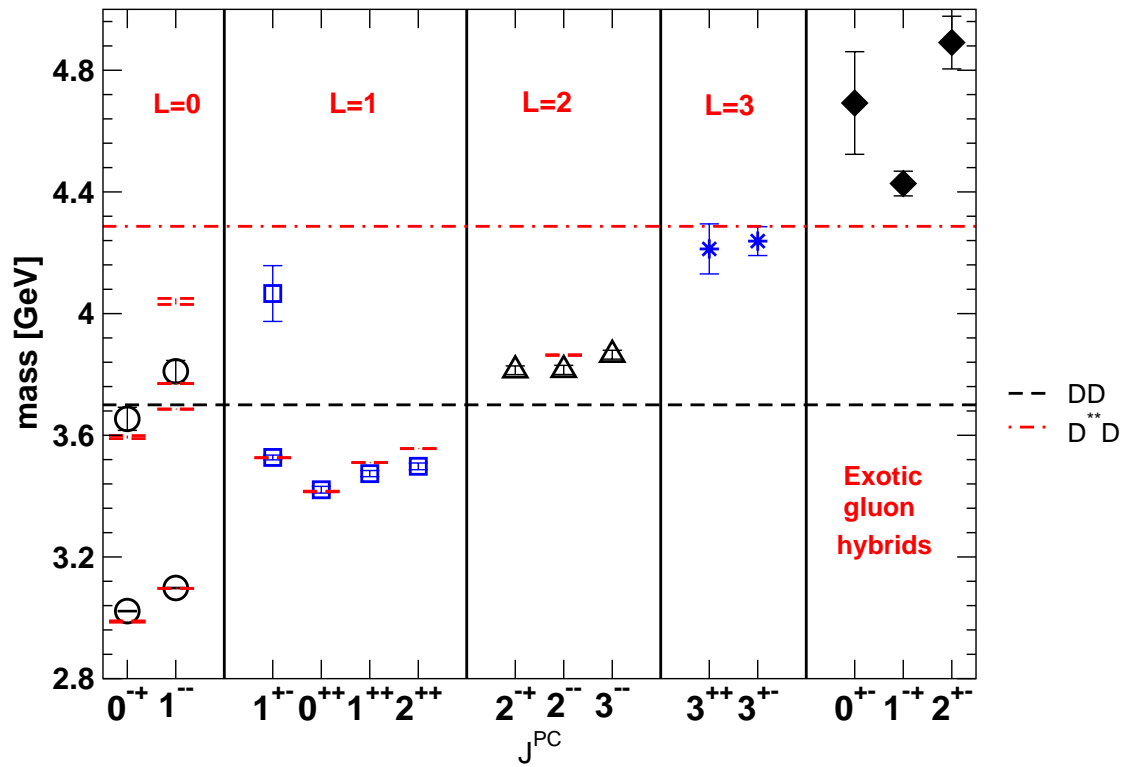
1. 26(12)



クォーク質



クォーク-グルオン



6. 最近の進展

Ginsparg-Wilsonフェルミオン

連続理論からBlock-spin変換により有限格子間隔の作用を導く。

$$e^{-\sum_{mn} \bar{\psi}_m h_{mn} \psi_n} = \int D\bar{\psi} D\psi e^{-\int d^4x \bar{\psi}(x) \gamma_\mu \partial_\mu \psi(x)} \\ \times e^{-\sum_{mn} (\bar{\psi}_m - \int_{V_m} d^4x \bar{\psi}(x)) \alpha_{mn} (\psi_n - \int_{V_n} d^4x \psi(x))}$$

ここで格子場にNaïveカイラル変換 $\delta\psi = i\epsilon\gamma_5\psi, \delta\bar{\psi} = i\epsilon\bar{\psi}\gamma_5$ をおこなうと

$$\delta(LHS) = -i\epsilon \sum_{mn} \bar{\psi}_m (\gamma_5 h_{mn} + h_{mn} \gamma_5) \psi_n e^{-\sum_{mn} \bar{\psi}_m h_{mn} \psi_n}$$

$$\delta(RHS) = \int D\bar{\psi} D\psi e^{-\int d^4x \bar{\psi}(x) \gamma_\mu \partial_\mu \psi(x)} \\ \times e^{-\sum_{mn} (\bar{\psi}_m - \int_{V_m} d^4x \bar{\psi}(x)) \alpha_{mn} (\psi_n - \int_{V_n} d^4x \psi(x))} \\ (-i\epsilon) \sum_{mn} (\bar{\psi}_m - \int_{V_m} d^4x \bar{\psi}(x)) 2\gamma_5 \alpha_{mn} (\psi_n - \int_{V_n} d^4x \psi(x))$$

$$\begin{aligned}
\delta(RHS) &= \int D\bar{\psi}D\psi(-i\epsilon) \sum_{mn} \left(\frac{\delta}{\delta\psi}\alpha^{-1}\right)_m 2\gamma_5\alpha_{mn} \left(\alpha^{-1}\frac{\delta}{\delta\bar{\psi}}\right)_n \\
&\quad e^{-\int d^4x\bar{\psi}(x)\gamma_\mu\partial_\mu\psi(x)} e^{-\sum_{mn}(\bar{\psi}_m - \int_{V_m} d^4x\bar{\psi}(x))\alpha_{mn}(\psi_n - \int_{V_n} d^4x\psi(x))} \\
&= (-i\epsilon) \sum_{mn} \left(\frac{\delta}{\delta\psi}\alpha^{-1}\right)_m 2\gamma_5\alpha_{mn} \left(\alpha^{-1}\frac{\delta}{\delta\bar{\psi}}\right)_n e^{-\sum_{mn}\bar{\psi}_m h_{mn}\psi_n} \\
&= -i\epsilon \sum_{mn} \bar{\psi}_m (h\alpha^{-1}(2\gamma_5\alpha)\alpha^{-1}h)_{mn} e^{-\sum_{mn}\bar{\psi}_m h_{mn}\psi_n}
\end{aligned}$$

$$\delta(LHS) = \delta(RHS) \quad \text{より}$$

$$\gamma_5 h + h\gamma_5 = 2h\gamma_5\alpha^{-1}h$$

Ginsparg-Wilson 関係式

とくに $\alpha_{mn} = \delta_{mn}$ にとると通常の間になる。

- Neubergerによる解 (Overlap Dirac Operator)

$$aD = \frac{1}{2} \left(1 + \gamma_5 \frac{H_W}{\sqrt{H_W^2}} \right)$$

ここで $H_W = \gamma_5(D_W - m_0/a)$, D_W : Wilson Dirac operator

$$0 < m_0 < 2$$

自由場の時、フーリエ変換を用いて簡単に以下の形となる。

$$\tilde{D}(p) = \frac{1}{2} \left(1 + \frac{i\gamma_\mu \bar{p}_\mu + \hat{p}^2/2 - m_0}{\sqrt{\bar{p}^2 + (\hat{p}^2/2 - m_0)^2}} \right)$$

$$\bar{p}_\mu \equiv \sin(p_\mu), \hat{p}_\mu \equiv 2 \sin(p_\mu/2)$$

これはsmall momentum極限で連続のdirac演算子になり、

かつ分母の中身がゼロになる、すなわち

運動量表示での解析性 (= 座標非表示での局所性)

がやぶれることはない。

■ 局所性

もし、 $0 < \alpha < \|aH_W^2\| < \beta$ が成り立つとすると

$$\frac{1}{\sqrt{H_W^2}} = \frac{\kappa}{\sqrt{1 - 2tz + t^2}} = \kappa \sum_{k=0}^{\infty} t^k P_k(z)$$

ここで、 $z \equiv \frac{\beta + \alpha - 2H_W^2}{\beta - \alpha}$, $\cosh \theta \equiv \frac{\beta - \alpha}{\beta + \alpha}$, $t \equiv e^{-\theta}$, $\kappa \equiv \sqrt{\frac{4t}{\beta - \alpha}}$

距離 $n \equiv |x - y|/2a$ 離れた場所とつながるには必ず H_W^2 を最低 n 回は作用させなければならないので上の式から $e^{-n\theta}$ だけ抑制される。

$$\left\| \frac{1}{\sqrt{H_W^2}}(x, y) \right\| < \frac{\kappa}{1 - t} \exp(-\theta|x - y|/2a)$$

Ultra localではないが広い意味で局所的

- $m_0 = 1$ のとき Admissibility 条件がなりたてば
上記の局所性は保証される。ゲージ場が
スムーズであるとして

$$\|1 - U_\mu(x)U_\nu(x + \hat{\mu})U_\mu^\dagger(x + \hat{\nu})U_\nu^\dagger(x)\| < \epsilon$$

その度合いが $\epsilon < 1/30$ であれば十分条件
(必ずしも必要ではない)

証明のステップは $H_W^2 = (1 - aD_W)^\dagger(1 - aD_W)$

の固有値が1よりどれだけ小さくなりうるかを

不等式で押さえ込むときに field strength の上限が必要

- カイラルアノマリーが正しく再現される。
経路積分においてカイラル変換をおこなうと
 $\delta\psi = \gamma_5\psi, \quad \delta\bar{\psi} = \bar{\psi}\hat{\gamma}_5 \quad \hat{\gamma}_5 \equiv (1 - 2aD)\gamma_5$
measureから以下のアノマリーが生じ
連続極限では以下のようにになる。

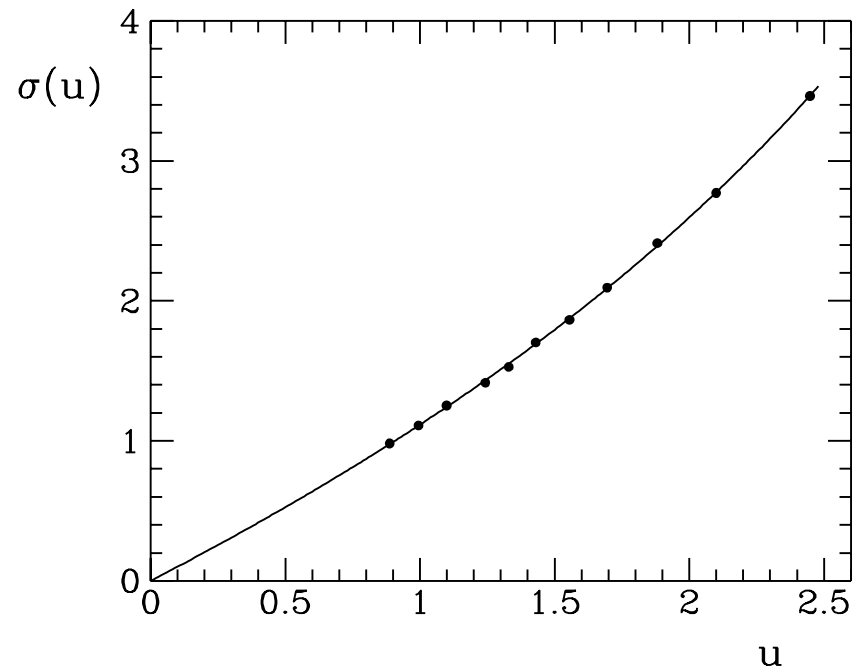
$$-2\text{tr}\gamma_5(1 - aD)(x, x) \xrightarrow{a \rightarrow 0} \frac{g^2}{32\pi^2}\epsilon_{\mu\nu\lambda\rho}F_{\mu\nu}F_{\lambda\rho}$$

しかも有限格子間隔でこのアノマリーは
Dirac演算子のindexになることが
GW関係式から導ける。

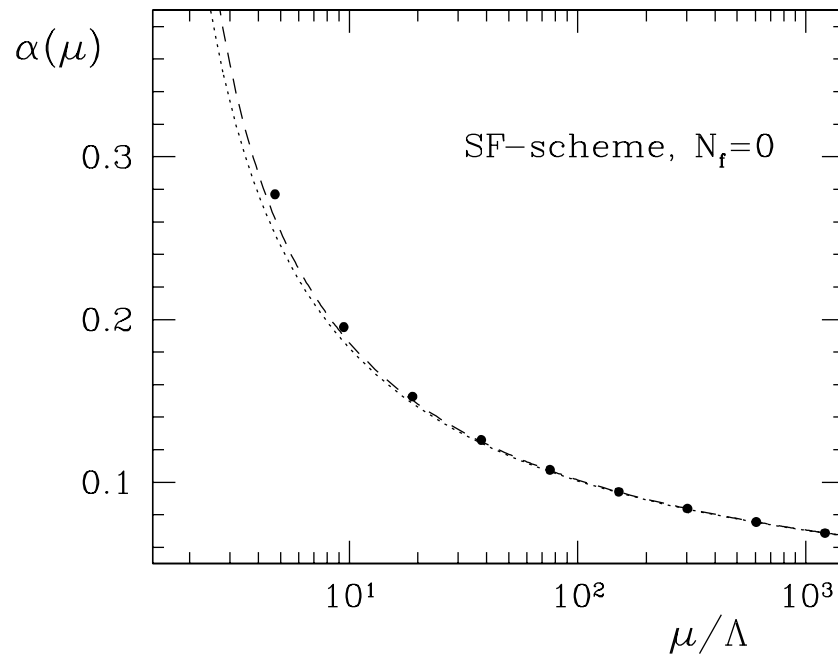
理論的手法

- 非摂動繰り込み Luscher NPB384(1992)168
有限体積 L で境界をもつ空間における
振幅を繰り込み条件として
新しいスキーム(SFスキーム)を提案
摂動、非摂動ともに計算できる。
繰り込み因子とそのrunningとともに計算可能

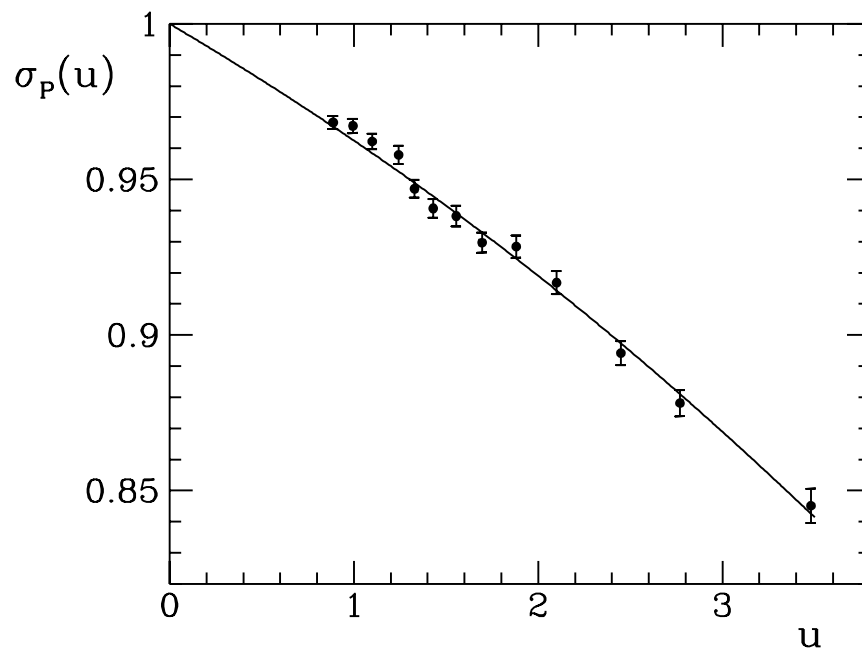
- SFスキームによるStrong Coupling Constantの Step scaling function



- SFスキームによるStrong Coupling Constantのrunning
点線、破線、実線は2, 3, 4ループの結果



- SFスキームによるquark massのStep scaling function



SFスキームによるクォーク質量のrunning
点線、破線、実線は2, 3, 4ループの結果

