

7 S 行列

場の理論において、考える基本的なプロセスは散乱過程である。現実的には、2つの粒子をぶつけて散乱後の粒子を検出する。この場合、入射粒子は散乱現象の起こる衝突点から十分はなれたところで、運動量の固有状態として準備され散乱後の粒子も十分に離れたところで、運動量の固有状態として観測される。このようなプロセスを表すにはよって

$${}_{out}\langle \mathbf{k}_1 \cdots | \mathbf{k}'_1 \cdots \rangle_{in} = \langle \mathbf{k}_1 \cdots | S | \mathbf{k}'_1 \cdots \rangle \quad (7.193)$$

という行列を計算する必要がある。in-state と out-state はそれぞれ十分に過去及び未来で運動量の固有状態になっているような状態である。このような行列を S 行列と呼ぶ。これらの in-state と out-state を運動量の固有状態からの時間発展で作ると考えると

$$\langle \mathbf{k}_1 \cdots | S | \mathbf{k}'_1 \cdots \rangle = \lim_{T \rightarrow \infty} \langle \mathbf{k}_1 \cdots | e^{-i2HT} | \mathbf{k}'_1 \cdots \rangle \quad (7.194)$$

と考えられる。

7.1 漸近場

一方これまでに我々は、一般の振幅（または相関関数）の計算を考えてきたが、この振幅と S 行列の関係はどのように与えられるのだろうか？散乱を記述するには、初期状態として十分離れていてお互いに干渉することがなく、それぞれの粒子が量子数のはっきりした状態、例えば平面波（運動量の固有状態）にあるように準備する必要がある。同様に散乱後の粒子も十分に離れ、それぞれが固有状態になるとして記述する。そこで必要になることは、次に説明するように振幅の中の場の量を未来（または過去）に引っ張り出すことである。以下では、この方法を紹介する。

7.1.1 LSZ reduction

まず、一つの場についてフーリエ変換をして運動量の固有状態を引き出す。そのとき

$$\begin{aligned} & \int d^4x e^{-ikx} \langle \Omega | T \{ \varphi(x) \varphi(x_1) \cdots \varphi(x_n) \} | \Omega \rangle \\ &= \left(\int_{-\infty}^{t_{out}} + \int_{t_{out}}^{\infty} \right) dt \int d^3\mathbf{x} e^{-ikx} \langle \Omega | T \{ \varphi(x) \varphi(x_1) \cdots \varphi(x_n) \} | \Omega \rangle \end{aligned} \quad (7.195)$$

のように、時間積分を分割して、 t_{out} 以降の部分だけを考えよう。この状況では、 $\varphi(x)$ は他の場よりも時間がたっていると考える時間順序積の外に外すことができる。すると、完全系を挿入することで、

$$\begin{aligned} & \int_{t_{out}}^{\infty} dt \int d^3\mathbf{x} e^{-ikx} \langle \Omega | T \{ \varphi(x) \varphi(x_1) \cdots \varphi(x_n) \} | \Omega \rangle \\ &= \int_{t_{out}}^{\infty} dt \int d^3\mathbf{x} e^{-ikx} \langle \Omega | \varphi(x) | \mathbf{k}' \rangle \frac{d^3\mathbf{k}'}{(2\pi)^3 2\omega_{\mathbf{k}'}} \langle \mathbf{k}' | T \{ \varphi(x_1) \cdots \varphi(x_n) \} | \Omega \rangle \end{aligned} \quad (7.196)$$

を得る．ローレンツ不変性から，

$$\langle \Omega | \varphi(x) | \mathbf{k}' \rangle = \langle \Omega | e^{-iP \cdot x} \varphi(0) e^{iP \cdot x} | \mathbf{k}' \rangle = \langle \Omega | \varphi(0) | \mathbf{k}' \rangle e^{ik' \cdot x} \Big|_{k'^0 = \omega_{\mathbf{k}'}} \quad (7.197)$$

なので，代入して x 積分を実行すると

$$\begin{aligned} &= \int_{t_{out}}^{\infty} dt \frac{d^3 \mathbf{k}'}{2\omega_{\mathbf{k}'}} e^{i(k'^0 - \omega_{\mathbf{k}'})t} \delta^3(\mathbf{k} - \mathbf{k}') \langle \Omega | \varphi(0) | \mathbf{k}' \rangle \langle \mathbf{k}' | T \{ \varphi(x_1) \cdots \varphi(x_n) \} | \Omega \rangle \\ &= \int_{t_{out}}^{\infty} dt \frac{1}{2\omega_{\mathbf{k}}} e^{i(k^0 - \omega_{\mathbf{k}} + i\epsilon)t} \langle \Omega | \varphi(0) | \mathbf{k} \rangle \langle \mathbf{k} | T \{ \varphi(x_1) \cdots \varphi(x_n) \} | \Omega \rangle \\ &= \frac{i}{2\omega_{\mathbf{k}}(k^0 - \omega_{\mathbf{k}} + i\epsilon)} \langle \Omega | \varphi(0) | \mathbf{k} \rangle \langle \mathbf{k} | T \{ \varphi(x_1) \cdots \varphi(x_n) \} | \Omega \rangle \\ &= \frac{i}{-k^2 - m^2 + i\epsilon} \Big|_{k^0 \rightarrow \omega_{\mathbf{k}}} \langle \Omega | \varphi(0) | \mathbf{k} \rangle \langle \mathbf{k} | T \{ \varphi(x_1) \cdots \varphi(x_n) \} | \Omega \rangle \quad (7.198) \end{aligned}$$

ここで，最後の行は On shell 極限を取ることを意味する．この項は，実際はこの極限で発散しているわけだが，極限でポールの留数が一致するのでローレンツ不変なこの表現を最終的な式とする．この因子は，終状態になってからさらに粒子が無限に飛ぶために発散していると考えられる．このような場を漸近場と呼ぶ．散乱状態を表す行列要素はこの発散を分離することで得られる．

全ての漸近場の発散を分離するために，上記の議論を $t_{in} < t_{out}$ ，それぞれの時刻で粒子が十分にお互いに離れそれぞれが運動量の固有状態で飛んでいると仮定して全ての粒子について繰り返す．最終的には，始状態終状態それぞれに同様の因子がついて

$$= \prod \left(\frac{i\sqrt{Z}}{-k_i^2 - m^2 + i\epsilon} \Big|_{k_i^0 \rightarrow \omega_{\mathbf{k}_i}} \right) \prod \left(\frac{i\sqrt{Z}}{-k_j^2 - m^2 + i\epsilon} \Big|_{k_j^0 \rightarrow -\omega_{\mathbf{k}_j}} \right)_{out} \langle \mathbf{k}_i, \dots | -\mathbf{k}_j, \dots \rangle_{in} \quad (7.199)$$

これを LSZ(Lehmann-Symanzik-Zimmermann)reduction formula とよぶ．

7.1.2 相互作用表示と S 行列

このように初期状態と終状態を準備するための因子を分離してしまうと，その残りの部分が S 行列を与えると考えられる．これを，相互作用表示の振幅に適用すると S 行列は

$$\langle k_i, \dots | S | k_j, \dots \rangle \propto \langle k_i, \dots | T e^{-i \int_{-\infty}^{\infty} dt H_I} | k_j, \dots \rangle \quad (7.200)$$

さらに，

$$S = 1 + iT \quad (7.201)$$

と置いて転移 (transition) 行列を定義すると

$$\langle k_i, \dots | iT | k_j, \dots \rangle = \langle k_i, \dots | T e^{-i \int_{-\infty}^{\infty} dt H_I} | k_j, \dots \rangle_{connected, amputated} \quad (7.202)$$

で与えられる．ここで，最後の connected, amputated はファインマン・ダイアグラムとして展開したときにこの振幅を計算するときに必要なダイアグラムを表す．これは，S 行

列は correlation function を計算するときのグラフと同じく connected graph のみを計算すればよいが, amputated は漸近場になっている外線にはプロパゲータを掛ける必要が無いことを意味する.

つまり, このように漸近場のある場合の x 空間では, 外線との縮約を

$$\overline{\langle k | \varphi(x) \rangle} = \langle 0 | \overline{a_{\mathbf{k}} \sqrt{2\omega_{\mathbf{k}}} \varphi(x)} \rangle = \langle 0 | e^{ikx} \rangle \quad (7.203)$$

と考えると平面波の因子を与えると考えるとよいことを表す. つまり, 外線があるとそれぞれ運動量の向きに従って

$$k \text{ --- } \overleftarrow{\quad} = e^{ikx}, \quad k \text{ --- } \overrightarrow{\quad} = e^{-ikx} \quad (7.204)$$

という因子を与える. 以下に見るように x は頂点に含まれる座標で最終的に積分される. すると, これらの平面波因子 e^{ikx} はこの頂点にある座標積分によって運動量の保存則に書き換えられる. このようにして, 次のように不変振幅のファインマン則を得ることができる.

7.2 不変振幅と S 行列のファインマン則

S 行列によって与えられる散乱振幅は, 常に運動量保存則を伴うのでそのデルタ関数を因子として不変振幅を次のように定義する.

$$\begin{aligned} \langle k_i, \dots | iT | k_j, \dots \rangle &= \langle k_i, \dots | T e^{-i \int_{-\infty}^{\infty} dt H_I} | k_j, \dots \rangle_{\text{connected, amputated}} \\ &= (2\pi)^4 \delta\left(\sum k_i - \sum p_f\right) \times i\mathcal{M}(k_1, k_2 \rightarrow p_f) \end{aligned} \quad (7.205)$$

不変振幅を与えるファインマン則をもう一度導いておく.

1. 外線は $|k_i\rangle$ に $dx^4 \phi^4(x)$ (vertex, 頂点と呼ぶ) の中の一個の $\phi(x)$ と縮約を取るようになるので $e^{ik_i x}$ がかかる.
2. 内線の場合他の頂点 $dy^4 \phi^4(y)$ との縮約から

$$D_F(x-y) = \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} e^{ik(x-y)} \tilde{D}_F(k) = \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} e^{ik(x-y)} \frac{-i}{k^2 + m^2 - i\epsilon} \quad (7.206)$$

がかかるので, 頂点における x 積分が頂点に入るすべての運動量の保存則を導く.

3. 頂点間はプロパゲータ $\tilde{D}_F(k)$ と k 積分が残る.
4. すべての積分後, 全運動量の保存則の他に外線には 1, 内線にはプロパゲータ, 閉じた内線 (ループ) ごとに k 積分が残る.

以上をまとめると：

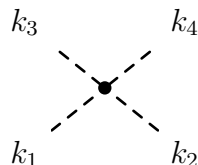
1. プロパゲータ：

$$\text{---} \overset{k}{\text{---}} \text{---} = \frac{i}{-k^2 - m^2 + i\epsilon} \quad (7.207)$$

2. 外線は 1 をかける .

$$k \text{-----} = 1 \quad (7.208)$$

3. 頂点：



$$= -i\lambda \left(\times \frac{1}{4!} \text{この因子を掛けて考えることもできる} \right) \quad (7.209)$$

さらに，各頂点における運動量保存 ($\sum k_i = 0$) .

4. 定まっていない運動量について積分 (ループ積分) : $\int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4}$

5. Symmetric factor で割る ($\frac{1}{4!}$ をすでに含めた場合は，場合の数を掛ける .)

7.3 散乱振幅の計算

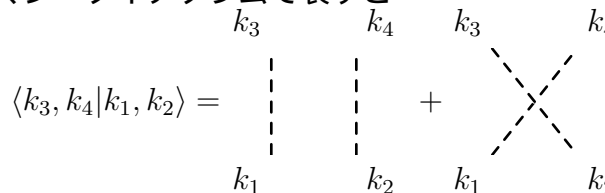
実際にファインマンダイアグラムを使った計算を行ってみよう . φ^4 theory の同種 2 粒子の散乱を考える .

$$\langle k_3, k_4 | T e^{-i \int_{-\infty}^{\infty} dt H_I} | k_1, k_2 \rangle = \langle k_3, k_4 | k_1, k_2 \rangle + \langle k_3, k_4 | \frac{-i\lambda}{4!} \int d^4 z \varphi^4(z) | k_1, k_2 \rangle + O(\lambda^2) \quad (7.210)$$

最初の項は

$$\langle k_3, k_4 | k_1, k_2 \rangle = \langle k_3 | k_1 \rangle \langle k_4 | k_2 \rangle + \langle k_4 | k_1 \rangle \langle k_3 | k_2 \rangle \quad (7.211)$$

これは，入射粒子と出てくる粒子の運動量が同じことを示しているので $S = 1 + iT$ の 1 に属する . ファインマン・ダイアグラムで表すと



$$\langle k_3, k_4 | k_1, k_2 \rangle = \text{---} \overset{k_3}{\text{---}} \text{---} \overset{k_4}{\text{---}} \text{---} + \text{---} \overset{k_3}{\text{---}} \text{---} \overset{k_4}{\text{---}} \text{---} \quad (7.212)$$

でこれは，disconnected ダイアグラムに属する . 次の項は φ^4 の中の contraction を考えると

$$\overline{\varphi\varphi\varphi\varphi}, \quad \overline{\varphi\varphi}\varphi\varphi, \quad \varphi\varphi\varphi\varphi \quad (7.213)$$

ここで contraction されていないものは外線と contraction するものと仮定する．最初の場合はファインマン・ダイアグラムで表すと

$$\langle k_3, k_4 | \overline{\varphi\varphi} \overline{\varphi\varphi} | k_1, k_2 \rangle \propto (free) \times \quad (7.214)$$

これは、やはり散乱をしていない．

$$\langle k_3, k_4 | \overline{\varphi\varphi} \overline{\varphi\varphi} | k_1, k_2 \rangle \propto \begin{array}{c} k_3 \quad k_4 \\ | \quad | \\ \text{---} \quad \text{---} \\ | \quad | \\ k_1 \quad k_2 \end{array} + \begin{array}{c} k_3 \quad k_4 \\ \diagdown \quad \diagup \\ \text{---} \quad \text{---} \\ \diagup \quad \diagdown \\ k_1 \quad k_2 \end{array} \quad (7.215)$$

これらも、 $S = 1 + iT$ の 1 の一部（無散乱過程）であることが分かる．最後に、すべての外線が頂点と contraction する場合は

$$= 4! \frac{-i\lambda}{4!} \int d^4z e^{i(k_1+k_2-k_3-k_4)z} = -i\lambda(2\pi)^4 \delta(k_1 + k_2 - k_3 - k_4) \quad (7.216)$$

よって、不変散乱振幅は

$$i\mathcal{M} = -i\lambda \quad (7.217)$$

である．

7.4 微分散乱断面積と全散乱断面積

実験的には、粒子の散乱現象を観測したとき、その散乱断面積を観測することになる．不変振幅と散乱断面積の関係は、理想化された状況から現実的な状況に合わせなければならない．とくに、S 行列や散乱振幅の計算では、運動量一定の状態間の反応を計算している．しかし、これを使って平面波が無限の過去から飛来して散乱し再び平面波として出ていく状況を計算すれば、それに伴う無意味な発散が生じる．この発散は実際には入射粒子を波束として扱うことで取り除くことができる．このことに関して、ここでは Peskin²³に従って簡単に議論しておく．

7.4.1 散乱断面積の公式の導出

そこで、入射粒子の状態を波束として書くと、2 体の粒子 (k_1, k_2) が n 体 (p_i) で散乱するとすると

$$P(1 + 2 \rightarrow 1, \dots, n) = \int \prod_f \frac{d^3p_f}{(2\pi)^3 2E_f} |_{out} \langle p_i | \phi_1, \phi_2 \rangle_{in} |^2 \quad (7.218)$$

²³Peskin, Schroeder An Introduction to Quantum Field Theory, Westview, p.99-115

ここで, ϕ_i は入射粒子の波動関数で平均の運動量が k_i の波束を作っている.

$$|\phi_i\rangle \equiv \int \frac{d^3 k'}{(2\pi)^3 \sqrt{2E'_i}} \phi_i(\vec{k}'_i) |\vec{k}'_i\rangle \quad (7.219)$$

ただし, 粒子は z 方向に飛んでいて, 1 の波束と 2 の波束は衝突パラメタ \vec{b} だけ $x-y$ 方向に離れているとする (つまり b だけ平行移動する.).

これを上の式に代入すると

$$P(i \rightarrow f) = \int \prod_f \frac{d^3 p_f}{(2\pi)^3 2E_f} \int d^2 b \left| \prod_i \int \frac{d^3 k'_i}{(2\pi)^3 \sqrt{2E'_i}} \phi_i(\vec{k}'_i) e^{i\vec{k}'_i \vec{b}} (2\pi)^4 \delta(k'_1 + k'_2 - \sum_f p_f) \mathcal{M} \right|^2 \quad (7.220)$$

k_i 積分は, 複素共役 (\bar{k}_i と書く) から出るので 2 倍の 1 2 個の積分がある. 一方 δ 関数は, 運動量保存から 8 個と b 積分から 2 個出てくる. そこで, 6 個の \bar{k}_i 積分をしようとして, 4 個のデルタ関数が残り,

$$\mathcal{P}(i \rightarrow f) = \int \prod_f \frac{d^3 p_f}{(2\pi)^3 2E_f} \prod_i \int \frac{d^3 k'_i}{(2\pi)^3} |\phi_i(\vec{k}'_i)|^2 (2\pi)^4 \delta(k_1 + k_2 - \sum_f p_f) \frac{|\mathcal{M}|^2}{2E_1 2E_2 |v_1 - v_2|} \quad (7.221)$$

を得る. ここで, 波束が十分運動量 k_1, k_2 に局在化しているとする, 積分を実行すると運動量保存のデルタ関数の中身を k_i で近似してよく

$$d\sigma = \prod_f \frac{d^3 p_f}{(2\pi)^3 2E_f} (2\pi)^4 \delta(k_1 + k_2 - \sum_f p_f) \frac{|\mathcal{M}|^2}{2E_1 2E_2 |v_1 - v_2|} \quad (7.222)$$

をえる. ただし, $v_i = \frac{k_i}{E_i}$. これによって, 微分断面積 $d\sigma$ を求めることができる.

さらに今の場合終状態が 2 体なので,

$$\int d\Pi_2 = \int \prod_f \frac{d^3 p_f}{(2\pi)^3 2E_f} (2\pi)^4 \delta^4(\text{運動量の和}) \quad (7.223)$$

は

$$\int d\Pi_2 = \int \frac{dp_1 p_1^2}{16\pi^2 E_1 E_2} (v_1 - v_2)^{-1} = \int d\Omega \frac{|p_1|}{16\pi^2 E_{cm}} = \int d\cos\theta \frac{2|p_1|}{16\pi E_{cm}} \quad (7.224)$$

ただし, $E_{cm} = E_1 + E_2$. すると, 不変振幅から微分断面積を求める公式を得ることができる.

微分散乱断面積

$$\frac{d\sigma}{d\Omega_{CM}} = \frac{1}{4E_1 E_2 |v_1 - v_2|} \frac{|p_1|}{(4\pi)^2 E_{CM}} |\mathcal{M}(k_1, k_2 \rightarrow p_f)|^2 \quad (7.225)$$

全ての質量が等しいのでさらに簡単になる. CM 系に移ると

$$E_1 = E_2, \quad v_1 = \frac{k_1}{E_1} = -\frac{k_2}{E_2} \Rightarrow |v_1 - v_2| = 2 \left| \frac{k_1}{E} \right| \quad (7.226)$$

一方の運動量積分が実行でき, さらに動径方向の積分も行うことで,

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{|\mathcal{M}|^2}{64\pi^2 E_{cm}^2} \quad (7.227)$$

を得る．ただし， $E_{cm} = 2E_1$

7.4.2 ϕ^4 理論の散乱断面積

ϕ^4 理論では，すでに求めたように $\mathcal{M} = -\lambda$ なので，公式に代入すると微分断面積：

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{|\lambda|^2}{64\pi^2 E_{cm}^2} \quad (7.228)$$

を得る．全微分断面積は，積分して，終状態が同種粒子なので2で割ると

$$\sigma = \frac{|\lambda|^2}{32\pi E_{cm}^2} \quad (7.229)$$

を得る．

7.5 フェルミオンの入った場合のファインマン則と散乱振幅

ボゾンとフェルミオンの相互作用は

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}(\varphi) + \mathcal{L}(Dirac) + \mathcal{L}_{int} \quad (7.230)$$

のように，ボゾンとフェルミオンのそれぞれの自由場のラグランジアンに作用項 \mathcal{L}_{int} を付け加えることによって得られる．

ここでは，湯川相互作用

$$\mathcal{L}_{int} = -f\varphi(x)\bar{\psi}(x)\psi(x) \quad (7.231)$$

を加えた場合のファインマン則を考える．

まず，フェルミオンのプロパゲータは

$$\overline{\psi(x)\psi(y)} = T\{\psi(x)\psi(y)\} - : \psi(x)\psi(y) : = S_F(x-y) \quad (7.232)$$

外線との contraction は

$$\overline{\psi(x)|s, k\rangle} = \overline{\psi(x)\sqrt{2E_{\mathbf{k}}b_{\mathbf{k}}^{s\dagger}}|0\rangle} = u_{\mathbf{k}}^s e^{ikx} \quad (7.233)$$

等から，基本的に粒子か反粒子かで u, v が付き後は平面波の波動関数をつけることになる．

ボゾンのときのように，さらに運動量表示で行えば，ファインマン則が次のように得られる．

ファインマン則

1. プロパゲータ :

$$\begin{array}{c} k \\ \longrightarrow \end{array} = \frac{i}{\not{k} - m + i\epsilon} = \frac{i(-\not{k} + m)}{-k^2 - m^2 + i\epsilon} \quad (7.234)$$

2. 外線 : 運動量を固定する .

$$\begin{aligned} \psi(x)|k, s\rangle &= \begin{array}{c} \longleftarrow \\ \longrightarrow \end{array} k = u^s(k) \\ \langle k, s|\bar{\psi}(x) &= k \begin{array}{c} \longleftarrow \\ \longrightarrow \end{array} = \bar{u}^s(k) \quad , \\ \bar{\psi}(x)|k, s\rangle &= \begin{array}{c} \longrightarrow \\ \longleftarrow \end{array} k = \bar{v}^s(k) \quad , \\ \langle k, s|\psi(x) &= k \begin{array}{c} \longrightarrow \\ \longleftarrow \end{array} = v^s(k) \end{aligned} \quad (7.235)$$

3. バーテックス :

$$\begin{array}{c} k_3 \\ \vdots \\ \swarrow \quad \searrow \\ k_1 \quad k_2 \end{array} = -if \quad (7.236)$$

さらに , 運動量保存 $(2\pi)^4 \delta^4(k_1 + k_2 + k_3)$

4. 定まっていない運動量について積分 :

5. Symmetric factor で割る .

7.5.1 湯川ポテンシャル

陽子中性子間の相互作用は , 次のファインマン図で表される .

$$\begin{array}{c} k'_p, r' \\ \uparrow \\ \downarrow \\ k_p, r \end{array} \quad \text{---} \quad \begin{array}{c} k'_n, s' \\ \uparrow \\ \downarrow \\ k_n, s \end{array} \quad (7.237)$$

$$\begin{aligned} \text{グラフ} &= \langle k'_n, s' | \langle k'_p, r' | (-if)^2 \int \bar{\psi}_p \varphi \psi_p \int \bar{\psi}_n \varphi \psi_n | k_p, r \rangle | k_n, s \rangle \\ i\mathcal{M} &= -f^2 (\bar{u}_n^{s'}(k'_n) u_n^s(k_n)) (\bar{u}_p^{r'}(k'_p) u_p^r(k_p)) \frac{i}{-q^2 - \mu^2} (2\pi)^4 \delta^4(\sum k_i) \text{は不変振幅から落とす} \end{aligned}$$

$$= 4m_n m_p \delta^{ss'} \delta^{rr'} \frac{if^2}{q^2 + \mu^2} \quad (7.238)$$

ここで、始状態終状態の順序は、相互作用しない部分（つまり単なる内積）が1になるように取る。²⁴これは、非相対論的な近似では湯川ポテンシャルで与えられる引力になる。

²⁴内積の $2m$ は内積の積分測度が $\int \frac{d^3\mathbf{k}}{(2\pi)^3} \frac{1}{2E_{\mathbf{k}}}$ であることから来ている。nonrelativistic においては、測度の $2E_{\mathbf{k}}$ が状態の内積の $2m$ をキャンセルする