4 Dirac 場とフェルミオン

◁ ▷

電子の満たす相対論的な場の方程式はディラック方程式と呼ばれる．ディラック方程式は基本的にクライン・ゴルドン方程式の因数分解として直感的に導くことができる．歴史的な導出の過程とは異なるが，この直感的な方法でディラック方程式を簡単に導いておく．

クライン・ゴルドン方程式の因数分解になるような一階の微分方程式への分解は，もちろん通常の因数分解で得られるものではない．しかし，行列まで許して考えると可能である．そこで，ガンマ行列と呼ばれる４個の 4×4 の行列 γ^μ を導入し，

$$p^\mu p_\mu + m^2 = (-p_\mu\gamma^\mu + m)(p_\nu\gamma^\nu + m) \tag{4.1}$$

のように因数分解することを考えてみよう．右辺の γ は行列なので積が可換でないことに注意して展開すると

$$\begin{aligned} \text{右辺} &= -p_\mu p_\nu\gamma^\mu\gamma^\nu - p_\mu\gamma^\mu m + m p_\nu\gamma^\nu + m^2 \\ &= -\frac{1}{2}p_\mu p_\nu\{\gamma^\mu,\gamma^\nu\} + m^2 \end{aligned} \tag{4.2}$$

となる．ここで，p の１次の項は m が単なる数なのでキャンセルする．p の２次の項は，p_μ が互いに交換できるので γ^μ の対称積の部分だけが残る．$\{\cdot,\cdot\}$ は反交換子[9]を表す括弧で対称部分を取り出す．この式が左辺と等しくなるためには

γ 行列

$$\{\gamma^\mu,\gamma^\nu\} = -2\eta^{\mu\nu} \tag{4.3}$$

が成り立てばよい．すると，

$$(-p_\mu\gamma^\mu + m)(p_\nu\gamma^\nu + m) = \eta^{\mu\nu}p_\mu p_\nu + m^2 \tag{4.4}$$

となり，右辺はクライン・ゴルドン方程式に他ならない．そこで

$$(-i\gamma^\mu\partial_\mu + m)\psi = 0 \tag{4.5}$$

をディラック方程式と呼び，この方程式に従う場 ψ をディラック場と呼ぶ．注意してほしいのは，ガンマ行列が 4×4 の行列なので２項目の質量 m にも 4×4 の単位行列がかかっていて，ディラック場は４成分の縦ベクトルになっていることである．

このように形式的に因数分解できたのだが，ここで疑問になることは

1. この式は共変なのか？

[9] $\{\gamma^\mu,\gamma^\nu\} = \gamma^\mu\gamma^\nu + \gamma^\nu\gamma^\mu$

2. 4 成分の意味は？

3. 量子化はどうするのか？

などであるが，以下でこのことを説明する．

4.1 Lorentz 変換とスピノル表現

場の理論においては，場の量はローレンツ変換に関する変換性で分類されることはすでに述べた．この節では，ディラック場はこのローレンツ群のスピノル表現として導入される．

4 元ベクトル，$v^\mu = (v^0, \vec{v})$ に関する Lorentz 変換

$$v^\mu \to v'^\mu = \Lambda^\mu{}_\nu v^\nu \tag{4.6}$$

は内積 (v, w) を不変にする変換として，特徴づけることができる．w^μ も同じ変換を受けるので，内積は

$$(v, w)' = \eta_{\mu\nu} v'^\mu w'^\nu = \eta_{\mu\nu} \Lambda^\mu{}_\sigma \Lambda^\nu{}_\lambda v^\sigma w^\lambda \tag{4.7}$$

よって，内積の不変性は

$$\eta_{\mu\nu} \Lambda^\mu{}_\sigma \Lambda^\nu{}_\lambda = \eta_{\sigma\lambda} \tag{4.8}$$

を要請する．これが，Lorentz 変換を特徴付ける式であり，Lorentz 群 $O(3,1)$ を定義する[10]．

4.1.1 Lorentz ブーストと Lorentz 代数

Lorentz 変換は，Lorentz facter を $\gamma = 1/\sqrt{1-\beta^2}$ として，S' 系を β^k でブーストしたと見ると，一般に S 系で見ているベクトルの変換は

$$\begin{aligned} v'^0 &= \gamma(v^0 + \beta^k v^k) \Rightarrow v'^0 = v^0 + \vec{\beta}\cdot\vec{v} \\ v'^k &= \gamma(v^k + \beta^k v^0) \Rightarrow \vec{v}' = \vec{v} + \vec{\beta} v^0 \end{aligned} \tag{4.9}$$

で与えられる．ただし，$\Rightarrow$ は，$\|\beta\| \ll 1$ の極限を意味する．無限小変換は

$$(\Lambda^\mu{}_\nu)^\epsilon = 1 + \begin{pmatrix} 0 & \vec{\beta}^t \\ \vec{\beta} & 0 \end{pmatrix} = 1 - i\beta^k K_k = \delta^\mu_\nu - i\frac{1}{2}(\omega^{\rho\sigma} M_{\rho\sigma}{}^\mu{}_\nu) \tag{4.10}$$

[10] $O(3,1)$ と $SO(3,1)$ との違いは，P,T 変換を含むか含まないかの違い．

ただし

$$K_1 = i\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad K_2 = i\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad K_3 = i\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{4.11}$$

４元ベクトルの無限小回転は，上と同じ基底で次のようになる：

$$L_1 = i\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad L_2 = i\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad L_3 = i\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{4.12}$$

ローレンツ代数

ローレンツ群の生成元は，角運動量 L_k とブースト K_k で与えられ次の交換関係を満たす．

$$[L_i, L_j] = i\epsilon_{ijk}L_k \tag{4.13}$$

$$[K_i, K_j] = -i\epsilon_{ijk}L_k \tag{4.14}$$

$$[L_i, K_j] = i\epsilon_{ijk}K_k \tag{4.15}$$

ただし，

$$L_k = \begin{pmatrix} 0 & \vec{0}^t \\ \vec{0} & L_k^{(3)} \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\epsilon_{kij}M_{ij} \tag{4.16}$$

$$K_k = i\begin{pmatrix} 0 & \vec{e}_k^t \\ \vec{e}_k & 0 \end{pmatrix} = \hat{M}_{k0} = -M_{0k} \tag{4.17}$$

である．

ここに挙げた $M_{\mu\nu}$ は M_{ij} が回転，M_{0i} がブーストに対応するようなローレンツ群を回転群の一つと見たときの一般的な表示で，

$$(\Lambda^\mu{}_\nu)^\epsilon v^\nu = v^\mu - i\frac{1}{2}(\omega^{\rho\sigma}M_{\rho\sigma}{}^\mu{}_\nu)v^\nu \tag{4.18}$$

で定義される．対応した有限変換は

$$\Lambda = e^{-i\frac{1}{2}\omega^{\mu\nu}M_{\mu\nu}} = e^{-i(\theta^i L_i + \beta^i K_i)} \tag{4.19}$$

である．

生成元 $M_{\sigma\rho}$ は，一般の回転群の生成元と同様に[11]

$$M_{\rho\sigma}{}^\mu{}_\nu = -i\delta^\mu_{[\rho}\eta_{\sigma]\nu} \tag{4.20}$$

[11] ここで $\eta^{\mu\nu}$ を通常のユークリッド空間の計量に取れば n 次元回転の生成元の定義になっている．

と書ける．4 元ベクトル v の無限小変換は，

$$\delta v^\mu = \frac{1}{2}\omega^{\rho\sigma} M_{\rho\sigma}{}^{\mu}{}_{\nu} v^\nu = -i\frac{1}{2}\omega^{\rho\sigma}\delta^\mu_{[\rho}\eta_{\sigma]\nu}v^\nu = -i\omega^{\rho\sigma}\delta^\mu_\rho\eta_{\sigma\nu}v^\nu = -i\omega^{\mu\sigma}v_\sigma \tag{4.21}$$

となる．ここで，この表示における変換のパラメータ $\omega^{\mu\nu}$ のブースト変換および回転のパラメターとの関係は

$$\omega^{k0} = \beta^k = -\omega^{0k} \quad , \quad \omega^{ij} = \epsilon^{ijk}\theta_k \tag{4.22}$$

である．この記号を使うと K_i, L_i の満たす交換関係は次のようにまとまることが分かる．[12]

ローレンツ代数 (2)

$$[\hat{M}_{\rho\sigma}, \hat{M}_{\rho'\sigma'}] = -i(\eta_{\rho[\rho'}\hat{M}_{\sigma']\sigma} - \eta_{\sigma[\rho'}\hat{M}_{\sigma']\rho}) \tag{4.24}$$

ただし，添え字の $[\cdot,\cdot]$ は反対称化の記号である[a]．

[a] $A_{[\mu}B_{\nu]} = A_\mu B_\nu - A_\nu B_\mu$.

問題：この関係が成り立つことを M の定義を使って証明せよ．

Proof :

$$\begin{aligned}
[M_{\rho\sigma}, M_{\rho'\sigma'}] &= -(\delta^\mu_{[\rho}\eta_{\sigma]\lambda}\delta^\lambda_{[\rho'}\eta_{\sigma']\nu} - \delta^\mu_{[\rho'}\eta_{\sigma']\lambda}\delta^\lambda_{[\rho}\eta_{\sigma]\nu}) \\
&= -(\delta^\mu_{[\rho}\eta_{\sigma][\rho'}\eta_{\sigma']\nu} - \delta^\mu_{[\rho'}\eta_{\sigma'][\rho}\eta_{\sigma]\nu}) \\
&= -(\delta^\mu_{\rho}\eta_{\sigma\rho'}\eta_{\sigma'\nu} - \delta^\mu_{\rho'}\eta_{\sigma'\rho}\eta_{\sigma\nu} \\
&\quad -\delta^\mu_{\sigma}\eta_{\rho\rho'}\eta_{\sigma'\nu} + \delta^\mu_{\sigma'}\eta_{\rho'\rho}\eta_{\sigma\nu} \\
&\quad -\delta^\mu_{\rho}\eta_{\sigma\sigma'}\eta_{\rho'\nu} + \delta^\mu_{\rho'}\eta_{\sigma'\sigma}\eta_{\rho\nu} \\
&\quad +\delta^\mu_{\sigma}\eta_{\rho\sigma'}\eta_{\rho'\nu} - \delta^\mu_{\sigma'}\eta_{\rho'\sigma}\eta_{\rho\nu}) \\
&= -i(\eta_{\sigma\rho'}M_{\rho\sigma'}{}^{\mu}{}_{\nu} - \underbrace{\delta^\mu_{\rho'}\eta_{\sigma'\rho}\eta_{\sigma\nu}}_{\Leftarrow IV} \\
&\quad -\eta_{\rho\rho'}M_{\sigma\sigma'}{}^{\mu}{}_{\nu} + \underbrace{\delta^\mu_{\sigma'}\eta_{\rho'\rho}\eta_{\sigma\nu}}_{\Leftarrow II} \\
&\quad -\eta_{\sigma\sigma'}M_{\rho\rho'}{}^{\mu}{}_{\nu} + \underbrace{\delta^\mu_{\rho'}\eta_{\sigma'\sigma}\eta_{\rho\nu}}_{\Leftarrow III} \\
&\quad +\eta_{\rho\sigma'}M_{\sigma\rho'}{}^{\mu}_{\nu} - \underbrace{\delta^\mu_{\sigma'}\eta_{\rho'\sigma}\eta_{\rho\nu}}_{\Leftarrow I}) \\
&= -i(\eta_{\rho[\rho'}M_{\sigma']\sigma}{}^{\mu}{}_{\nu} - \eta_{\sigma[\rho'}M_{\sigma']\rho}{}^{\mu}{}_{\nu})
\end{aligned} \tag{4.25}$$

下に括弧のついた部分はその項が何番目の M に吸収されたかを示している．これから，Lorentz 群の生成元の交換関係として

$$[\hat{M}_{\rho\sigma}, \hat{M}_{\rho'\sigma'}] = -i(\eta_{\rho[\rho'}\hat{M}_{\sigma']\sigma} - \eta_{\sigma[\rho'}\hat{M}_{\sigma']\rho}) \tag{4.26}$$

[12] M の定義には，符号の取り方の任意性があるがここでは

$$[\hat{M}_{\rho\sigma}, \hat{M}_{\rho'\sigma'}] = i(\eta_{\rho[\rho'}\hat{M}_{\sigma\sigma']} - \eta_{\sigma[\rho'}\hat{M}_{\rho\sigma']}) \tag{4.23}$$

のように，足の並びが自然になるようにとった時 $+i$ になるようにとった．これが，M の定義に $-i$ の現れる原因になっている．

を得る． *q.e.d.*

4.1.2 Clifford 代数とスピン表現

ディラック場は，ローレンツ群のスピン表現の場として特徴付けられる．一般に d 次元回転群のスピン表現を作るには次の反交換関係をもった，ガンマ行列と呼ばれる d 個の行列を導入する．

$$\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} = -2\eta^{\mu\nu} \tag{4.27}$$

ここで，$\eta^{\mu\nu}$ は計量テンソル．このような関係の入った γ^μ の作る代数を Clifford 代数と呼び，$2^{[\frac{d}{2}]} \times 2^{[\frac{d}{2}]}$ 行列になる[13]．Clifford 代数の具体的な表現行列に関しては後で議論するが，以下ローレンツ回転を考えるときは，

$$(\gamma^0)^\dagger = \gamma^0, (\gamma^k)^\dagger = -\gamma^k \tag{4.28}$$

を満たすことを要請する．ただし k はベクトルの空間成分を表す．

すると，

$$\Sigma_{\mu\nu} = \frac{1}{4i}[\gamma_\mu, \gamma_\nu] \tag{4.29}$$

が $M_{\mu\nu}$ と同じ交換関係を満たすことが分かる．つまりローレンツ代数の表現が得られた．これを**スピン表現**とよび，この行列によって変換される量を**スピノル**と呼ぶ．この関係は次のように一般化できる．

スピン表現

一般に d 個のガンマ行列から作った $\frac{1}{2}d(d-1)$ 個の Σ 行列は d 次元回転群 $SO(d)$ のリー環の表現 (スピン表現) を与え，$2^{[\frac{d}{2}]}$ 次元のスピノルに作用する．

このように Clifford 代数の元から回転群の表現を構成できることを証明するには，次の交換関係を計算する：

$$\begin{aligned}\frac{1}{16}[[\gamma_\mu, \gamma_\nu], [\gamma_\rho, \gamma_\lambda]] &= \frac{1}{4}[\gamma_\mu\gamma_\nu, \gamma_\rho\gamma_\lambda] = \frac{1}{4}(\gamma_\mu\gamma_\nu\gamma_\rho\gamma_\lambda - \leftrightarrow) \\ &= \frac{1}{4}(-\eta_{\mu\rho}\gamma_{[\nu}\gamma_{\lambda]} + \eta_{\nu\rho}\cdots\end{aligned} \tag{4.30}$$

この計算は Clifford 代数の関係式のみで計算することができ，$\Sigma_{\mu\nu} = \frac{-i}{4}[\gamma_\mu, \gamma_\nu]$ の交換関係が

$$[\Sigma_{\mu\nu}, \Sigma_{\rho\lambda}] = i(\eta_{\mu[\rho}\Sigma_{\nu\lambda]} - \eta_{\nu[\rho}\Sigma_{\mu\lambda]}) \tag{4.31}$$

を満たすことを示すことができる．4 次元の場合はローレンツ代数の表現になっていることがわかる．

---

[13] $[x]$ は x を超えない最大の整数を意味するガウス記号である．

さらに 4 次元の場合は，回転とブーストの生成元の表現が具体的に，

$$L_i = \frac{1}{2i}\gamma_j\gamma_k\ (cyclic)\quad ,\quad K_i = \frac{1}{2i}\gamma_i\gamma_0 \tag{4.32}$$

と書けることが分かる．これらは，ベクトル表現の K_i, L_i と同じ交換関係を満たす．これらを使うことで，回転やブーストのスピノルへの作用が分かる．

このようにして作られたスピノル表現にしたがって変換を受けるスピノルを ψ とすると，その変換は

スピノルの変換性

$$\psi\ \rightarrow\ \psi' = U\psi\ ,\quad \bar{\psi}\ \rightarrow\ \bar{\psi}' = \bar{\psi}U^{-1} \tag{4.33}$$

ただし

$$U = e^{-i(\theta^i L_i + \beta^i K_i)} \tag{4.34}$$

また，$\bar{\psi} = \psi^\dagger\gamma^0$ である．

問題：

1. $\bar{\psi}$ の変換性が，$\bar{\psi}\ \rightarrow\ \bar{\psi}' = \bar{\psi}U^{-1}$ で与えられることを示せ．(ヒント)

$$\gamma^0\Sigma^\dagger_{\rho\sigma}\gamma^0 = -\Sigma_{\rho\sigma} \tag{4.35}$$

が成り立つことから示される．

2. ガンマ行列が次のように，共役変換でローレンツベクトルとして変換することを示せ．

$$U^{-1}\gamma^\mu U = \Lambda^\mu{}_\nu\gamma^\nu \tag{4.36}$$

(ヒント) ガンマ行列と $\Sigma_{\mu\nu}$ の交換関係が

$$\omega^{\rho\sigma}[\gamma^\mu, \Sigma_{\rho\sigma}] = -\frac{1}{2i}\omega^{\rho\sigma}[\{\gamma_\rho, \gamma^\mu\}, \gamma_\sigma] = -i\omega^{\mu\sigma}\gamma_\sigma = (\omega\cdot M)^\mu{}_\nu\gamma^\nu \tag{4.37}$$

ことから変換性が分かる．

4.2 Dirac 方程式

Dirac 方程式は歴史的にはローレンツ共変な 1 階微分方程式として発見された．これは，ローレンツ群の表現の言葉になおすと，上記のスピノル表現に属する場の方程式を求めることになる．このようなスピノル表現の場の方程式は，ディラック方程式

$$(i\gamma^\mu\partial_\mu - m)\psi = 0 \tag{4.38}$$

で与えられる．それぞれのローレンツ変換性と Gamma 行列の性質 (4.36) から

$$(i\gamma^\mu\partial'_\mu - m)\psi' = U(i\gamma^\mu\partial_\mu - m)\psi \tag{4.39}$$

となり，ディラック方程式の共変性が成り立つことがわかる．**問題：**ディラック方程式の共変性を証明せよ．

4.2.1 γ 行列のカイラル表現と $SL(2,\mathbb{C})$

一般に，ローレンツ変換の表現を得るには，K_i, L_i と同じ交換関係を持つ行列を使うとわかりやすい．ローレンツ群の一般の表現を求める問題は，さらに次のような組み合わせを考えることで簡単になる：

$$A_j^\pm = \frac{1}{2}(L_j \pm iK_j) \tag{4.40}$$

このように定義された $A^\pm$ はそれぞれが独立に $SU(2)$ の交換関係を満たす．つまり

$$[A_i^\pm, A_j^\pm] = i\epsilon_{ijk}A_k^\pm \quad \text{and} \quad [A_i^+, A_j^-] = 0 \tag{4.41}$$

これによりローレンツ変換は二つの $SU(2)$ に分解されることが分かる．このため，ローレンツ変換の一般の表現はこの二つの $SU(2)$ の表現の次元を指定することで分類できる．つまり，２個の半整数 (j_+, j_-) により指定される表現行列 D_{j_+,j_-} が構成でき表現の次元は $n = (2j_+ + 1)(2j_- + 1)$ である．

ディラック場はこの表現の分類でいうと

$$(\frac{1}{2}, 0) + (0, \frac{1}{2}) \tag{4.42}$$

という可約表現になっている．

つまり，ディラック場のローレンツ変換はブロック対角行列で表すことができることを意味する．このような表現はカイラル表示と呼ばれ，次のようにガンマ行列の具体的な表現を取ることで実現できる．

カイラル表示のガンマ行列は次のように与えられる．

$$\gamma^\mu = \begin{pmatrix} 0 & -\bar{\sigma}^\mu \\ -\sigma^\mu & 0 \end{pmatrix} \tag{4.43}$$

ただし

$$\sigma^\mu_{\alpha\dot{\beta}} = (-1, \vec{\sigma}) \quad \text{and} \quad \bar{\sigma}^{\mu\dot{\alpha}\beta} = (-1, -\vec{\sigma}) \tag{4.44}$$

(Wess-Bagger)．[14]すると

$$\gamma^0 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \gamma^k = \begin{pmatrix} 0 & \sigma^k \\ -\sigma^k & 0 \end{pmatrix} \tag{4.45}$$

[14]WB では，$p_\mu = (-E, \vec{p})$ なので $\sigma^\mu p_\mu = E + \vec{\sigma}\vec{p}$ よって $\bar{\xi}^{\dot{\alpha}}$ が左巻である．

このときラグランジアンは

$$\mathcal{L} = \bar{\psi}(i\gamma^\mu \partial_\mu - m)\psi \tag{4.46}$$

ただし，

$$\bar{\psi} = \psi^\dagger \gamma^0 \tag{4.47}$$

で，**ディラック共役**とよばれる．これは，ディラック場のヘルミート共役がローレンツ変換で逆変換を受けないことから必要になる．ディラック共役は次の性質をもつ．

$$\psi'^\dagger = \psi U^\dagger \Rightarrow \bar{\psi}' = \psi U^\dagger \gamma^0 = \bar{\psi} U^{-1} \tag{4.48}$$

これによって，ラグランジアンの共変性が維持される．

カイラル表示でローレンツの生成元は

$$\Sigma_{\mu\nu} = \frac{1}{4i}[\gamma_\mu, \gamma_\nu] = \frac{1}{2i}\begin{pmatrix} \bar{\sigma}_{[\mu}\sigma_{\nu]} & 0 \\ 0 & \sigma_{[\mu}\bar{\sigma}_{\nu]} \end{pmatrix} \tag{4.49}$$

と書け，４成分のディラックスピノルは２つの既約表現，２成分スピノルに分解される．

$$L_i = \frac{1}{2i}\gamma_j\gamma_k \ (cyclic) \quad , \quad K_i = \frac{1}{2i}\gamma_i\gamma_0 \tag{4.50}$$

なので，

$$L_i = \begin{pmatrix} \sigma_i & 0 \\ 0 & \sigma_i \end{pmatrix} \quad , \quad K_i = -i\begin{pmatrix} \sigma_i & 0 \\ 0 & -\sigma_i \end{pmatrix} \tag{4.51}$$

ディラック場の，それぞれの既約成分への分解は次の**カイラル演算子**[15]

$$\gamma^5 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = i\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3 \tag{4.52}$$

を使って次の行列を作ると得られる．

$$P_L = \frac{1}{2}(1-\gamma^5) \ , \quad P_R = \frac{1}{2}(1+\gamma^5) \ , \quad \psi = \begin{pmatrix} \psi_L \\ \psi_R \end{pmatrix} \tag{4.53}$$

L，R はカイラリティーと呼ばれ後で見るように，運動方向に相対的なスピンの方向が左巻 L か右巻 R というヘリシティーと関係している．

4.2.2 カイラル表現のディラック方程式

このようにして作られたスピノル表現では，質量が０の場合のディラック方程式は２本の独立な２成分スピノルの方程式に分解される．

$$i(\partial_0 - \sigma\cdot\nabla)\psi_L \quad = \quad 0$$

[15] 単に”ガンマ５”と呼ばれることが多い．

$$i(\partial_0 + \sigma \cdot \nabla)\psi_R \;=\; 0 \tag{4.54}$$

ここで，具体的な表示 $\sigma^{\mu}_{\alpha\dot{\beta}} = (-1, \vec{\sigma}) \quad \text{and} \quad \bar{\sigma}^{\mu\dot{\alpha}\beta} = (-1, -\vec{\sigma})$ を使うと[16]

$$-i\sigma^{\mu}_{\alpha\dot{\beta}}\partial_\mu \bar{\eta}^{\dot{\beta}} = i(\partial_0 - \sigma \cdot \nabla)\bar{\eta} = 0 \ (= m\xi) \tag{4.56}$$

$$-i\bar{\sigma}^{\mu\dot{\alpha}\beta}\partial_\mu \xi_\beta = i(\partial_0 + \sigma \cdot \nabla)\xi = 0 \ (= m\bar{\eta}) \tag{4.57}$$

と書ける．それぞれドット付きスピノル $\bar{\eta}^{\dot{\beta}}$，ドット無しスピノル ξ_β と呼ばれる．ここで括弧内は，質量があった場合の式を書いている．

さらに，

$$i(\partial_0 - \vec{\sigma}\nabla)i(\partial_0 + \vec{\sigma}\nabla) = -\partial_0^2 + (\vec{\sigma}\nabla)^2 = \partial \cdot \partial \tag{4.58}$$

なので，２成分スピノルはゼロ質量の粒子であることが分かる．またカイラル表示を取ったとき，Left-Right の定義は $\psi_L = \bar{\eta}$ が運動方程式から

$$i(\partial_0 - \sigma \cdot \nabla)\psi_L = 0 \ \Rightarrow \ \ (E + \sigma \cdot \mathbf{p})\psi_L = 0 \ \Rightarrow \ \frac{\sigma \cdot \mathbf{p}}{E}\psi_L = -\psi_L (\text{左巻}) \tag{4.59}$$

のように，それぞれ決まったヘリシティーを持つことが分かる．

一方カイラル表示で質量がある場合のディラック方程式

$$(i\gamma^\mu \partial_\mu - m)\psi = 0 \tag{4.60}$$

は，運動量表示では

$$\begin{pmatrix} -m & i(\partial_0 + \sigma \cdot \nabla) \\ i(\partial_0 - \sigma \cdot \nabla) & -m \end{pmatrix} \psi \tag{4.61}$$

と書ける．このことから，質量項はカイラリティーの違う項を混ぜるような項であることがわかる．このような質量をディラック質量とよぶ．このほかにもマヨラナ質量という質量の与え方が知られている．これは粒子と反粒子の区別をなくすことによって得られる質量である．

もちろん，カイラル表示でも

$$(i\gamma^\mu \partial_\mu + m)(i\gamma^\mu \partial_\mu - m)\psi = (\partial_\mu \partial^\mu - m^2)\psi = 0 \tag{4.62}$$

なので，ディラック場がクライン・ゴルドン方程式を満たしていることが確認できる．

---

[16]

$$\sigma^{\mu}_{W-B} = -\bar{\sigma}^{\mu}_{P-S} \ , \ \ \bar{\sigma}^{\mu}_{W-B} = -\sigma^{\mu}_{P-S} \tag{4.55}$$

4.3 古典解 (平面波解)

クライン・ゴルドン方程式と同様に Dirac 方程式にも正エネルギー解と負エネルギー解が存在する．正準量子化を行う場合，これらの解で展開する必要があるので，以下ではそれらの解を求める．

そこで，運動量表示に移るために

$$\psi = u(k)e^{ik\cdot x}\ , \quad k^2 = -m^2 \tag{4.63}$$

と置く．Dirac 方程式に代入すると

$$(-\gamma^\mu k_\mu - m)u(k) = 0 \tag{4.64}$$

という，代数方程式を得る．この方程式は

$$(\bar{\sigma}\cdot k)(\sigma\cdot k) = -k^2 = m^2 \tag{4.65}$$

という関係式を使うと次のように簡単に解ける．解は

$$u^s(k) = \begin{pmatrix} \sqrt{\bar{\sigma}\cdot k} & 0 \\ 0 & \sqrt{\sigma\cdot k} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \alpha^{(s)} \\ \alpha^{(s)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{\bar{\sigma}\cdot k}\alpha^{(s)} \\ \sqrt{\sigma\cdot k}\alpha^{(s)} \end{pmatrix} \tag{4.66}$$

である．ただし，α^s は任意の 2 次元スピノルにとって良い．以下では 2 個の単位行列に取り

$$\alpha^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}\ , \quad \alpha^{(2)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \tag{4.67}$$

とする．*Proof* :

$$\begin{pmatrix} -m & \bar{\sigma}\cdot k \\ \sigma\cdot k & -m \end{pmatrix} u(k) = \begin{pmatrix} -m\sqrt{\bar{\sigma}\cdot k} & \bar{\sigma}\cdot k\sqrt{\sigma\cdot k} \\ \sigma\cdot k\sqrt{\bar{\sigma}\cdot k} & -m\sqrt{\sigma\cdot k} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \alpha \\ \alpha \end{pmatrix} = 0 \tag{4.68}$$

q.e.d.

負エネルギー解も同様に

$$\psi(x) = v(k)e^{-ik\cdot x} \tag{4.69}$$

$$(\gamma^\mu k_\mu - m)v(k) = 0 \tag{4.70}$$

を得る．解は

$$v^s(k) = \begin{pmatrix} \sqrt{\bar{\sigma}\cdot k}\alpha^s \\ -\sqrt{\sigma\cdot k}\alpha^s \end{pmatrix} \tag{4.71}$$

4.4 量子化

ディラック場の量子化は，複素スカラー場の場合と同様に生成消滅演算子を使って

$$\begin{aligned}\psi(x) &= \int \frac{d^3\mathbf{k}}{(2\pi)^3}\frac{1}{\sqrt{2E_\mathbf{k}}}\sum_s (b^s_\mathbf{k} u^s(k)e^{ik\cdot x} + d^{s\dagger}_\mathbf{k} v^s(k)e^{-k\cdot x}) \\ \bar\psi(x) &= \int \frac{d^3\mathbf{k}}{(2\pi)^3}\frac{1}{\sqrt{2E_\mathbf{k}}}\sum_s (d^s_\mathbf{k} \bar v^s(k)e^{ik\cdot x} + b^{s\dagger}_\mathbf{k} \bar u^s(k)e^{-k\cdot x}) = \psi^\dagger\gamma^0 \qquad (4.72)\end{aligned}$$

と定義される．ただし，この生成消滅演算子は**反交換関係** (anticommutation relation)

$$\{b^s_\mathbf{k}, b^{s'\dagger}_{\mathbf{k}'}\} = \{d^s_\mathbf{k}, d^{s'\dagger}_{\mathbf{k}'}\} = \delta^{ss'}(2\pi)^3\delta^3(\mathbf{k}-\mathbf{k}') \qquad (4.73)$$

を満たす.

この結果

$$\begin{aligned}\{\psi(x),\bar\psi(x')\}_{eq} &= \int \frac{d^3\mathbf{k}d^3\mathbf{k}'}{(2\pi)^6}\frac{1}{2\sqrt{E_\mathbf{k}E_{\mathbf{k}'}}}\sum_{s,s'} \\ &\quad (\{b^s_\mathbf{k}, b^{s'\dagger}_{\mathbf{k}'}\}u^s(k)\bar u^{s'}(k')e^{i(kx-k'x')} + \{d^{s\dagger}_\mathbf{k}, d^{s'}_{\mathbf{k}'}\}v^s(k)\bar v^{s'}(k')e^{-i(kx-k'x')}) \\ &= \int \frac{d^3\mathbf{k}}{(2\pi)^3}\frac{1}{2E_\mathbf{k}}\sum_s (u^s(k)\bar u^s(k)e^{i\mathbf{k}(\mathbf{x}-\mathbf{x}')} + v^s(k)\bar v^s(k)e^{-i\mathbf{k}(\mathbf{x}-\mathbf{x}')}) \\ &= \int \frac{d^3\mathbf{k}}{(2\pi)^3}\frac{1}{2E_\mathbf{k}}e^{i\mathbf{k}(\mathbf{x}-\mathbf{x}')}(\gamma^\mu(k+\tilde k)_\mu) = \gamma^0\delta^3(\mathbf{x}-\mathbf{x}') \qquad (4.74)\end{aligned}$$

ただし，$\tilde k = (E_\mathbf{k}, -\mathbf{k})$．また

$$\begin{aligned}\sum_s u^s(k)\bar u^s(k) &= \begin{pmatrix} m & \bar\sigma k \\ \sigma k & m\end{pmatrix} = -\gamma^\mu k_\mu + m \\ \sum_s v^s(k)\bar v^s(k) &= \begin{pmatrix} -m & \bar\sigma k \\ \sigma k & -m\end{pmatrix} = -\gamma^\mu k_\mu - m \qquad (4.75)\end{aligned}$$

を使った．よって

$$\{\psi(x),\psi^\dagger(x')\}_{eq} = \delta^3(\mathbf{x}-\mathbf{x}')\mathbf{1}_4 \qquad (4.76)$$

を得る[17].

4.5 2点関数と Propagator

ボソンの場合と同様に交換子に対応したプロパゲータは

$$S_{ret}(x-y) = \langle 0|\{\psi(x),\bar\psi(y)\}|0\rangle_{x^0>y^0} = (i\gamma^\mu\partial^x_\mu + m)D_{ret}(x-y) \qquad (4.77)$$

[17] ディラック場の量子化を厳密に行うには拘束系の量子化を行う必要があるがここでは簡単に生成消滅演算子に反交換関係を導入する形で行った.

となる．

Proof ：2 点の相関関数を求めてやると，

$$
\begin{aligned}
\langle 0|\psi(x)\bar{\psi}(y)|0\rangle &= \int \frac{d^3\mathbf{k}d^3\mathbf{k}'}{(2\pi)^6}\frac{1}{2\sqrt{E_{\mathbf{k}}E_{\mathbf{k}'}}}\sum_{s,s'}u^s(k)\bar{u}^{s'}(k')e^{i(kx-k'y)}(2\pi)^3\delta^3(\mathbf{k}-\mathbf{k}') \\
&= \int \frac{d^3\mathbf{k}}{(2\pi)^3}\frac{1}{2E_{\mathbf{k}}}(-\gamma^\mu k_\mu + m)e^{ik(x-y)} \\
&= (i\gamma^\mu\partial_\mu^x + m)\int \frac{d^3\mathbf{k}}{(2\pi)^3}\frac{1}{2E_{\mathbf{k}}}e^{ik(x-y)} \qquad (4.78)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\langle 0|\bar{\psi}(y)\psi(x)|0\rangle &= \int \frac{d^3\mathbf{k}d^3\mathbf{k}'}{(2\pi)^6}\frac{1}{2\sqrt{E_{\mathbf{k}}E_{\mathbf{k}'}}}\sum_{s,s'}v^s(k)\bar{v}^{s'}(k')e^{i(ky-k'x)}(2\pi)^3\delta^3(\mathbf{k}-\mathbf{k}') \\
&= \int \frac{d^3\mathbf{k}}{(2\pi)^3}\frac{1}{2E_{\mathbf{k}}}(-\gamma^\mu k_\mu - m)e^{ik(y-x)} \\
&= -(i\gamma^\mu\partial_\mu + m)\int \frac{d^3\mathbf{k}}{(2\pi)^3}\frac{1}{2E_{\mathbf{k}}}e^{ik(y-x)} \qquad (4.79)
\end{aligned}
$$

である．

同様にファイマンプロパゲータは

$$
\begin{aligned}
S_F(x-y) = \langle 0|T\psi(x)\bar{\psi}(y)|0\rangle &\equiv \theta(x^0-y^0)\langle 0|\psi(x)\bar{\psi}(y)|0\rangle - \theta(y^0-x^0)\langle 0|\bar{\psi}(y)\psi(x)|0\rangle \\
&= (i\partial\!\!\!/^x + m)D_F(x-y) \qquad (4.80)
\end{aligned}
$$

で与えられる．ただし，フェルミオン場の時間順序積は

$$
T\{\psi(x)\psi(y)\} = \begin{cases} \psi(x)\psi(y) & x^0 > y^0 \\ -\psi(y)\psi(x) & y^0 > x^0 \end{cases} \qquad (4.81)
$$

と定義する．具体的には

$$
\begin{aligned}
S_F(x-y) &= \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4}\frac{i(-\gamma^\mu k_\mu + m)}{-k^2 - m^2 + i\epsilon}e^{ik(x-y)} \\
&= \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4}\frac{i}{-k\!\!\!/ - m + i\epsilon}e^{ik(x-y)} \qquad (4.82)
\end{aligned}
$$

ただし，

$$
k\!\!\!/ = \gamma^\mu k_\mu \qquad (4.83)
$$

を表し，

$$
(-k\!\!\!/ - m)(-k\!\!\!/ + m) = -k^2 - m^2 \qquad (4.84)
$$

である．また 2 行目の分数は逆行列を意味する．この積分表示から直接

$$
(i\partial\!\!\!/^x - m)S_F(x-y) = i\delta^4(x-y)\mathbf{1}_4 \qquad (4.85)
$$

であることが分かる．

4.5.1 ハミルトニアンと運動量

ラグランジアンは

$$\begin{aligned}\mathcal{L} &= \bar{\psi}(i\gamma^\mu\partial_\mu - m)\psi \\ &= \psi^\dagger\gamma^0(i\gamma^0\partial_0 + i\gamma^k\nabla_k - m)\psi\end{aligned} \tag{4.86}$$

ψ に共役な運動量は $\pi_\psi = i\psi^\dagger$ なので[18]

$$H = \int dx^3 \bar{\psi}(-i\gamma^k\nabla_k + m)\psi \tag{4.88}$$

これは，ディラックの表記に従って

$$H = \int dx^3 \psi^\dagger(-i\boldsymbol{\alpha}\cdot\nabla + \beta m)\psi \tag{4.89}$$

と書く．ただし，$\alpha^k = \gamma^0\gamma^k$，$\beta = \gamma^0$ である．ここに現れるハミルトニアン密度

$$\mathcal{H} = \boldsymbol{\alpha}\cdot\mathbf{p} + m\beta \tag{4.90}$$

は，Dirac が相対論的なシュレディンガー方程式

$$i\partial_t\psi = \mathcal{H}\psi \tag{4.91}$$

として提唱したものである．このハミルトニアンはエルミート演算子である．

量子化された場をこのハミルトニアンに代入すると

$$H = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3}\sum_{s=1}^{2} E_{\mathbf{k}}(b_{\mathbf{k}}^{s\,\dagger}b_{\mathbf{k}}^s + d_{\mathbf{k}}^{s\,\dagger}d_{\mathbf{k}}^s) \tag{4.92}$$

と書けることが分かる．一方，運動量演算子同様に求めることができ：

$$\mathbf{P} = \int d^3x\psi^\dagger(-i\nabla)\psi = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3}\sum_{s=1}^{2}\mathbf{k}(b_{\mathbf{k}}^{s\,\dagger}b_{\mathbf{k}}^s + d_{\mathbf{k}}^{s\,\dagger}d_{\mathbf{k}}^s) \tag{4.93}$$

さらに，場の位相変換に対する対称性は，ネーターの保存流

$$j^\mu = e\bar{\psi}\gamma^\mu\psi \tag{4.94}$$

を定義するので，保存量として

$$Q = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3}\sum_{s=1}^{2}(b_{\mathbf{k}}^{s\,\dagger}b_{\mathbf{k}}^s - d_{\mathbf{k}}^{s\,\dagger}d_{\mathbf{k}}^s) \tag{4.95}$$

を与える．このことから，$b^\dagger|0\rangle$ と $d^\dagger|0\rangle$ は電荷が異なり質量が同じフェルミオンである．これは，反粒子である．

---

[18] 厳密には拘束を考慮しなければならないが，単に

$$\mathcal{H} = \pi\dot{\psi} - \mathcal{L} \tag{4.87}$$

として求めたものと一致する．ここではその結果を使う．

4.6 反粒子

反粒子の状態の意味は見るためにPauli 表示の γ 行列を使う．[19]

$$\gamma_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad \text{and} \quad \gamma_k = \begin{pmatrix} 0 & -\sigma_k \\ \sigma_k & 0 \end{pmatrix} \tag{4.96}$$

このときディラック方程式は

$$(-cp^\mu\gamma_\mu + Mc^2)\psi = (-E\gamma_0 - cp^k\gamma_k + Mc^2)\psi = 0 \tag{4.97}$$

そこで，左から γ_0 をかけることによって $(\gamma_0)^2 = 1$ より

$$(-E\psi + cp^k\alpha_k + Mc^2\beta)\psi = 0 \tag{4.98}$$

ただし

$$\alpha = \gamma^0\gamma^k = \begin{pmatrix} 0 & \sigma_k \\ \sigma_k & 0 \end{pmatrix} \quad \text{and} \quad \beta = \gamma_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \tag{4.99}$$

これから，ハミルトニアンとして

$$H = c\vec{\alpha}\cdot\vec{p} + Mc^2\beta = \begin{pmatrix} Mc^2 & c\vec{\sigma}\cdot\vec{p} \\ c\vec{\sigma}\cdot\vec{p} & -Mc^2 \end{pmatrix} \tag{4.100}$$

をとれば，ディラック方程式をシュレディンガー方程式として読み直すことができる．このハミルトニアンはエルミート演算子である．

この方程式の定常状態を考えると

$$H\psi = E\psi \quad \Rightarrow \quad \begin{pmatrix} Mc^2 - E & c\vec{\sigma}\cdot\vec{p} \\ c\vec{\sigma}\cdot\vec{p} & -Mc^2 - E \end{pmatrix}\psi = 0 \tag{4.101}$$

この方程式は，斉次方程式なので

$$\det\begin{vmatrix} Mc^2 - E & c\vec{\sigma}\cdot\vec{p} \\ c\vec{\sigma}\cdot\vec{p} & -Mc^2 - E \end{vmatrix} = 0 \tag{4.102}$$

出なければばならない．よって

$$E^2 - M^2c^4 - (c\vec{\sigma}\cdot\vec{p})^2 = E^2 - M^2c^4 - c^2\vec{p}^2 = 0 \tag{4.103}$$

が出る．すなわち

$$E = \pm E_p = \pm\sqrt{M^2c^4 + c^2\vec{p}^2} \tag{4.104}$$

---

[19] これを与えるユニタリー変換は $U = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ である．

のときのみ，解が存在することになる．これを on shell (質量殻) 条件という．

$E = E_p$ のとき正エネルギー解と呼ばれ，$E = -E_p$ を負エネルギー解という．

この方程式を解くためにディラック場を $\psi = \begin{pmatrix} \phi \\ \chi \end{pmatrix}$ と 2 成分の成分に分ける．これは，２次元のスピノルとは違い後で見るようにローレンツ変換で混ざってしまう．区別するために，今までのスピノルをワイルスピノルと呼ぶこともある．

$$(Mc^2 - E)\phi + c\vec{\sigma}\cdot\vec{p}\chi = 0 \quad \text{and} \quad c\vec{\sigma}\cdot\vec{p}\phi - (Mc^2 + E)\chi = 0 \tag{4.105}$$

$E = E_p > 0$ のときを考えると

$$\chi = \frac{c\vec{\sigma}\cdot\vec{p}}{E_p + Mc^2}\phi \tag{4.106}$$

である．よって，非相対論的状況では一般に $|\chi| \ll |\phi|$ である．ϕ を Large component, χ を small component と呼ぶ．さらに，この関係式を１番目の式に代入することによって

$$(E_p - Mc^2)\phi = \frac{c^2(\vec{\sigma}\cdot\vec{p})^2}{E_p + Mc^2} \tag{4.107}$$

をえる．静止質量を引き去ったものを非相対論的なエネルギーとするとこれは

$$\mathcal{E}\phi = \frac{\vec{p}^2}{2M}\phi + O(\frac{p^2}{M^2c^2}) \tag{4.108}$$

となり，2 成分スピノルがシュレディンガー方程式にしたがっていることがわかる．

4.7 Discrete Symmetries

1. **Parity:**パリティー変換は，空間座標の符号を変えるもので，フェルミオンの場合ラグランジアンが

$$\psi(t, \mathbf{x}) \ \to \ \gamma^0\psi(t, -\mathbf{x}) \tag{4.109}$$

という変換で不変であることから導かれる．

場の演算子の変換としては，

$$\mathcal{P}b^s_{\vec{k}}\mathcal{P} = \eta_b b^s_{-\vec{k}} \quad , \quad \mathcal{P}d^s_{\vec{k}}\mathcal{P} = \eta_b d^s_{-\vec{k}} \tag{4.110}$$

ただし，$\eta_b^2, \eta_d^2 = \pm 1$ で相対的には以下の議論で定まる．

$$\begin{aligned}
\mathcal{P}\psi(x)\mathcal{P} &= \int \frac{d^3\mathbf{k}}{(2\pi)^3}\frac{1}{\sqrt{2E_\mathbf{k}}}\sum_s(b^s_{-\mathbf{k}}u^s(k)e^{ik\cdot x} + d^{s\dagger}_{-\mathbf{k}}v^s(k)e^{-k\cdot x}) \\
&= \int \frac{d^3\mathbf{k}}{(2\pi)^3}\frac{1}{\sqrt{2E_\mathbf{k}}}\sum_s(\eta_b b^s_\mathbf{k}u^s(k)e^{i\tilde{k}\cdot x} + \eta_d^* d^{s\dagger}_\mathbf{k}v^s(k)e^{-\tilde{k}\cdot x})
\end{aligned} \tag{4.111}$$

ただし，$\tilde{k}$ は空間成分の符号を変えた４元ベクトル $\tilde{k} = (k^0, -\mathbf{k})$ である．一方

$$u(k) = \begin{pmatrix} \sqrt{k \cdot \sigma}\alpha \\ \sqrt{k \cdot \bar{\sigma}}\alpha \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{\tilde{k} \cdot \bar{\sigma}}\alpha \\ \sqrt{\tilde{k} \cdot \sigma}\alpha \end{pmatrix} = \gamma^0 u(\tilde{k}) \tag{4.112}$$

$$v(k) = \begin{pmatrix} \sqrt{k \cdot \sigma}\alpha \\ -\sqrt{k \cdot \bar{\sigma}}\alpha \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{\tilde{k} \cdot \bar{\sigma}}\alpha \\ -\sqrt{\tilde{k} \cdot \sigma}\alpha \end{pmatrix} = -\gamma^0 u(\tilde{k}) \tag{4.113}$$

なので

$$\mathcal{P}\psi(x)\mathcal{P} = \gamma^0 \int \frac{d^3\mathbf{k}}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2E_\mathbf{k}}} \sum_s (\eta_b b^s_{\tilde{\mathbf{k}}} u^s(\tilde{k}) e^{i\tilde{k}\cdot x} - \eta_d^* d^{s\dagger}_{\tilde{\mathbf{k}}} v^s(\tilde{k}) e^{-\tilde{k}\cdot x}) \tag{4.114}$$

これが，$\psi(t, -\mathbf{x})$ に等しいためには，$\eta_d^* = -\eta_b$.

さらに，Parity 変換によって bilinear は

$$\mathcal{P}\bar{\psi}\psi\mathcal{P} = |\eta_b^2|\bar{\psi}\psi(t, -\mathbf{x}) \tag{4.115}$$

bilinear オペレータの parity 変換がこの位相によらないことから，一般性を失うことなく，$\eta_b = 1$ とおくことができる．よって

$$\mathcal{P}\psi(t, \mathbf{x})\mathcal{P} = \gamma^0\psi(t, -\mathbf{x}) \tag{4.116}$$

たの bilinear オペレータの変換は例えば

$$\begin{aligned} \mathcal{P}\bar{\psi}\gamma^5\psi\mathcal{P} &= -\bar{\psi}\gamma^5\psi(t, -\mathbf{x}) \\ \mathcal{P}\bar{\psi}\gamma^\mu\psi\mathcal{P} &= \bar{\psi}\gamma^0\gamma^\mu\gamma^0\psi(t, -\mathbf{x}) = \begin{cases} \bar{\psi}\gamma^\mu\psi(t, -\mathbf{x}) & for\ \mu = 0 \\ -\bar{\psi}\gamma^k\psi\psi & for\ \mu = k \end{cases} \end{aligned} \tag{4.117}$$

2. **Time reversal:**時間反転は，c number にも作用する変換で

$$\mathcal{T}c\mathcal{T} = c^* \tag{4.118}$$

を満たす．anti-linear な involution である．この時, ラグランジアンは

$$\psi \to T\psi(t, \mathbf{x})T = \gamma^1\gamma^3\psi(-t, \mathbf{x}) \tag{4.119}$$

で不変である．これを満たす，演算子の変換はスピンの方向も変え

$$\mathcal{T}b^s_\mathbf{k}\mathcal{T} = b^{-s}_{-\mathbf{k}} \quad , \quad \mathcal{T}d^s_\mathbf{k}\mathcal{T} = d^{-s}_{-\mathbf{k}} \tag{4.120}$$

3. **Charge conjugation** 荷電共役変換は場の演算子の定義から考えた方が分かりやすい.

$$\mathcal{C}b^s_\mathbf{k}\mathcal{C} = d^s_\mathbf{k} \quad , \quad \mathcal{C}d^s_\mathbf{k}\mathcal{C} = b^s_\mathbf{k} \tag{4.121}$$

これは，場で書くと

$$\mathcal{C}\psi\mathcal{C} = -i\gamma^2\psi^* = i\gamma^0\gamma^2\bar{\psi}^t \tag{4.122}$$

であり，ディラック場の作用がこの変換で不変であることを確かめるのは簡単である．ここで，$i\gamma^0\gamma^2$ は charge conjugation matrix と呼ばれる．

それぞれの対称性は，厳密には成り立たないことが分かっている．しかし，全てを同時に行った CPT 変換に関しては現在のところその破れはなく，理論的には局所性などを仮定することで場の理論の枠内では CPT 不変性が証明できることが分かっている．