2 群の構造

◁ ▷

この章では，群の応用に必要となる群の基本的な性質を有限群を例に学んでいく．

2.1 写像

群の構造の理解には，写像の概念が必要になる．ここでは写像に関するいくつかの定義を導入する．

2.1.1 写像

２つの集合 S,T があるとき集合 S の任意の元 $s \in S$ に対してただ一つ T の元 $t \in T$ が決まる時**写像** (map) とよぶ．その写像を α という名前を付けたとき，

$$\alpha \ : \ S \to T \quad s \mapsto t = \alpha(s) \tag{2.1}$$

と書く．このとき，S を写像の**定義域**またはドメイン (domain) と呼ぶ．一方 T を**余域** (codomain) またはターゲット (target set) と呼び, 写像が値を取る範囲 $\{\alpha(s)\} \subset T$ を**値域** (range) または単に**像** (image) と呼ぶ.

2.1.2 全射 ・単射 ・全単射

写像は，その性質によっていくつかに分類される．単に写像といった場合は，一般に異なる元 $s, s' \in S$ が同じ元 $t \in T$ に値を取ることが許される．

全射と単射　特にすべての元 $s \in S$ が異なる元 $t \in T$ に値を取る場合，つまり, 写像 α が, 任意の $s, s' \in S$ に関して

$$s \neq s' \ \text{ならば，} \ \alpha(s) \neq \alpha(s') \tag{2.2}$$

が成り立つならば，その写像 α を**単射 (injection)** または（１：１）[4]と呼ぶ．また，写像のイメージがターゲットの集合 T のすべての元に値を持つとは限らない．とくに，任意の元 $t \in T$ がその**原像** (coimage) を持つとき，つまり，ある写像 α に関して，ターゲット集合の全ての元 t に $t = \alpha(s)$ を満たすような S の元が存在するとき**全射 (surjection)** と呼ぶ.

単射であり全射の写像を**全単射 (bijection)** とよぶ．二つの集合 S から T への全単射が存在するとき集合の元の数 (cardinal number) は等しく，S と T は集合として**対等**と呼ばれる．図 2 に，さまざまな写像を図式化してある．

2.1.3 群または代数の写像

群のように，集合の元の間に代数的構造がある場合，その構造を保つような写像を準同型写像とよぶ．準同型写像には次のように同型・準同型写像，自己同型・自己準同型写像 (それぞれ，Isomorphism, Homomorphism, Automorphism, Endomorphism) 等がある．

[4]one to one は全単射の意味で使うこともあるが，紛らわしいので以下では使わない．

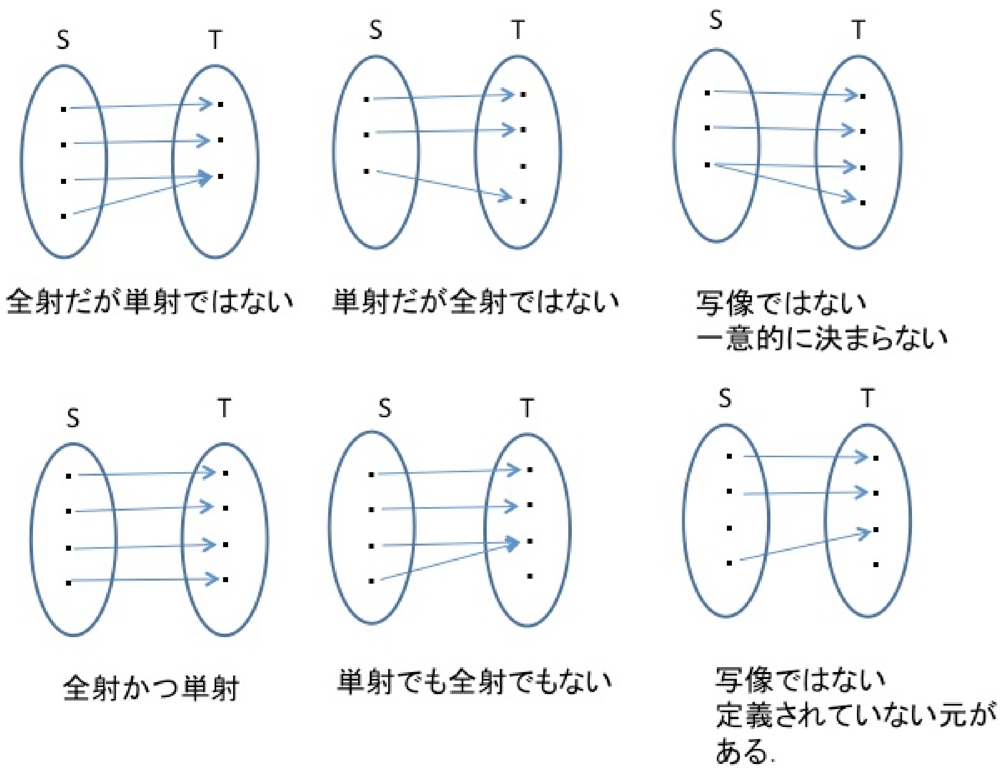

Figure 2: さまざまな写像.

群準同型写像　群 G から群 H の写像 $\alpha : G \to H$ において,

$$\alpha(g \cdot g') = \alpha(g) \cdot_H \alpha(g') \tag{2.3}$$

が成り立つとき, **群準同型写像** (Group Homomorphism) とよぶ. ただし, $\cdot_H$ は群 H での積の意味. 群準同型写像では, それぞれの群の単位元 $1_G \in G$,$1_H \in H$ 関して次の関係が成り立つ.

$$\alpha(1_G) = 1_H \tag{2.4}$$

また, 任意の元 $g \in G$ の逆元の写像は

$$\alpha(g^{-1}) = \alpha(g)^{-1} \tag{2.5}$$

という関係を満たす.

可換図式

群準同型写像が全単射の時, **群同型写像** (group isomorphism) と呼ぶ. この場合、群としてまったく同じと思ってよい。例えば、回転群と特殊直交群 $SO(3)$ は群同型である.[5]

それぞれ, 自分自身への写像に関して同様の分類を行いそれぞれ**自己同型写像** (Automorphism), **自己準同型写像** (Endomorphism) が定義できる.

[5]以下, 明らかである場合は群と断らず単に準同型と呼ぶ.

2.1.4 有限群の写像の例

群の間の写像を理解するために，いくつかの例を見てみよう．

例１: 全単射だが群同型ではない例 有限群 G に関して，ある元 $g \in G$ を i 番目の元 $g_i \in G$ にかけると新しい元 $g_1' = g_1 g$ を得る．つまり，g によってある写像 α_g

$$\alpha_g \ : \ G \ \to \ G \ : \ g_i \ \mapsto \ \alpha_g(g_i) = g_i g \tag{2.6}$$

が定義できる．このような写像は実は群 G の自分自身への全単射になっているのだが，群の積の構造を壊すので群同型写像にはなっていないことがわかる．

まず全単射になっていることは次のような定理として証明できる．

(組み替え定理)

位数 r の群 G に任意の元 $g \in G$ を書けて得られる集合を

$$G' = Gg = (g_1 g, g_2 g \cdots g_r g) \tag{2.7}$$

すると,G' は集合として G と対等 $G \sim G'$ である．

証明 $G \to G'$ が一意的であることを示せばよい．$g_i g = g_k$ かつ $g_i' g = g_k$ ならば明らかに $g_i = g_i'$(g^{-1} をかければ良い) *q.e.d.*

ただし，一般に

$$\alpha_g(g_1)\alpha_g(g_2) = g_1 g g_2 g \neq \alpha_g(g_1 g_2) \tag{2.8}$$

なので，この写像は群同型写像ではない．

例２：群自己準同型写像の例 ある元 a による**共役変換**と呼ばれる写像 α

$$\alpha : g \to a g a^{-1} \tag{2.9}$$

を考える．共役変換は群自己同型である．

$$\alpha(gg') = agg'a^{-1} = aga^{-1}aga^{-1} = \alpha(g)\alpha(g') \tag{2.10}$$

$$\alpha(g) = \alpha(g') \Rightarrow g = g' \tag{2.11}$$

問題

1. 位数２の群は巡回群 $\mathcal{C}_2$,位数が３の群は巡回群 $\mathcal{C}_3$ に同型であることを証明せよ．(ヒント：問２を参照)

2. 位数４の群を分類せよ．

解答

1. 問 2 の位数 4 の場合と同様に示すことができる．
2. 具体的に積表を作り調べる．積表のうち自明な部分を書くと

$$gg' = \begin{array}{c|cccc} g\backslash g' & e & a & b & c \\ \hline e & e & a & b & c \\ a & a & x & & \\ b & b & & & \\ c & c & & & \end{array} \tag{2.12}$$

と書け x は一意的には定まらない．組み替え定理から，それぞれの行または列に同じ元が現れないことを考慮すると，

- $x = e$ の場合

$$gg' = \begin{array}{c|cccc} g\backslash g' & e & a & b & c \\ \hline e & e & a & b & c \\ a & a & e & c & b \\ b & b & c & e & \\ c & c & b & & e \end{array} \text{または} gg' = \begin{array}{c|cccc} g\backslash g' & e & a & b & c \\ \hline e & e & a & b & c \\ a & a & e & c & b \\ b & b & c & a & \\ c & c & b & & a \end{array} \text{が考えられる．}$$

- $x = b$ の場合

$$gg' = \begin{array}{c|cccc} g\backslash g' & e & a & b & c \\ \hline e & e & a & b & c \\ a & a & b & c & e \\ b & b & c & & \\ c & c & e & & \end{array} \text{すると} gg' = \begin{array}{c|cccc} g\backslash g' & e & a & b & c \\ \hline e & e & a & b & c \\ a & a & b & c & e \\ b & b & c & e & \\ c & c & e & & b \end{array}$$

そこで、最初のものが $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2 (= D_2$ クライン群)．$x = e$ の場合の第 2 の場合及び，$x = b$ の場合と $x = c$ の場合はそれぞれ一意的に決まり，すべて $\mathbb{Z}_4$ に等しい．

2.2　剰余類と共役類

この節せは，群の構造を理解するために必要な概念である剰余類と共役類を導入する．以下では次のような略記法を使う．群 G は集合として $G = \{g_1, g_2, \cdots, g_n\}$($n$ は位数) であるが，これを以下では形式的に和の記号を使って

$$G = g_1 + g_2 + \cdots + g_n = \sum_1^n g_i \tag{2.13}$$

と書く．また，部分群に関しても，$H = h_1 + h_2 + \cdots + h_k \subset G$(位数 k) と書く．この時，Hg は $g \in G$ を H の全ての元にかけた集合

$$Hg = \{h_1 g, h_2 g, \cdots, h_k g\} = h_1 g + h_2 g + \cdots + h_k g \tag{2.14}$$

と定義する．

2.2.1 剰余類 (coset)

剰余類とは，部分群 H と，$g_1 = e$ と必要な数だけの $g_i \notin H,(i > 1)$ を使って群 G を

$$G = \sum_{i=1}^{r} Hg_i = Hg_1 + Hg_2 + \cdots + Hg_r \tag{2.15}$$

のような形で書く時，それぞれの Hg_i を H を**法**とした **(右) 剰余類** $H\backslash G$ という．このような分解に必要となる元 g_i の数 r は剰余類の個数を与え**指数** (index of H) と呼ぶ．

剰余類への分解

G とその部分群 H が与えられれば，G は剰余類に**分解** (coset decomposition) できる．

分解の方法： $g_1 = e$ とする．ある G の元 $g_2 \in G$ でかつ $H = Hg_1$ の元ではない元 $g_2 \notin H$ を選び，Hg_2 を作る．さらに H と Hg_2 のどちらの元でもない G の元 g_3 に関して Hg_3 を作る．同様にして Hg_i ができたら，すでに使った $\{g_i\}$ 以外の $g_{i+1} \notin H$ を取り Hg_{i+1} を作る．この作業を繰り返すことにより G の元を取りつくすことができる．Hg_i の元と H の元が一致することはない $(i \neq 1)$．($hg_i = h'$ ならば $g_i = h'h^{-1}$ なので $g \notin H$ に反する．) 同様に，異なる剰余類の元が一致することはない．

剰余類の性質

1. **左剰余類**もある．$G = \sum Hg_i, G/H = \{aH | a \in G\}$ 右左の呼び方が数学辞典では逆になっている．

2. ラグランジュの定理 (Lagrange's theorem)

$$|G| = |H| \cdot |G/H| \tag{2.16}$$

ただし,$|\cdot|$ は集合としての元の数を表す．つまり

$$G \text{ の位数} = (H \text{ の位数}) \times (G/H \text{ の指数})$$

が成り立つ．

3. 位数が素数の群は巡回群である．e でない元 g_i は，位数が $k \leq \#G = |G|$ の巡回群 $C_k = \langle g_i \rangle$ を生成しそれは G の部分群である．G/H の指数は $|G|/k$ であるが $|G|$ は素数なのでこの指数は 1 になる．

問題

1. 正三角形合同変換群 $\mathcal{C}_{3v}$ は巡回群 $\mathcal{C}_3$ で $\mathcal{C}_{3v} = \mathcal{C}_3 + \mathcal{C}_3\sigma_1$ に分解することを示せ．

2. $\mathcal{C}_3\sigma_1$ と $\mathcal{C}_3\sigma_2$ が同じ集合であることを確認せよ．

2.2.2 共役元と共役類 conjugacy class

群の自然な自己同型写像が共役変換と呼ばれる変換によって与えられる．共役変換でつながる元を集めることで類を考えることができ，群の構造の一面を調べることができる．

共役変換　ある元 $g \in G$ による $a \in G$ の共役変換 $g(a)$ を

$$g(a) = gag^{-1} \tag{2.17}$$

と定義する．共役変換は群同型写像を与える．

共役　一般に群の元 $g_1, g_2 \in G$ の間に，

$$g_1 = gg_2g^{-1} \tag{2.18}$$

となる元 $g \in G$ が存在するとき，g_1 と g_2 は**共役**と呼ばれ

$$g_1 \sim g_2 \tag{2.19}$$

と書く．同様に，部分集合 $H_1, H_2 \subset G$ の間に

$$H_1 = gH_2g^{-1} \tag{2.20}$$

となる元 $g \in G$ が存在するとき H_1 と H_2 は**共役**と呼ばれ

$$H_1 \sim H_2 \tag{2.21}$$

と書く．

共役類　群 G のすべての元による a の共役変換によって得られる集合，つまり共役な元の集合

$$[a] = \{g_1ag_1^{-1}, g_2ag_2^{-1}, \cdots, g_nag_n^{-1}\} \tag{2.22}$$

を a を含む共役類と呼ぶ.

共役類の性質

1. 単位元は，必ず単独で類である．
2. 可換群は，それぞれの元が単独で共役類になる．
3. 群の元を，それぞれの類に分解することができる．これを**類別**と呼ぶ.
4. 類別は共役という同値関係[6]

$$\exists g \ : \ a = gbg^{-1} \ \text{ ならば } \ a \sim b \tag{2.23}$$

を入れ分類したことに相当する．このようにして，群の構造を大雑把に理解することができる．

5. 共役類に類別してできた類の集合を $G/\sim$ と書く.

---

[6]同値関係とは

(a) 反射律　$a \sim a$

(b) 推移律 $a \sim b$ かつ $b \sim c$ ならば $a \sim c$

(c) 対称律 $a \sim b$ ならば $b \sim a$

を満たす関係 $\sim$ のこと.

問題 (共役類の例)　C_{3v} が次のように共役類に分解できることを示せ.

$\mathcal{C}_{3v}$ の類別

$\mathcal{C}_{3v}$ は e,$\{c_3, c_3^{-1}\}$,$\{\sigma_i\}$ に**類別**できる.

証明 $\mathcal{C}_{3v}$ の共役の表:

$$
\text{a の b による共役} \quad bab^{-1} \quad = \quad \begin{array}{c|cccccc}
b\backslash a & e & c_3 & c_3^{-1} & \sigma_1 & \sigma_2 & \sigma_3 \\ \hline
e & e & c_3 & c_3^{-1} & \sigma_1 & \sigma_2 & \sigma_3 \\
c_3 & e & c_3 & c_3^{-1} & \sigma_3 & \sigma_1 & \sigma_2 \\
c_3^{-1} & e & c_3 & c_3^{-1} & \sigma_2 & \sigma_3 & \sigma_1 \\
\sigma_1 & e & c_3^{-1} & c_3 & \sigma_1 & \sigma_3 & \sigma_2 \\
\sigma_2 & e & c_3^{-1} & c_3 & \sigma_3 & \sigma_2 & \sigma_1 \\
\sigma_3 & e & c_3^{-1} & c_3 & \sigma_2 & \sigma_1 & \sigma_3
\end{array} \tag{2.24}
$$

よって，$\mathcal{C}_{3v}$ の共役類は

$$
\text{共役類表} \quad \begin{array}{c|c|c}
\mathbf{C}_1 & \mathbf{C}_2 & \mathbf{C}_3 \\
e & c_3, c_3^{-1} & \sigma_1, \sigma_2, \sigma_3 \\
[e] & [c_3] & [\sigma_1]
\end{array} \tag{2.25}
$$

最後の行のように共役類を代表元を使って表す場合もある.

2.2.3　共役類の代数の性質

1. 形式和 $\mathbf{C}_i = \sum_{g\in\mathbf{C}_i} g$ を類演算子と呼ぶ．共役類は**類演算子**で表すことができる.
   例：$\mathcal{C}_{3v}$ では，$\mathbf{C}_2 = c_3 + c_3^{-1}$, $\mathbf{C}_3 = \sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3$.
2. 類演算子は $g\mathbf{C}_i g^{-1} = \mathbf{C}_i$ を満たす.（これは自明：定義のようなもの）
   例：$\mathcal{C}_{3v}$ では，$\sigma_1\mathbf{C}_2\sigma_1 = \sigma_1 c_3 \sigma_1 + \sigma_1 c_3^{-1}\sigma_1$.
3. 類は群を分解する．$\mathbf{G} = \sum \mathbf{C}_i$.（取りつくし法で証明.）
4. 類はすべての元 $g \in \mathbf{G}$ と可換.（これも定義より $g\mathbf{C}_i = \mathbf{C}_i g$）
5. 類の積は可換．２個の元 a, b の積の順序を変えても同じ類に属する．$ab \sim b(ab)b^{-1} = ba$
6. **類の積**は閉じる.
$$
\mathbf{C}_i\mathbf{C}_j = \sum C_{ij}^k \mathbf{C}_k \tag{2.26}
$$

2.3　剰余類群

剰余類に分解することは一般に群準同型写像を導くことはないが，以下に見るように正規部分群を法にした剰余類への分解は群準同型写像を与える．結果として得られる群は剰余類群と呼ばれ応用範囲も広くさまざまな場面で現れる.

2.3.1 正規部分群または不変部分群

正規部分群 部分群の共役

$$H' = gHg^{-1} \tag{2.27}$$

は部分群である．特に

正規部分群

$\forall g \in G : gHg^{-1} = H$ ならば，H を**正規部分群**と呼ぶ.

正規部分群を法とすると，右剰余類と左剰余類が等しい．なぜならば，関係式

$$\forall g \quad : \quad gH = Hg \tag{2.28}$$

が成り立つからである．さらに，正規部分群を法とする剰余類を考えると，二つの共役類の積は $g_1Hg_2H = g_1g_2HH = g_1g_2H$ なので，再び共役類になる．つまり

剰余類群

正規部分群 H を法とする剰余類は群になる．これを**剰余類群** G/H(coset group) と呼ぶ[a].

[a]単に剰余群とも呼ぶ．ほかにも商群 (quotient group) また因子群と呼ぶこともある.

2.3.2 準同型定理

次に剰余類群に関係する重要な定理を紹介しておく．まず，群 G から G' への準同型写像 ϕ を考える．このとき，

1. 写像 $\phi : G \to G'$ について，ϕ による G の像 $\phi(G)$ を G の像と呼び $Im(\phi) \subset G'$ と書く.

2. 写像 $\phi : G \to G'$ によって、$e \in G'$ に写像される G の元の集合を**核** (Kernel) と呼び $Ker(\phi) \subset G$ と書く.

核に関しては次のことが成り立つ.

核

準同型写像 ϕ の核 $K = Ker(\phi)$ は正規部分群である.

証明 $G \supset K = Ker(\phi)$ のある元 $k \in K$ を持ってくると，

$$\phi(gkg^{-1}) = \phi(g)\phi(k)\phi(g^{-1}) = e \tag{2.29}$$

なので $gkg^{-1} \in K$．$g \in G$ は勝手なので

$$GKG^{-1} = K \text{ つまり } K \text{ は正規部分群} \tag{2.30}$$

この正規部分群 K を法として得られる剰余類群に関して次の定理が成り立つ.

Theorem 準同型定理：

準同型写像 $\phi : G \to G'$ が与えられたとき，$Im(\phi)$ は剰余類群 $G/Ker(\phi)$ と同型である．

証明 $f : G/K \to Im(\phi) \in G' : f(Kg) \equiv \phi(g)$ という写像を考える．ϕ の準同型性より

$$f(Kg_1Kg_2) = \phi(g_1g_2) = \phi(g_1)\phi(g_2) = f(Kg_1)f(Kg_2) \tag{2.31}$$

より f も準同型である．全射であることは定義より明らか．よって同型であることは単射であることを示せばよい．そこで異なる剰余類 Kg_1,Kg_2 がともに f で同じ元に移されたとする．

$$f(Kg_1) = f(Kg_2) \text{ ならば } \phi(g_1) = \phi(g_2) \text{ よって } g_1g_2^{-1} = k \in K \text{ つまり } g_1 = kg_2 \tag{2.32}$$

これは $Kg_1 = Kkg_2 = Kg_2$ を意味するのでよって，g_1, g_2 は同じ類に属し，写像 f は単射である．

問題

1. 巡回群 $\mathcal{C}_3 = (e, c_3, c_3^{-1})$ は $\mathcal{C}_{3v}$ の正規部分群であることを示せ．

2. 写像 $\alpha : \mathcal{C}_{3v} \to \mathcal{C}_2\{e, \tau\}$ を，
$$\alpha : e, c_3, c_3^{-1} \mapsto e \tag{2.33}$$
$$\alpha : \sigma_i \mapsto \tau \tag{2.34}$$
つまり，$(e, c_3c_3^{-1}$ をそれぞれを $e \in \mathcal{C}_2$ に，$\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ のそれぞれを τ に写像する．$)\alpha$ は準同型写像になることを証明せよ．

3. 群 $\mathcal{C}_{3v}$ を正規部分群, 巡回群 $\mathcal{C}_3$ で分解すると
$$\mathcal{C}_{3v} = \mathcal{C}_3(e, c_3, c_3^{-1}) + \mathcal{C}_3\sigma_1(\{\sigma_i\}) \tag{2.35}$$
であることを示せ．このとき，剰余類群 $\mathcal{C}_{3v}/\mathcal{C}_3$ は $\mathcal{C}_2$ に同型になることを示せ．

解答

1. 共役の表より明らか．

2. 準同型の定義 (2.3) を満たすことを示せばよい．

3. 剰余類の積表を作ると
$$\text{積の表} \quad \begin{array}{c|cc} & \mathcal{C}_3 & \mathcal{C}_3\sigma_1 \\ \hline \mathcal{C}_3 & \mathcal{C}_3 & \mathcal{C}_3\sigma_1 \\ \mathcal{C}_3\sigma_1 & \mathcal{C}_3\sigma_1 & \mathcal{C}_3 \end{array} \tag{2.36}$$
となり，$\mathcal{C}_2$ と同型である．

2.4 対称群

◁ ▷

群の表現に関する議論を始める前に，この節では有限群の例として対称群を取り上げ，その構造に関して議論する．実は，全ての有限群は対称群かその部分群に同型であるので，物理的な応用にも非常に有用である．

2.4.1 n 次の対称群または置換群

1から n までの番号のついた席を考え i 番目の席にあったものを p_i 番目に移す置換を

$$\begin{pmatrix} 1 & 2\cdots & n \\ p_1 & p_2\cdots & p_n \end{pmatrix} \tag{2.37}$$

と表す.

２つの置換を連続して行うことを，置換の積と定義する．

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \tag{2.38}$$

一般に

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} 1 & 2\cdots & n \\ q_1 & q_2\cdots & q_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2\cdots & n \\ p_1 & p_2\cdots & p_n \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} p_1 & p_2\cdots & p_n \\ p_{q_1} & p_{q_2}\cdots & p_{q_n} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2\cdots & n \\ p_1 & p_2\cdots & p_n \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 2\cdots & n \\ p_{q_1} & p_{q_2}\cdots & p_{q_n} \end{pmatrix} \end{aligned} \tag{2.39}$$

群であること

1. 積が閉じている：置換の積は置換

$$\begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix} \begin{pmatrix} i \\ p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} i \\ q \end{pmatrix} \tag{2.40}$$

2. 単位元：$e = \begin{pmatrix} i \\ i \end{pmatrix}$

3. 逆元の存在：$\pi = \begin{pmatrix} i \\ p \end{pmatrix}$ ならば $\pi^{-1} = \begin{pmatrix} p \\ i \end{pmatrix}$

4. 結合則

$$(\begin{pmatrix} q \\ r \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix}) \begin{pmatrix} i \\ p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} q \\ r \end{pmatrix} (\begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix} \begin{pmatrix} i \\ p \end{pmatrix}) \tag{2.41}$$

n 個の席の入れ替えの群を n 次の対称群（置換群）と呼び S_n と書く．

例：正三角形の合同変換群 $\mathcal{C}_3v$ を頂点の位置を（１，２，３）と呼んで，それぞれの変換に対応した置換として書くと

$$\begin{aligned} &e = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \quad c_3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} \quad c_3^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} \\ &\sigma_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix} \quad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \quad \sigma_3 == \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} \end{aligned} \tag{2.42}$$

と表すことができるので，$\mathcal{C}_3v$ と S_3 は同型である．

2.4.2 交代群

1. **巡回**:$(1,2,5)=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 2 & 5 & 1 \end{pmatrix}$ で他は動かさないとする．
2. 任意の置換は巡回の積に分解できる．
$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 5 & 4 & 3 & 1 \end{pmatrix} = (1,2,5)(3,4) \tag{2.43}$$
3. **互換**：二つの席の入れ替え．$(2,4)$ など

   Theorem ：任意の置換は互換の積に分解できる．
$$(1,2,5)=(1,2)(2,5)=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 2 & 1 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 1 & 5 & 2 \end{pmatrix} \tag{2.44}$$
$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 5 & 4 & 3 & 1 \end{pmatrix} = (1,2,5)(3,4) = (1,2)(2,5)(3,4) \tag{2.45}$$
4. 互換への分解は一意的ではないが，互換の数が偶数か奇数かはそれぞれの置換に固有である．それぞれを，**偶置換**及び**奇置換**とよぶ．
5. 偶置換は対称群 S_n の正規部分群である．偶置換の集合 A_n を**交代群**と呼ぶ

   Theorem ：交代群により，対称群の剰余類分解
$$S_n = A_n + (1,2)A_n \tag{2.46}$$
   ができる．

2.4.3 ケーリー Cayley の定理

Theorem *Cayley* の定理：任意の有限群は対称群かその部分群に同型である．
 証明 有限群 G が与えられたとして，その元を $g_1, ...g_n$ とする．すると，任意の元 $g \in G$ は新しい集合 $gg_1, ...gg_n$ を与えるが，組み換え定理によりこれは全ての G の元を網羅する．よって，g に置換
$$\pi_g = \begin{pmatrix} g_1 & \cdots & g_n \\ gg_1 & \cdots & gg_n \end{pmatrix} \tag{2.47}$$
を対応させることができる．さらに，$\pi_a \pi_b = \pi_{ab}$ なので群同型になっている．

2.4.4 対称群の共役類

対称群の共役の性質と共役類

1. 巡回の長さは共役変換で変わらない．たとえば
$$(1,5)(1,2,3)(1,5) = (5,2,3) \tag{2.48}$$
   のように，互換で巡回の長さは変わらない．さらに任意の置換は互換の積でかけるので，よって共役変換で巡回の長さは変わらない．

2. 対称群の共役類は巡回で分解したときの長さの組み合わせで指定される．つまり S_n の共役類は n の**分割** (partition) で決まる．

   ただし，n の分割とは，正整数 λ_i の組 $[\lambda_1, \cdots, \lambda_k]$ で $\sum_i \lambda_i = n$ となるもの．

例 ：S_5 に関して，分割 $[2, 3]$ に対応した共役類は

$$[(1, 2)(3, 4, 5)] \tag{2.49}$$

である．

3. 分割の中の数字は上記のように conjugation で変換できるので，同じ分割の置換は同じ共役類に属することが分かる．またこのことから，置換群 $\mathbf{S}_n$ の共役類の数 $p(n)$ は，n の分割数に等しい．