第I部
場の理論

1 場とは何か

1.1 Notation について

単位は自然単位系をとり $c = \hbar = 1$ とする．よって，４元の座標ベクトルは

$$\{x^\mu\} = (t, \mathbf{x}) = (x^0, x^1, x^2, x^3) \tag{1.1}$$

である．空間ベクトルはボールドで表す．計量テンソルは signature を $\eta_{\mu\nu} = (-+++)$ とし世界線素は

$$ds^2 = -(dx^0)^2 + (d\mathbf{x})^2 = \eta_{\mu\nu}dx^\mu dx^\nu \tag{1.2}$$

とする．上付きの計量テンソルは $\eta^{\mu\nu}\eta_{\nu\lambda} = \delta^\mu_\lambda$ を満たす．ただし，繰り返す添え字は断らない限り和をとるとする．４元ベクトルの内積は

$$(v, w) = \eta_{\mu\nu}v^\mu w^\nu = v_\nu w^\nu = v \cdot w \tag{1.3}$$

となる．このように計量を使って足の上げ下げを自然に行うことができる．微分は

$$\partial_\mu = \frac{\partial}{\partial x^\mu} = (\frac{\partial}{\partial t}, \nabla) \tag{1.4}$$

と表記する．

1.2 場とは何か：場の種類

まず，場の量子化を行う前に，古典的な場の概念について説明しておく．場とは一般に空間の各点で値の指定された物理量のことである．例えば，教室の部屋のそれぞれの席での温度を考えればよい．つまり，教室内のある点 (x, y, z) での温度 $T(x, y, z)$ を考える．この $T(x, y, z)$ は温度の場ということができる．また，物質場や波動関数なども場で一般には時間に依った場ということになる．また，電磁場 $\mathbf{E}$ のように空間の各点でベクトルを指定する場もある．

場の量子論では場の種類は，一般に各点に定義されている量の空間の回転の下での変換性，またはローレンツ変換の下での変換性によって分類される．いま時空間 M の一点 P を座標 x^μ で与えると[1]，それぞれ以下のような場が考えられる．

[1] x^μ は $x^0 = t, x^1 = x, x^2 = y, x^3 = z$ を表す．この授業では，ギリシャ文字 $\mu, \nu ...$ を次元の添え字 $0, 1, 2, 3$ に使い，i, j, k は空間ベクトルの成分 $1, 2, 3$ を表す時に使う．

1. （実）スカラー場 φ：各点にある実数量を与える場．(π^0 など実中間子：ボソン)

$$\varphi \ : \ M \ni x^\mu \ \longrightarrow \ \varphi(x) \in \mathbb{R} \tag{1.5}$$

2. 複素スカラー場 ϕ：各点にある複素数を与える場．($K^\pm$ など荷電中間子：ボソン)

$$\phi \ : \ M \ni x^\mu \ \longrightarrow \ \phi(x) = \varphi_1(x) + i\varphi_2(x) \in \mathbb{C} \tag{1.6}$$

3. ベクトル場 A^μ：各点にあるベクトルまたはローレンツベクトルを与える場．(フォトンなどゲージ場：ボソン)

$$A^\mu \ : \ M \ni x^\mu \ \longrightarrow \ A^\mu(x) \in \mathbb{R}^4 \tag{1.7}$$

4. テンソル場 $F_{\mu\nu}$：各点にあるテンソルまたはローレンツテンソルを与える場．(電磁場，重力場など)

$$A^\mu \ : \ M \ni x^\mu \ \longrightarrow \ A^\mu(x) \in \mathbb{R}^4 \tag{1.8}$$

5. スピノル場 $\xi, \bar{\eta}$：各点に２成分スピノルが定義されている．(ニュートリノ?: フェルミオン)

$$\xi_\alpha \ : \ M \ni x^\mu \ \longrightarrow \ \xi_\alpha(x) \in \mathbb{C}^2 \tag{1.9}$$

$$\bar{\eta}_{\dot{\alpha}} \ : \ M \ni x^\mu \ \longrightarrow \ \bar{\eta}_{\dot{\alpha}}(x) \in \mathbb{C}^2 \tag{1.10}$$

6. ディラック場 ψ，マヨラナ場（フェルミオン)：ディラック場は２個の２成分スピノル：$\psi = (\xi_\alpha, \bar{\eta}^{\dot{\alpha}})$(電子，クォーク $\cdots$ 基本粒子)

$$\psi \ : \ M \ni x^\mu \ \longrightarrow \ \psi(x) \in \mathbb{C}^4 \tag{1.11}$$

マヨラナ場は，実４成分スピノル．(ニュートリノ？)

$$\psi \ : \ M \ni x^\mu \ \longrightarrow \ \psi(x) \in \mathbb{R}^4 \tag{1.12}$$

7. そのほか，重力場（対称テンソル場），etc.

2　場の作用と変分原理

2.1　作用と場の方程式

場の理論を展開するには，変分原理によって理論を定式化するのが簡単である．作用がローレンツ変換の下で不変であれば，最小作用の原理によってもとまる運動方程式もローレンツ変換に関して共変になることが保証されるからである．

それぞれの場の満たすべき運動方程式は，古典力学と同様に場の作用を与えることによって，変分原理から求めることができる．以下では，簡単な場のラグランジアンの例を考える．

2.2 スカラー場の作用とクライン・ゴルドン方程式

相対論的に不変な場の方程式は，質量 m の粒子に成り立つ相対論的関係式

$$p^\mu p_\mu + m^2 = -E^2 + \mathbf{p}^2 + m^2 = 0 \tag{2.13}$$

に，量子論的置き換え $p^\mu = -i\eta^{\mu\nu}\partial_\nu$ をすれば良い．得られる方程式[2]は

$$(-\partial^2 + m^2)\psi = [(\frac{\partial}{\partial x^0})^2 - \nabla^2 + m^2)]\psi = 0 \tag{2.14}$$

この方程式を**クライン・ゴルドン方程式**と呼ぶ.

以下で場の解析力学に相当するものを議論するのだが，まず最初に，実スカラー場の作用を導入し，クライン・ゴルドン方程式を作用から運動方程式として導き，場の変分原理とはどのようなものかを見てみよう.

実スカラー場 φ の作用は，場の 2 次微分までを仮定しラグランジアン密度がローレンツスカラーになることを考慮すると，一般に

$$S = \int dx^4 \frac{1}{2}[(\frac{\partial\varphi}{\partial t})^2 - (\nabla\varphi)^2 - m^2\varphi^2)] \tag{2.15}$$

である．ここで，m は後で分かるように質量を表すパラメータで，自然単位系では長さ（コンプトン波長）の逆数の次元を持つ量である[3]．ローレンツ計量を使って

$$S = \int dx^4 \frac{1}{2}(-\partial_\mu\varphi\partial^\mu\varphi - m^2\varphi^2) \qquad \left[= \int dx^4 \frac{1}{2}(\partial_\mu\varphi\partial^\mu\varphi - m^2\varphi^2)\right]_{P-S} \tag{2.16}$$

と書くことができる[4]．場の作用 S は，場の量 φ が変数と考えられるので，必要に応じて $S[\varphi]$ または $S[\varphi(\cdot)]$ と書く.

運動方程式は，φ に関する変分をとることで求まる．より一般的な定義をする前に，まずスカラー場の場合にどのような計算かを見てみよう.

場の量の変分は，

$$\varphi(x) \quad \longrightarrow \quad \varphi'(x) = \varphi(x) + \delta\varphi(x) \tag{2.17}$$

で定義される．ここで，$\delta\varphi(x)$ は $Max|\delta\varphi(x)| < \epsilon$ とする．さらに運動方程式を求めるためには，境界（今の場合無限遠点）で

$$\delta\varphi(x) = 0 \tag{2.18}$$

[2]これは，相対論的シュレディンガー方程式と考えられ，物質場の方程式として最初に考えられるものである．しかし，この方程式の解を単純に波動関数として解釈しようとすると負のエネルギー解が存在し理論は破綻してしまう．場の量子論では，量子化の手続きによってこのような問題は起きない.

[3]作用 S は $\hbar$ と同じ次元を持つのだが，自然単位系では $\hbar = 1$ なので無次元になる．そこで場の次元は積分が長さの次元 4 一方微分が -2 なので，第一項目 (Kinetic term) から φ の次元は -1 になる．するとパラメータ m の次元も -1 となり質量と同じ次元を持つことがわかる.

[4]P-S は Peskin-Schroeder の対応する式.

とする．すると

$$\begin{aligned}\delta S &= S[\varphi+\delta\varphi]-S[\varphi] \\ &= \int dx^4(-\partial_\mu\varphi\partial^\mu\delta\varphi - m^2\varphi\delta\varphi) = \int dx^4(\partial^2\varphi - m^2\varphi)\delta\varphi \end{aligned} \tag{2.19}$$

となる．最小作用の原理は，任意の変分に関して $\delta S=0$ を要請するので運動方程式として

$$\boxed{(\partial^2 - m^2)\varphi = -\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2} + \Delta\varphi - m^2\varphi = 0 \qquad (2.20)}$$

を得る．このようにしてクライン・ゴルドン方程式を運動方程式として得ることができたので，実スカラー場の作用が正しい作用であることが分かる．

　この実スカラー場の物理的な意味を考えてみよう．最初に議論したように，量子化条件で対応する式は

$$(E^2 - \vec{p}^2 - m^2)\varphi = 0 \tag{2.21}$$

となり，粒子のエネルギーと運動量のローレンツ不変な関係を満たす関係式がクライン・ゴルドン方程式の物理的意味と考えられる．つまり，作用に現れるパラメータ m はこの場の表す粒子の不変質量である．クライン・ゴルドン方程式は $m=0$ のときは，波動方程式になる．

　また，作用を

$$S = \int dt\mathcal{L} \tag{2.22}$$

$$\mathcal{L} = \int dx^3[\frac{1}{2}\dot{\varphi}^2 - \frac{1}{2}((\nabla\varphi)^2 + m^2\varphi^2) \tag{2.23}$$

と見ると，各点の物理量 $\varphi(\mathbf{x})$ の（運動エネルギー $-$ ポテンシャルエネルギー）の形をしていると読み取れる．さらに，重りの質量が 1 の調和振動子のラグランジアン

$$L = \frac{1}{2}\dot{q}^2 - \frac{1}{2}kq^2 \tag{2.24}$$

と比べると，φ は m^2 がばね乗数 k の調和振動子と思うことができる．この時，$\nabla\varphi$ の項は，隣の $\varphi(\mathbf{x}+\Delta\mathbf{x})$ の場の量とばねでつながれているために生じるポテンシャルエネルギーと思うことができる．

問題：1 振り子を 1 直線状にならべ，隣り合う振り子をばねでつないだ連成振動を考える．微小震動の方程式を考え，振り子のおもりの間隔を線密度を一定に保ったままどんどん小さくしていくと，2 次元のクライン・ゴルドン方程式になることを示せ．ただし，各点での振り子の振れ角を $\phi(x)$ とする．

2.3 ベクトル場の作用

電磁場は，ベクトル場の理論の一つとして捉えることができる．つまり，ベクトルポテンシャル A_μ が基本的な場と思い場の作用を考える．運動方程式としてマクスウェルの方程式を導くような作用は次の場の強さ (Field Strength) を使って求めることができる．

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu \tag{2.25}$$

作用として，ローレンツ不変で場 A_μ の 2 次までの微分を含む

$$S = -\frac{1}{4\mu_0}\int d^4x F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} \tag{2.26}$$

が正しいことが分かる．場 A_μ について変分を取ると

$$\begin{aligned}
\delta S[A] &= S[A+\delta A] - S[A] \\
&= -\frac{1}{2\mu_0}\int d^4x F_{\mu\nu}\delta F^{\mu\nu} \\
&= -\frac{1}{2\mu_0}\int F^{\mu\nu}(\partial_\mu \delta A_\nu - \partial_\nu \delta A_\mu) \\
&= -\frac{1}{\mu_0}\int d^4x F_{\mu\nu}\partial^\mu \delta A^\nu \\
&= \frac{1}{\mu_0}\int d^4x \partial^\mu F_{\mu\nu}\delta A^\nu
\end{aligned} \tag{2.27}$$

を得る．これは，真空中の場の運動方程式が

$$\partial^\mu F_{\mu\nu} = 0 \tag{2.28}$$

であることを意味する．

マックスウェルの方程式を再現するためには，電荷をとの相互作用を見る必要があるがこれは

$$S = \int d^4x(-\frac{1}{4\mu_0}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + A_\mu j^\mu) \tag{2.29}$$

を考えると良い．

このとき，A_μ の変分によって得られる方程式は

$$\partial^\mu F_{\mu\nu} + \mu_0 j_\nu = 0 \tag{2.30}$$

である．ただし，この方程式はマクスウェルの方程式のうちの電流と電荷を含む 2 式しか導かない．残りの 2 式は

$$\partial_\rho F_{\mu\nu} + \partial_\mu F_{\nu\rho} + \partial_\nu F_{\rho\mu} = 0 \tag{2.31}$$

という関係式から出る．この関係式をビアンキ恒等式と呼ぶ．

このようにして，ベクトル場の理論がちょうど Maxwell の方程式に一致する．このことより逆に，作用に現れる j_μ を電流で A_μ を電磁場のベクトルポテンシャルと考えることが正当化される．

実際,

$$(F_{\mu\nu}) = \begin{pmatrix} 0 & -E_x/c & -E_y/c & -E_z/c \\ E_x/c & 0 & B_z & -B_y \\ E_y/c & -B_z & 0 & B_x \\ E_z/c & B_y & -B_x & 0 \end{pmatrix} \tag{2.32}$$

とすると，よく知られたマックスウェル方程式を求めることができる．また作用は

$$S_A = \frac{1}{2\mu_0}\int d^4x(\frac{\vec{E}^2}{c^2} - \vec{B}^2) \tag{2.33}$$

で，ベクトルポテンシャルを基準に考えると時間微分を含む項が電場 $\vec{E}$ のみにあることを考えると，やはり $T-V$ の形をしていることがわかる．

2.3.1 ヘビサイド・ローレンツ単位系について

◁ ▷

電磁気の授業ではいわゆる SI 単位系という単位系を使用することが多い．この単位系では，誘電率 ϵ_0 や透磁率 μ_0 などがマクスウェル方程式に現れるが，電磁気学の本質的な定数は光速 c のみで，うまく単位系を取ってやるともっと単純になることが知られいる．そのような単位系はヘビサイド・ローレンツ単位系（Heviside-Lorentz）と呼ばれ，場の理論においてはこの単位系を採用することが多く，この授業においてもこの単位系に従う．

ヘビサイド・ローレンツ単位系の式は，SI の式に次の置き換えをすることで得ることができる．

置き換えリスト

SI 単位系の式で以下の置き換えをする．

1. $\sqrt{\epsilon_0\mu_0} \to 1/c$
2. $\mathbf{E}, \mathbf{D} \to \frac{\mathbf{E}}{\sqrt{\epsilon_0}}, \sqrt{\epsilon_0}\mathbf{D}$
3. $\rho, \mathbf{J}, I, \mathbf{P} \to \sqrt{\epsilon_0}(\rho, \mathbf{J}, I, \mathbf{P})$
4. $\mathbf{B}, \mathbf{H} \to \sqrt{\mu_0}\mathbf{B}, \frac{\mathbf{H}}{\sqrt{\epsilon_0}}$

その結果，それぞれの関係式がヘビサイド・ローレンツ単位系で得ることができる．

SI と HL 単位系それぞれでの関係式 具体的にそれぞれの式を HL 単位系で与えておく.

1. 電流の保存 (Current conservation):これは,共通である.

$$\frac{\partial\rho}{\partial t}+\vec{\nabla}\cdot\vec{j}=0 \tag{2.34}$$

2. クーロンの法則 (Coulon's law):

$$\mathbf{F}=\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{QQ'}{r^2} \quad\Longrightarrow\quad \mathbf{F}=\frac{1}{4\pi}\frac{QQ'}{r^2} \tag{2.35}$$

$$\nabla\mathbf{E}=\rho/\epsilon_0 \quad\Longrightarrow\quad \nabla\mathbf{E}=\rho \tag{2.36}$$

$$\mathbf{D}=\epsilon_0\mathbf{E} \quad\Longrightarrow\quad \mathbf{D}=\mathbf{E} \tag{2.37}$$

3. アンペールの法則と誘導電流 (Ampere and induced current):

$$\nabla\times\mathbf{B}=\mu_0\mathbf{J}+\mu_0\epsilon_0\frac{\partial\mathbf{E}}{\partial t} \quad\Longrightarrow\quad \nabla\times\mathbf{B}=\frac{1}{c}\mathbf{J}+\frac{\partial\mathbf{E}}{c\partial t} \tag{2.38}$$

$$\mathbf{B}=\mu_0\mathbf{H} \quad\Longrightarrow\quad \mathbf{B}=\mathbf{H} \tag{2.39}$$

4. ファラデーの法則 (Faraday's law):

$$\nabla\times\mathbf{E}+\frac{\partial\mathbf{B}}{\partial t}=0 \quad\Longrightarrow\quad \nabla\times\mathbf{E}+\frac{\partial\mathbf{B}}{c\partial t} \tag{2.40}$$

5. ローレンツ力 (Lorentz force):

$$\mathbf{E}+\mathbf{v}\times\mathbf{B} \quad\Longrightarrow\quad \mathbf{E}+\frac{\mathbf{v}}{c}\times\mathbf{B} \tag{2.41}$$

6. 相対論的表示 (Relativistic form)

   4 元電流ベクトル (current 4 vector) は

$$j^\mu=(c\rho,\mathbf{j}) \tag{2.42}$$

   ポテンシャル (Potential) は

$$\mathbf{E}=-\nabla\phi-\dot{\mathbf{A}}, \quad\Longrightarrow\quad \mathbf{E}=-\nabla\phi-\frac{1}{c}\dot{\mathbf{A}} \tag{2.43}$$

$$\mathbf{B}=\nabla\times\mathbf{A} \tag{2.44}$$

   四元ポテンシャル (4-potential) は

$$A^\mu=(\frac{\phi}{c},\mathbf{A}) \quad\Longrightarrow\quad A^\mu=(\phi,\mathbf{A}) \tag{2.45}$$

場の強さ (field strength) は

$$\partial_{[\mu}A_{\nu]} = F_{\mu\nu} \tag{2.46}$$

それぞれの成分を具体的に書くと

$$F_{i0} = -\partial_i \frac{\phi}{c} - \partial_0 A_i = \frac{E_i}{c} \quad \Longrightarrow \quad F_{i0} = -\partial_i \phi - \partial_0 A_i = E_i \tag{2.47}$$

$$F_{ij} = \partial_i A_j - \partial_j A_i = B_k \tag{2.48}$$

である．

7. マクスウェル方程式 (Maxwell equation) は

$$\partial^\mu F_{\mu\nu} = -\mu_0 j_\nu \quad \Longrightarrow \quad \partial^\mu F_{\mu\nu} = -\frac{1}{c} j_\nu \tag{2.49}$$

とビアンキ恒等式 (Bianchi identity)

$$\partial_{[\mu}F_{\nu\rho]} = 0 \tag{2.50}$$

で与えられる．

8. 電磁場のエネルギー密度 (energy density) は

$$u = \frac{1}{2}(\epsilon_0 \mathbf{E}^2 + \frac{1}{\mu_0}\mathbf{B}^2) \quad \Longrightarrow \quad u = \frac{1}{2}(\mathbf{E}^2 + \mathbf{B}^2) \tag{2.51}$$

9. 電磁場のラグランジアン密度は (lagrangian density) は

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} + \frac{1}{c} j_\mu A^\mu \tag{2.52}$$

で与えられる．

問題：2

1. $F_{\mu\nu}$ は場の強さでベクトルポテンシャルを使って

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu \tag{2.53}$$

と書けている．電磁場との関係が eq.(2.32)($c = 1$) で与えられることを示せ．

2. フォトンの運動方程式，真空中のマックスウェル方程式のどの方程式が次のラグランジアン密度から導けるか示せ．

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4} F^{\mu\nu} F_{\mu\nu} \tag{2.54}$$